THE FIELD MUSEUM LIBRARY
3 5711 00072 7108

Field Museum of Natural History
LIBRARY
Chicago

From _____

Class [illegible] Book [illegible]

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
BHL-SIL-FEDLINK

https://archive.org/details/verslagvandegewo111906_15

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 26 MEI 1906
TOT 26 APRIL 1907

DEEL XV

32940

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:=====: JUNI 1907 :=====:

Q
57
A52w

INHOUD.

				Blz
Verslag	Vergadering	26 Mei	1906	1
„	„	30 Juni	»	47
„	„	29 September	„	171
„	„	27 October	„	311
„	„	24 November	„	363

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

-:- VAN 26 MEI 1906 -:-
TOT 24 NOVEMBER 1906

DEEL XV
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:═══: DECEMBER 1906 :═══:

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 Mei 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 1.

H. KAMERLINGH ONNES: „Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof", p. 2.

F. M. JAEGER: „Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistof-phasen der Cholesterylderivaten". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 2.

J. L. E. BROUWER: „Meerdimensionale vectordistributies". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE) p. 14.

F. M. JAEGER: „Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en P. ZEEMAN) p. 27.

J. STEIN: „Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te Tortosa in Spanje". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 37.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 45.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 14 Mei 1906, waarbij bericht wordt dat de benoeming van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF, hoogleeraar te Delft en F. A. H. SCHREINEMAKERS, hoogleeraar te Leiden, tot gewone leden en van de Heeren TH. VALETON, Chef der 1e Afdeeling (Herbarium en Museum) van het Departement van Landbouw te Buitenzorg (tijdelijk in Nederland) en S. H. KOORDERS, houtvester te Poerworedjo (Kedoe) tot Corres-

pondenten door H. M. de Koningin is bekrachtigd, benevens bericht van de Heeren G. A. F. Molengraaff, F. A. H. Schreinemakers en Th. Valeton dat zij gaarne bereid zijn de hun aangeboden benoeming te aanvaarden. Genoemde Heeren worden ter vergadering binnengeleid en door den Voorzitter verwelkomd.

2°. Brief van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, mededeeling gevende van bij de Internationale Associatie der Akademiën ingekomene stukken voor de vergadering van 30 Mei a. s.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Circulaire van den Directeur van het Musée Océanographique te Monaco, waarbij hij namens den Vorst van Monaco de Akademie vraagt in principe haar adhaesie te betuigen voor een te Monaco bijeen te roepen Congrès international d'Océanographie.

In handen gesteld van de Heeren Weber, Wind en van der Stok om advies.

4°. Circulaire van de American philosophical Society te Philadelphia, waarbij dank betuigd wordt, voor de bewijzen van waardeering van de Akademie ontvangen bij de herdenking van den 200sten geboortedag van Benjamin Franklin.

Naar aanleiding daarvan heet de Voorzitter den Heer Lorentz welkom ter vergadering na zijn reis naar Amerika en spreekt hem den dank der Akademie uit voor de wijze waarop hij haar heeft vertegenwoordigd. De Heer Lorentz doet een korte mededeeling omtrent de feesten te Philadelphia en de aanbieding van het adres van gelukwensch.

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes doet eene mededeeling: *„Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof."*

(Deze mededeeling zal later verschijnen).

Kristallografie. — De Heer Franchimont biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. Jaeger: *„Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistof-fasen der Cholesteryl-derivaten".*

(Mede aangeboden door den Heer H. W. Bakhuis Roozeboom).

§ 1. Reeds voor meerdere jaren werd door mij opgemerkt, dat het uit raapolie verkregen *phytosterine* door eene geringe toevoeging

van *cholesterine* eene smeltpunts*verhooging* ondergaat. De geringe hoeveelheid der eerstgenoemde stof, welke mij ten dienste stond, in verband met andere omstandigheden, maakten, dat ik een verder onderzoek der hier plaats hebbende verschijnselen niet instelde.

Door kennisname van eenige zeer verdienstelijke publikatie's van Bömer [1]) over de smeltpuntsverhoogingen van *phytosterine* door *cholesterine*, en evenzoo van *cholesterylacetaat* door *phytosterylacetaat*, werd mijne aandacht opnieuw op dit onderwerp gevestigd. Behalve namelijk, dat de door O. Mügge verstrekte kristallografische gegevens mij tot 't besluit voerden, dat hier ononderbroken mengbaarheid tusschen heterosymmetrische komponenten aanwezig was, scheen mij een nader onderzoek der binaire smeltlijn van de twee acetaten zeer gewenscht, daar de beschouwingen van Bömer hierover geenszins overal duidelijk zijn; hetgeen van des te meer belang is, aangezien door Bömer, zooals bekend is, op deze smeltpuntsverhoogingen eene methode gebaseerd werd, om vervalschingen van dierlijke met plantaardige vetten te konstateeren. Voorts was mijn doel, om na te gaan, in hoeverre de invoering van vetzuur-resten in 't molekuul van het *cholesterine* het gedrag der esters ten aanzien van het verschijnsel der *optisch-anisotrope vloeistoffasen*, dat aan 't *acetaat*, 't *propionaat* en 't *benzoaat* het eerst ontdekt werd, — met toenemend koolstofgehalte der zuren gewijzigd zou worden. Ten slotte hoopte ik te kunnen nagaan, of er van eene dergelijke smeltpuntsverhooging als bij de acetaten, ook bij de andere termen der reeks sprake was.

§ 2. In de eerste plaats was eene bereiding der cholesteryl-, en der phytosteryl-esters eene vereischte.

Het cholesterine, door mij gebezigd, smolt na herhaalde omkristallisatie uit absoluten alkohol + aether scherp bij 149°.2 C. Het gebezigde phytosterine werd door Merck volgens de methode van Hesse uit Calabar-vet bereid, en op overeenkomstige wijze gezuiverd. Het smolt bij 137° C. Een mikroskopisch onderzoek deed in geene der beide preparaten ongelijksoortige bestanddeelen erkennen.

Vooreerst heb ik de kristallografische onderzoeking der twee verbindingen ondernomen. Zij stemt volkomen overeen met de door Mügge verstrekte gegevens, waarnaar ik hier verwijs. Meetbare kristallen werden door mij tot dusverre niet verkregen; op grond der

---

[1]) Bömer, Zeits. f. d. Unters. d. Nahr. u. Genussm. (1898). 21, 81; (1901). 865, 1070; in deze laatste verhandeling (met Winter samen) is een volledig litteratuuroverzicht gegeven, waarnaar ik hier verwijzen kan.

[2]) Hesse, Annal. der Chemie, **192**, 175.

optische eigenschappen kan het cholesterine slechts trikliene, het phytosterine slechts monokliene symmetrie bezitten.

Ofschoon voor den kristallograaf het mikroskopisch onderzoek eene ondubbelzinnige onderscheiding der beide verbindingen toelaat, zoo gelijken de uit oplosmiddelen afgezette kristalletjes zóózeer op elkaar, dat voor den minder geoefenden scheikundige verwarring der beide lichamen niet uitgesloten is. Het leek mij daarom praktisch wel van belang een duidelijker kriterium voor beider identifikatie met het mikroskoop, op te sporen.

Zulks blijkt op zeer eenvoudige wijze mogelijk te zijn, als men, in stede van uit oplosmiddelen, zich de kristalletjes uit de op een objektglaasje gesmolten stoffen door afkoeling en stolling laat vormen. Ik heb in de fig. 1 en 2 schematisch de konstant terugkeerende wijze van stolling der beide lichamen weergegeven.

Deze is in beide gevallen in zóó hooge mate verschillend, en daarbij zóó typisch, dat eene verwarring hier geheel en al is uitgesloten.

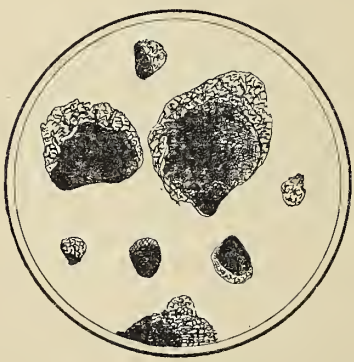


Fig. 1.
Cholesterine,
gesmolten en dan gestold.

Fig. 2.
Phytosterine,
gesmolten en bij afkoeling gestold.

Het phytosterine nl. kristalliseert steeds in aaneengesloten sferolithen. Tusschen gekruiste nicols schitteren deze in een levendig kleurenspel, en zijn elk voor zich, door een donker kruis doorsneden, zoodat het geheel den indruk maakt van aan elkaar grenzende interferentiebeelden van éénassige kristallen, loodrecht op de as bezien, en zonder cirkulaire polarisatie. Het optisch karakter der schijnbaar enkelvoudige kristallen is negatief.

Daarentegen vertoont 't cholesterine een totaal ander beeld. Bij smelting op een objekt-glaasje trekt zich de stof tot kleine drup-

Fig. 3.
Phytosterine en Cholesterine uit 95% Alkohol.

peltjes samen, welke sporadisch gelegen zijn, en bij stolling zich als klompjes, met geschubde randen voordoen, welke meestal alleen 't wit van hooger orde vertoonen.

Dat eene onderscheiding langs dezen weg mikroskopisch veel zekerder is dan langs dien door MÜGGE aangegeven, moge nog uit fig. 3 blijken, waar phytosterine en cholesterine afgebeeld zijn, zooals zij zich onder den mikroskoop, na kristallisatie uit alkohol, voordoen; *A* is 't cholesterine, *B* het phytosterine.

§ 3. Van de vetzure esters heb ik de *acetaten*, *propionaten*, *butyraten* en *isobutyraten* door verhitting der beide alkoholen met de zuivere zuur-anhydrieden aan een terugvloeikoeler, bereid. Een 2 à 3-urig verhitten met kleine vlam, en voor de cholesteryl-esters liefst in 't donker, geeft eene zeer goede opbrengst. Na bekoeling werd de massa met $NaHCO_3$ van 't overtollige zuur bevrijd, en vervolgens uit alkohol + aether, later uit aethylacetaat + ligroïne, of uit een mengsel van aceton en ligroïne, omgekristalliseerd, tot het smeltpunt konstant bleef. Gewoonlijk wendde ik gelijke gewichtsdeelen anhydriede en alkohol aan.

De *formiaten*, *valeraten*, *isovaleraten*, *capronaten*, *caprylaten* en *caprinaten*, werden uit de verbindingen i. c. door middel der zuivere, watervrije zuren bereid. Deze (valeriaan-, capryl-, en caprine-zuur) waren synthetisch door KAHLBAUM bereid; 't isovaleriaanzuur was 't, door hem onder 't merk „KAHLBAUM" als 't zuiverste in den handel gebrachte zuur; evenzoo het watervrije mierenzuur. Gewoonlijk was een zes-urig verhitten van iets meer dan de gelijke gewichtshoeveelheid van het zuur en den alkohol voldoende, om eene behoorlijke opbrengst te krijgen. Echter is 't stof-verlies bij de zuivering der produkten door de talrijke omkristallisatie's veel aanzienlijker dan bij de boven beschreven bereidingswijze.

Beide reeksen van esters kristalliseeren goed. De phytosteryl-esters in weeke, buigzame, glinsterende schubben; echter vertoonen 't formiaat en de valeraten hier bij 't kristalliseeren moeilijkheden, aangezien ze hardnekkig een weinig van een als bijprodukt gevormde kleefstof vasthouden, welke moeilijk te verwijderen is. De cholesteryl-esters kristalliseeren veel mooier; 't formiaat, acetaat en benzoaat

zijn makroskopisch gemeten; de overige derivaten kristalliseeren in fijne naaldjes of zeer dunne schubvormige kristalletjes, welke niet meetbaar zijn; 't butyraat hoop ik nog in meetbaren vorm te kunnen verkrijgen. [1]) Vooral bij het caprylaat werd de zuivering door de groote neiging der verbinding om te kristalliseeren, zeer vergemakkelijkt. Moeilijker was de zuivering daarentegen bij den caprine-zuren ester; tenslotte echter is ook deze zuiver verkregen, en zelfs in fraaie kleurlooze plaatvormige kristallen, uit kokende ligroïne [2]).

De phytosteryl-esters blijven aan 't licht wit; de cholesteryl-esters kleuren zich daarentegen bij langer liggen in 't helle daglicht geelachtig; door omkristallisatie zijn ze weer wit te verkrijgen.

De bepaling der smeltpunten, en bij de cholesteryl-esters óók die der overgangstemperaturen: vast → anisotroop-vloeibaar, werd steeds zóó uitgevoerd, dat de thermometer *in* de stof geplaatst was, welke het kwikreservoir geheel omhulde. Bij gebrek aan een thermostaat heb ik bij de bepalingen niet de grafische konstruktie der afkoelings-kromme benuttigd, maar gewoon de temperaturen bepaald, waarbij bij langzaam warmer wordend buitenbad, de nieuwe fasen 't eerst optreden; later werden echter ook bepalingen langs den eerstgenoemden weg gedaan, en met de verkregen resultaten in overeenstemming bevonden.

Wat de analyse der esters aangaat, zoo kan eene elementair-analyse in dit geval, waar de formules voor cholesterine en phytosterine nog twijfelachtig zijn, en waar de molekulen van 28 tot 37 C-atomen bevatten, weinig of niets leeren. Ik heb mij er daarom mee tevreden gesteld, om eene geringe hoeveelheid der esters met alkoholische kali te verzeepen, waaruit dan telkens 't cholesterine of phytosterine, met de bekende smeltpunten, werd teruggewonnen. Uit de met HCl zuur gemaakte oplossing der *K*-zouten van de vetzuren, werden deze aan hun kenmerkenden reuk herkend. De esters werden als zuiver beschouwd, wanneer de smeltpunten, en bij de cholesteryl-esters *beide* temperaturen bij verder omkristalliseeren konstant bleven.

---

[1]) Het formiaat heb ik zelfs voor korten tijd in groote, waterheldere kristallen kunnen verkrijgen uit een mengsel van ligroïne, aethylacetaat en weinig alkohol.

[2]) De kristallen van 't caprinaat zijn lange, platte naalden. Zij stellen monokliene, naar de *b*-as verlengde, en naar $\{001\}$ afgeplatte individuën voor. De hoek β is 88° à 89°; voorts komen nog de vormen $\{100\}$ en $\{\bar{1}01\}$ voor, met $(\bar{1}00):(\bar{1}01) = \pm 20°$. 't Optisch assenvlak is $\{010\}$; geneigde dispersie, $\rho > \nu$ om de 1e Midd. Dubbelbr. negatief. Op *c* is éene as aan den rand van het gezichtsveld waar te nemen. Overigens kromvlakkige kristallen.

§ 4. Ik laat in de volgende tabellen de waargenomen temperaturen, etc. volgen.[1]) Naast mijn gegevens zijn die van Bömer geplaatst, voor zooverre hij die verstrekt. De in [ ] ingesloten temperaturen worden later meer in 't bijzonder beschouwd.

I. VETZURE ESTERS VAN HET CHOLESTERINE.

	t_1	t_2	t_3	Bömer's opgaven:	
Chol. Formiaat	—	[± 90°]	96°.5	—	96°.
» Acetaat	—	[80 à 90°][1])	112°.8	—	113°.5
» Propionaat	93°.0	107°.2	—	96°	111°
» -*n*-Butyraat	96°.4	107°.3	—	96°	108°
» Isobutyraat	—	—	126°.5	—	—
» -*n*-Valeraat	91°.8	99°.2	—	—	—
» Iso-valeraat	—	[± 109°]	110°.6	—	—
» Capronaat	91°.2	100°.1	—	—	—
» Caprylaat	—	[± 101°]	106°.4	—	—
» Caprinaat	82°.2	90°.6	—	—	—
» Benzoaat	145°.5	178°.5	—	146°	178°.5
» Phtalaat [2])	—	—	—	—	182°.5
» Stearinaat [3])	—	—	—	65°	

Ofschoon geen vetzure esters, zijn benzoaat en phtalaat ook maar volledigheidshalve opgenomen.

[1]) Volgens Schönbeck, Diss. Marburg. (1900).

[2]) Volgens Bömer loco cit.

[3]) Volgens Berthelot. 't Blijft onuitgemaakt of hier vl. kristallen aanwezig zijn; wellicht is dit geval analoog met dat van 't caprylaat.

De in [ ] ingesloten temperaturen zijn niet nauwkeurig te bepalen; zie den tekst hieromtrent.

[1]) Opgemerkt moet worden, dat bij deze lichamen eigenlijk *drie* temperaturen in beschouwing genomen moeten worden, nl. 1. overgang: vast → anisotroop-vloeibaar; 2. overgang: anisotroop-vloeibaar → isotroop-vloeibaar; 3. overgang: vast → isotroop-vloeibaar.

Vooral met het oog op de hier ontdekte gevallen van labiele vloeibare kristallen, is deze onderscheiding vastgehouden.

§ 5. Hoogst opvallend zijn bij deze merkwaardige lichamen de prachtige kleurverschijnselen bij 't afkoelen der heldere, isotrope gesmolten massa tot hare stollingstemperatuur, en evenzoo bij de in omgekeerde richting gaande verhitting. Deze kleurverschijnselen vinden hare oorzaak in interferentie van het opvallende licht, telkens wanneer de troebele, anisotrope vloeistof-fase optreedt of in de isotrope vloeistof overgaat. Bij dezen laatsten overgang treden er bij 't roeren met den thermometer de reeds door REINITZER destijds beschrevene „olieachtige slieren" op, totdat de temperatuur t_2 overschreden is. Ook als uit de anisotrope vloeistof de vaste fase zich afzet, dus beneden t_1, treden deze kleuren op. Het schitterendst, in ongeëvenaarde violette en blauwe kleurenpracht, vertoonen het butyraat, en 't norm. valeraat dit verschijnsel, en evenzoo 't capronaat en 't caprinaat.

De in [ ] ingesloten temperaturen t_2 beantwoorden aan anisotrope vloeistof-fasen, welke *labiel* zijn ten aanzien der isotrope vloeistof, en *welke dubbelbrekende vloeistoffen dus alleen in onderkoelde gesmolten stof realizeerbaar zijn.* Van dit geval, dat vergelijkbaar is met de door LEHMANN onderscheiden *monotropie* tegenover 't geval der *enantiotrope* omzettingen, — was tot dusverre alleen 't *acetaat* als zoodanig bekend. Thans is 't aantal gevallen met *drie* vermeerderd, t. w. 't *formiaat*, 't *caprylaat*, en zonder eenigen twijfel ook het *isovaleraat*, waarop ik verder beneden nog terug kom. Het cholesterylformiaat en 't caprylaat smelten derhalve bij verhitting *volkomen scherp* tot eene heldere vloeistof bij 96½°, resp. 106.°2 C. Wanneer men echter de heldere vloeistof in koud water plotseling afkoelt, ziet men 't optreden der troebele, anisotrope, labielere fase, vergezeld van de bekende kleurverschijnselen. Vooral 't acetaat vertoont een en ander met groote pracht. Het is wel mogelijk, dat vele organische stoffen, welke tot dusverre als „scherp smeltend" opgegeven zijn, tot deze kategorie van stoffen behooren, en bij plotselinge afkoeling, al is 't ook maar één enkel moment, eene dubbelbrekende vloeistoffase bezitten. Het verschijnsel der „vloeibare kristallen" ware dan algemeener, dan men tot nu toe gemeend heeft.

Prof. LEHMANN, dien ik een weinigje der cholesteryl-esters heb toegezonden, heeft mijne waarnemingen in alle opzichten kunnen bevestigen. Daarbij heeft genoemde onderzoeker nog gevonden, dat het *cholesteryl-caprinaat* waarschijnlijk merkwaardigerwijze *twee anisotrope vloeistof-fasen* zou vertoonen. Ofschoon ik zelve nimmer méér dan eene enkele fase zag optreden, en de heer LEHMANN deze bepalingen ook nog slechts als voorloopige mededeelt, zoo zou dit geval zeker tot de merkwaardigste verschijnselen te rekenen zijn, welke er voor eene chemisch-homogene stofsoort verwacht kunnen worden, vooral, omdat

toch de waarneembaarheid dier *twee* fasen insluit, dat ze *niet* in alle verhoudingen met elkaar mengbaar zouden zijn!

Verder vertoonen het formiaat, 't isovaleraat en het norm. valeraat bovendien ieder *twee* vaste modifikatie's.

§ 6. Zeer merkwaardig is bij dit alles het gedrag van het *cholesteryl-isobutyraat.* Mikroskopisch zoowel als makroskopisch onderzoek doet hier absoluut niets van eene anisotrope vloeistof-fase erkennen, óók bij snelle afkoeling, en dat wel, terwijl het *normale* butyraat 't verschijnsel met grooten luister vertoont. Deze, in gedrag afwijkende ester, is uit *dezelfde* hoeveelheid cholesterine bereid, als waaruit de anderen gesyntheseerd zijn. De oorzaak van 't verschil kan dus alleen in de *struktuur der vetzuur-rest* gelegen zijn, welke hier, in tegenstelling met de overige esters, *vertakt* is.

Een en ander bracht mij op 't denkbeeld, om den analogen ester van 't *isovaleriaanzuur* te bereiden; wellicht zou ook hier blijken, dat de vertakking der *C*-keten van 't zuur, het verschijnsel der anisotrope vloeistof-fase te niet deed. Eerst meende ik inderdaad, dat dit het geval was. Maar nauwkeuriger observatie leerde, dat hier bij de snelle afkoeling één ondeelbaar moment eene *labiele* anisotrope vloeistof optreedt; de duur is echter zóó kort, dat ik zelfs langen tijd in twijfel ben geweest, of deze fase *stabiel,* dan wel, als bij 't formiaat en caprylaat, *labiel* moet heeten! Al heeft de *C*-vertakking dus hier niet eene algeheele opheffing van 't fenomeen der vloeibare kristallen ten gevolge, — zoo blijkt 't realizeerbaar trajekt toch door die vertakking zóó verkleind te worden, dat het bijna tot nul nadert, en is de verwachte fase bovendien zelfs nog *labiel.* Ik meen uit een en ander te mogen afleiden, dat inderdaad, zooals ook anderzijds reeds meermalen gezegd werd, het optreden der anisotrope vloeistof-fasen eene *konstitutieve* eigenschap der materie is, welke niet door vreemde bijmengingen, etc. (Tammann, c. s.) mag verklaard worden.

§ 7. Hier volgen thans de smeltpunten der analoge *phytosteryl*-esters, welke, op één na, het verschijnsel der dubbelbrekende vloeistoffen niet vertoonen. Aangezien de phytosterinen uit verschillende plantaardige vetten van elkaar verschillend schijnen te zijn, en Bömer geen phytosteryl-esters uit *Calabar*-vet in 't bijzonder vermeldt, zoo heb ik in de tweede kolom de *grenzen* aangegeven, waarbinnen de diverse, door hem uit verschillende oliën bereidde esters, wat betreft hun smeltpunt, slingeren.

II. VETZURE ESTERS VAN HET PHYTOSTERINE.

		Grenzen volgens Bömer:
Phytosteryl-Formiaat	110°	103°—113°
Phytosteryl-Acetaat	129°.1	123°—135°
Phytosteryl-Propionaat	105°.5	104°—116°
Phytosteryl-Butyraat	91°.2	85°— 90°
Phytosteryl-Isobutyraat	117°.	—
Phytosteryl-norm.-Valeraat	$t_3 = 67°$; $t'_3 = 30°$	—
Phytosteryl-Isovaleraat	100°.1	—

Uit de vergelijking der beide tabellen is te zien, dat de smeltpuntsdaling van 't phytosterine door invoering van vetzuurresten van klimmend *C*-gehalte *veel sneller* plaats vindt, dan bij 't cholesterine. Daarentegen is de opeenvolging van de smeltpunten van acetaat, propionaat, butyraat en *n*-valeraat *regelmatiger* dan bij de cholesteryl derivaten.

Alle phytosteryl-esters hebben met het phytosterine zèlve gemeen de groote neiging om uit de smelt in *sferolithen* te kristalliseeren; met toenemend *C*-gehalte der vetzuurrest schijnen deze echter in 't algemeen kleiner van omvang te worden.

Het formiaat doet 't bijzonder fraai; bovendien bezit dit lichaam twee vaste modifikatie's, zooals ook de heer Lehmann heeft gekonstateerd, die van meening is, dat deze twee met de beide vaste fasen van 't cholesteryl-derivaat zouden korrespondeeren; de sferolitenvorm is bij den phytosteryl-ester de *labielere*.

Daarentegen vormen zij, uit monobroomnaftaline of amandelolie omgekristalliseerd, onder het mikroskoop goed gevormde, naaldvormige kristalletjes, welke echter steeds klein zijn. Waarschijnlijk heeft men in al deze gevallen met polymorfie te doen. Ook grillige groeiingsvormen en dendriten nam ik dikwijls waar.

Bij de smeltpuntsbepaling van 't norm. valeraat deed zich eene moeilijkheid voor. Het smelt, over een trajekt, bij cirka 67°.1 C; koelt men de gesmolten massa af, totdat ze weer vast geworden is, dan smelt de ester echter reeds bij 30° C. tot eene heldere vloeistof. Dit gedrag is geheel analoog aan dàt, hetwelk bij enkele glyceriden der hoogere vetzuren is waargenomen, zoo o.a. door Schey [1]) bij 't *Trilaurine* en 't *Trimyristine*.

[1]) Schey, Over synthetisch bereide neutrale esters van 't glycerine, etc Dissertatie, Leiden (1899) p. 51, 54.

Na een half uur was de smelttemperatuur weer gestegen tot $53^1/_2°$ C., na een etmaal tot 67° C. In de voorheen schubvormig afgezette, zwak dubbelbrekende samenhangende laag op 't objektglaasje, hebben zich na 24 uren kleine witte *sferolithen* afgezet, welke 't donkere kruis, als bij 't phytosterine (zie daar) vertoonen. Ik meen tot verklaring van het verschijnsel eene *dimorfie* der vaste stof te mogen aannemen. Bovendien treden hier vloeibare kristallen op, zooals ook de heer LEHMANN kon konstateeren.

Volgens prof. LEHMANN vormt het norm. Phytosteryl-Valeraat zeer schoone vloeibare kristallen, welke analoog zijn aan die van het cholesteryl-oleaat; zooals deze, ontstaan zij eerst uit onderkoelde smelt. Derhalve is ook hier de anisotrope vloeistoffase *labiel* ten opzichte der isotrope.

Ik acht de mogelijkheid geenszins klein, dat de door SCHEY aan zijne hoogere triglyceriden waargenomen smeltpuntsveranderingen evenzeer aan 't optreden van labiele, dubbelbrekende vloeistoffasen hun ontstaan danken. Nader onderzoek is hier zeker gewenscht.

§ 8. Thans komen wij tot de bespreking van 't wederzijdsche gedrag der beide reeksen van vetzure esters ten opzichte van elkaar.

Door BÖMER is genoegzaam bewezen dat de smeltlijn van *cholesterine* en *phytosterine* eene *stijgende* lijn is. In verband met MÜGGE's en mijne kristalbepalingen zou hier dus inderdaad kontinue menging tusschen heterosymmetrische komponenten voorhanden zijn! Het mikroskopisch onderzoek blijkt echter bij mengels, welke ± 3 dln. cholesterine op 1 dl. phytosterine bevatten, te wijzen op eene nieuwe vaste fase, welke in trigonale prisma's schijnt te kristalliseeren. Ook bij grooter cholesterine-gehalte treedt deze verbinding (?) op [1]). Of hier mengbaarheid moet aangenomen worden van deze nieuwe kristalsoort met beide komponenten, of dat eene eventueele omzetting in de vaste mengfasen zóó langzaam verloopt, dat een overgangspunt in de smeltlijn aan de waarneming ontsnapt, moet daargelaten worden.

Van meer belang is de zaak bij de esters van beide lichamen. De formiaten geven volgens BÖMER [2]) eene smeltlijn met een eutektisch punt; de acetaten echter eene kontinu-stijgende smeltlijn.

De wijze van proefneming, en de theoretische interpretatie is echter eenigszins dubbelzinnig, aangezien *B.* gemengde oplossingen der komponenten bereidt, deze laat kristalliseeren, en het smeltpunt der

[1]) Zie BÖMER, Z. f. Nahr. u. Gen. M. (1901) 546.

[2]) BÖMER, Z. f. Nahr. u. Gen. Mitt. (1901) 1070. Echter is hier, in verband met de dimorfie der formiaten, eene mengingsreeks met gaping, zeer waarschijnlijk.

eerst afgezette vaste fase bepaalt, en door zijne opgave van de mengverhouding der komponenten in de gebezigde oplossing een onvolledig en verwarrend beeld der afhankelijkheid van smeltpunt en samenstelling geeft.

Ofschoon eene *stijging* der binaire smeltlijn op deze wijze natuurlijk evengoed als anders te konstateeren valt, en Bömer's verdienste zeker gelegen is in de ontdekking vat 't feit zèlve, — zoo is de bepaling der binaire smeltlijn ten eenenmale als onvoldoende te oordeelen, zoodra ze ook *kwantitatieve* diensten zal moeten bewijzen; hetgeen van belang is voor de praxis der boter-contrôle, aangezien bij nauwkeurig bekende smeltkromme, de bijgemengde hoeveelheid phytosterine uit de smeltpuntsverhooging van 't cholesteryl-acetaat kan worden berekend. Ik heb daarom thans de binaire smeltlijn op de juiste wijze

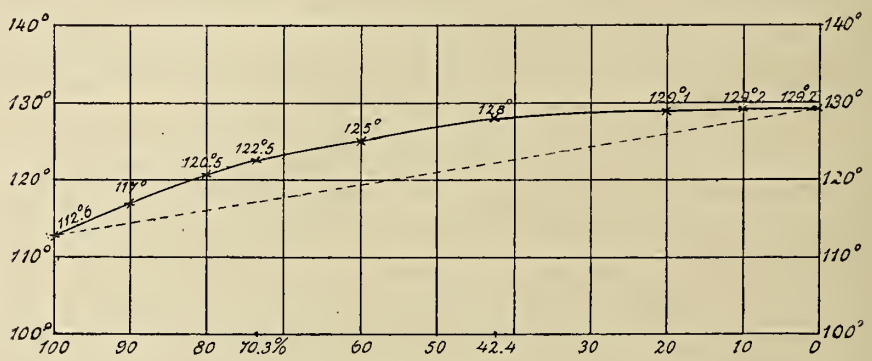


Fig. 4.
Cholesterine-, en Phytosterine-Acetaat.

bepaald, en in fig. 4 afgebeeld. Ofschoon de kromme een stijgend verloop heeft, zoo wijkt ze toch aanzienlijk af van de rechte lijn, die de twee smeltpunten verbindt. Aangezien het verloop der kromme lijn van af 40 % cholesterine-acetaat tot 0 % *bijna horizontaal* is, zoo volgt hieruit, dat de samenstelling van mengsels alleen dàn voldoende nauwkeurig door het smeltpunt te verificeeren is, wanneer de bijmenging aan phytosterine bij 't dierlijke vet 60 % niet te boven gaat; 't nauwkeurigst, als 't gehalte van 0 % tot ± 40 % phytosteryl-ester bedraagt [1]). Voor de praktijk is deze methode in de meeste

[1]) Opgemerkt zij, dat hoewel Bömer op meerdere plaatsen zijner verhandeling, de genoemde methode slechts als kwalitatief wil aanbevelen, toch op andere plaatsen duidelijkt blijkt, dat ook kwantitatieve bepalingen bij kleine koncentraties door hem als geoorloofd worden beschouwd. Bij zijne interpretatie der smeltlijn is dit echter *niet* zoo: want zijne proeven geven geen uitsluitsel omtrent de mengverhouding der komponenten bij mengsels van bepaald waargenomen smeltpunt. Eerst door algeheele bekendheid van de binaire smeltlijn worden kwantitatieve proeven mogelijk gemaakt.

gevallen dus wel bruikbaar. Het bij deze proeven gebezigde cholesteryl-acetaat smolt, goed gekristalliseerd bij 112.°8 C.; 't phytosteryl-acetaat bij 129.°2 C.

Een	mengsel	van	90	%	Chol.	Acet.	+ 10	%	Phyt.	Acet.	smelt	bij	117° C.
»	»	»	80	»	»	»	+ 20	»	»	»	»	»	120.°5 C.
»	»	»	73.3	»	»	»	+ 26.7	»	»	»	»	»	122.°5 C.
»	»	»	60	»	»	»	+ 40	»	»	»	»	»	125° C.
»	»	»	42.4	»	»	»	+ 57.6	»	»	»	»	»	128° C.
»	»	»	20	»	»	»	+ 80	»	»	»	»	»	129.°1 C.
»	»	»	10	»	»	»	+ 90	»	»	»	»	»	129.°2 C.

Waarschijnlijk is hier bij de acetaten een geval van isomorfotrope verwantschap aanwezig; beide esters zijn waarschijnlijk monoklien, ofschoon dit voor den cholesteryl-ester niet geheel zeker is uit te maken. Deze is pseudotetragonaal, en wel:

Volgens Von Zepharovich: *monoklien*, met $\beta = 73°38'$.

Volgens Obermayer: *triklien*, met $\beta = 106°17'$, en $\alpha = 90°20'$, $\gamma = 90°6'$, de assenverhoudingen zijn: 1,85 : 1 : 1,75.

De phytosteryl-ester is door Beykirch mikroskopisch benaderend gemeten, en schijnt eene monokliene, of althans eene trikliene symmetrie met monokliene grenswaarde te bezitten. Isomorf zijn beide verbindingen zeer zeker *niet*, volgens mijne meening. In ieder geval zou het mogelijk kunnen zijn, dat, al bestaat eene direkte isomorfie ook bij de twee reeksen van esters niet, er toch méér termen waren, welke isomorfotrope mengbaarheid vertoonen, op analoge wijze, als dit bij de acetaten door Bömer gevonden werd. Ik heb het onderzoek, tot de isovaleraten inklusief, uitgestrekt; 't resultaat echter is ontkennend, en schijnt 't geval der azijnzure esters in deze reeks vrijwel alleen te staan.

Om enkele getallen te noemen, kan 't volgende voorbeeld dienen: 31.8% Cholesteryl-Butyraat + 68,2% Phytosteryl-Butyraat wijzen voor t_1 aan 81° C., en voor t_2 83° C. enz. enz.

Bij de formiaten werd de verlaging al door Bömer gekonstateerd; de overige esters, die van de iso-zuren insgelijks, gedragen zich analoog: aan beide zijden van 't smeltdiagram eene verlaging van de begin-smeltpunten. Echter is 't hoogst waarschijnlijk, dat in enkele, misschien in alle gevallen, er iso*di*morfotrope menging, met gaping in de reeks der mengkristallen, aanwezig is.

De anisotroop-vloeibare fase der cholesteryl-esters geeft in deze gevallen aanleiding tot anisotroop-vloeibare mengkristallen. Ik wil hier nog opmerken, dat voor enkele der lager smeltende esters, zooals

't butyraat, capronaat, caprinaat, norm. valeraat, enz., de temperatuur t_1 bij deze mengkristallen tot circa 40° à 50° C., en lager, te brengen is, en dus de mogelijkheid wordt geschapen, om vloeibare mengkristallen bij dergelijke temperaturen te bestudeeren, wat het mikroskopisch experiment aanzienlijk vergemakkelijkt.

Naar alle waarschijnlijkheid zal ik eene dergelijke studie dezer lichamen over eenigen tijd ondernemen. Theoretisch van belang is ook de mogelijkheid, waarop mij Prof. BAKHUIS ROOZEBOOM opmerkzaam maakte, dat bij die lichamen, waar t_2 aan den labieleren toestand beantwoordt, door bijmenging van eene vreemde stof, de eerst labielere vloeibare mengkristallen, ten slotte stabiel worden ten opzichte der isotrope smelt. Proeven in dien zin, met deze praeparaten, zullen van andere zijde ondernomen worden. Wellicht dat ook eene beschouwing der laagsmeltende derivaten met het ultramikroskoop, of anders eene zoodanige bestudeering van de laagsmeltende vloeibare mengkristallen, als boven genoemd, wel het een en ander belangrijks kan opleveren.

Zaandam, 1 Mei 1906.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer L. E. J. BROUWER: *„Meerdimensionale Vectordistributies."*

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

De vlakke ruimte, waarin geopereerd wordt, noemen we R_n; we denken daarin een rechthoekig coördinatenstelsel aangebracht, waarin een C_p voorstelt een coördinaatruimte van p dimensies. Zij dan in R_n gegeven een ${}^pX$-distributie, d. w. z. er zij in elk punt van R_n een p-dimensionaal vectorstelsel aangebracht. Onder $X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_p}$ wordt verstaan de vectorontbondene evenwijdig aan de met de indices aangewezen C_p, terwijl als positieve zin wordt aangenomen die, welke overeenkomt met de door de volgorde der indices aangewezen indicatrix. Door twee der indices met elkaar van plaats te doen verwisselen, verandert de zin dier indicatrix, dus het teeken van den vectorcomponent.

Stelling I. De integraal van ${}^pX$ in R_n over een willekeurige gebogen tweezijdige gesloten R_p is gelijk aan de integraal van ${}^{p+1}Y$ over een willekeurige gebogen R_{p+1}, die door de R_p als be-

grenzing wordt ingesloten; hierin is ${}^{p+1}Y$ bepaald door

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{\alpha_{q_1} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_2} \alpha_{q_3} \ldots \alpha_{q_{p+1}}}}{\partial x_{\alpha_{q_1}}},$$

waar voor elk der termen van het tweede lid de indicatrix $(\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \ldots \alpha_{q_p} \alpha_{q_{p+1}})$ denzelfden zin heeft als $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1})$.

We noemen den vector Y de *eerste afgeleide* van ${}^{p}X$.

Bewijs. We denken de begrensde R_{p+1} voorzien van kromlijnige coördinaten $u_1 \ldots u_{p+1}$, bepaald als snijding van gebogen C_p's, d.w.z. gebogen coördinaatruimten van p-dimensies. We denken het kromlijnige coördinatenstelsel binnen de begrenzing zonder singulariteiten, en de begrenzing ten opzichte dier coördinaten overal convex.

Het integraalelement van ${}^{p+1}Y$ wordt, uitgedrukt in differentiaalquotienten van ${}^{p}X$:

$$\sum_{Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}} \sum_{\alpha_{q_1} = \alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_2} \ldots \alpha_{q_{p+1}}}}{\partial x_{\alpha_{q_1}}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\alpha_{p+1}}}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial x_{\alpha_{p+1}}}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1}$$

We nemen nu samen alle termen, die een der componenten van ${}^{p}X$, b. v. $X_{123 \ldots p}$ bevatten. Dan komt:

$$\frac{\partial X_{123 \ldots p}}{\partial x_{p+1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{p+1}}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \frac{\partial X_{123 \ldots p}}{\partial x_{p+2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{p+2}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{p+2}}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \ldots (n - p \text{ termen}).$$

Tellen we hierbij op de volgende termen met waarde 0:

$$\frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_1}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+\frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \ldots (p \text{ termen}),$$

dan zijn de n termen te sommeeren tot:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial u_1} du_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{vmatrix}$$

Denken we dezen determinant ontwikkeld naar de eerste kolom, en integreeren we dan elk der termen van de ontwikkeling partieel naar het er in optredend differentiaalquotient van $X_{123\ldots p}$, dan blijven onder het $(p+1)$-voudige integraalteeken staan $p(p+1)$ termen, die elkaar twee aan twee vernietigen. Zoo b.v.:

$$du_1 \ldots du_{p+1}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 x_p}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_p} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_p} \end{vmatrix}$$

$$X_{123\ldots p}$$

$$\text{en } du_1 \ldots du_{p+1} \left| \begin{array}{c} X_{123\ldots p} \\ \hline \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_p} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_p} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 x_p}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} \end{array} \end{array} \right|$$

daar ze uit elkaar ontstaan door verwisseling van twee rijen van den hoofddeterminant.

Er blijft dus alleen over de p-voudige integraal, en die geeft onder het integraalteeken :

$$X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{ccc} \pm 1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \pm 1 \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{array} \right|,$$

te integreeren over de begrenzing, terwijl in een bepaald punt dier begrenzing de h^{de} term der eerste kolom het $+$ teeken krijgt, als het punt voor de coördinaat u_h aan den positieven kant der begrenzing ligt.

Zoeken we nu de integraal van $X_{123\ldots p}$ over de begrenzing, en denken we ons vooreerst op dat gedeelte er van, dat voor alle u's aan den positieven kant ligt. De indicatrix loopt daar in den zin $u_1 u_2 \ldots u_{p+1}$ en als we $X_{123\ldots p}$ achtereenvolgens integreeren over de ontbondenen der begrenzingselementjes volgens de gebogen C_p's, vinden we:

$$\sum \int X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u_{\alpha_1}} du_{\alpha_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{\alpha_1}} du_{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{\alpha_p}} du_{\alpha_p} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{\alpha_p}} du_{\alpha_p} \end{array} \right|,$$

waar $(\alpha_{p+1}\, \alpha_1 \ldots \alpha_p) = (1\ 2\ 3 \ldots p\ (p+1))$; zoodat we ook kunnen schrijven :

$$\sum_{q=1,2\ldots(p+1)} \int X_{123\ldots p} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{q-1}} du_{q-1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{q-1}} du_{q-1} \\ \hline \frac{\partial x_1}{\partial u_{q+1}} du_{q+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{q+1}} du_{q+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$\text{of: } \int X_{123\ldots p} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{vmatrix}$$

Bewegen we ons nu naar andere gedeelten der begrenzing, dan zien we telkens waar we een schijnbaren omtrek ten opzichte van een der coördinaten u overschrijden, de projectie der indicatrix op de bijbehoorende gebogen C_p van zin veranderen.

In een willekeurig punt der begrenzing wordt dus de integraal op dezelfde wijze gevonden als aan den volkomen positieven kant; alleen zal voor elke coördinaat u_q, waarvoor we aan den negatieven kant zijn, de bijbehoorende term onder het Σ-teeken negatief moeten worden genomen; waarmee de gelijkheid van de p-voudige integraal van ${}^{p}X$ over de begrenzing en de $(p+1)$-voudige integraal van ${}^{p+1}Y$ over de begrensde R_{p+1} is aangetoond.

We kunnen de scalarwaarden van ${}^{p}X$ ook uitgezet denken langs de normaal-R_{n-p}'s. Als zoodanig kan dan de integraal over een willekeurige gebogen tweezijdige gesloten R_{n-p} worden herleid tot de integraal van een $(n-p+1)$-dimensionalen vector over een gebogen R_{n-p+1}, die door de R_{n-p} wordt begrensd. Zetten we de scalarwaarden van dien vector weer uit langs zijn normaal-R_{p-1}, dan ontstaat de vector ${}^{p-1}Z$, dien we noemen de *tweede afgeleide* van ${}^{v}X$. Voor de ontbondenen van ${}^{p-1}Z$ wordt gevonden:

$$Z_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha_q = \alpha_p, \alpha_{p+1} \ldots \alpha_n} \frac{\partial X_{\alpha_q \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_q}} .$$

De bijzonderheid kan zich voordoen, dat een der beide afgeleiden 0 wordt. Is de eerste afgeleide van een ${}^{m}X$ nul, dan zullen we spreken van een ${}^{m}_{m-1}X$; is de tweede nul, van een ${}^{m}_{m+1}X$.

Stelling 2. De eerste afgeleide van een ${}^{p}X$ is een ${}^{p+1}_{p}X$; de tweede afgeleide een ${}^{p-1}_{p}X$; m. a. w. zoowel het proces van eerste afleiding als dat van tweede afleiding geeft, tweemaal achtereen toegepast, 0.

Het bewijs is analytisch eenvoudig, maar ook meetkundig blijkt de stelling als volgt:

Zoek de integraal van de eerste afgeleide van ${}^{p}X$ over een gesloten R_{p+1}, dan kunnen we de bijdrage, die een R_{p+1}-element daartoe geeft, vervangen door de integraal van ${}^{p}X$ langs de begrenzende R_p van dat element. Over de geheele R_{p+1} wordt dan elk element van die R_p-begrenzingen tweemaal geteld met tegengestelde indicatrix, zoodat de integraal moet wegvallen.

Het analoge voor de tweede afgeleide blijkt, als we de integraal van den normaalvector over een gesloten R_{n-p+1} opmaken.

Onder *totale afgeleide* zullen we verstaan de som van de eerste en tweede afgeleide, en de bewerking van totale afleiding voorstellen door ∇.

Stelling 3. $$\nabla^2 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d^2}{dx_h{}^2}.$$

Bewijs. Vooreerst is uit stelling 2 duidelijk, dat de vector ∇^2 weer een ${}^{p}X$ is. Zoeken we dus zijn ontbondene $X_{12\ldots p}$.

De eerste afgeleide levert daarvoor de termen

$$T_1 = \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial Y_{q\,1\ldots p}}{\partial x_q},$$

waarin

$$Y_{q1\ldots p} = \sum_{u=1}^{u=p} \pm \frac{\partial X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u}$$

$$\left(+ \text{ teeken voor } (uq\,12\,..\,(u-1)\,(u+1)\,\ldots\,p) = (q\,1\,\ldots\,p)\right)$$

$$+ \frac{\partial X_{12\ldots p}}{\partial x_q}.$$

Dus

$$T_1 = \sum_{u=1}^{u=p} \sum_{q=p+1}^{q=n} \pm \frac{\partial^2 X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u \, \partial x_q}$$

$$\left(+ \text{ teeken voor } (uq\,12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (q\,1\ldots p) \right)$$

$$+ \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_q{}^2}.$$

De tweede afgeleide levert de termen

$$T_2 = \sum_{u=1}^{u=p} \pm \frac{\partial Z_{12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u}$$

$$\left(+ \text{ teeken voor } (u\,12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (12\ldots p) \right.$$

$$\left. \text{of voor } (qu\,1\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (q\,12\ldots p) \right),$$

waarin $Z_{12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p} = \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_q} \pm$

$$\pm \frac{\partial X_{12\ldots p}}{\partial x_u} \left(+ \text{ teeken voor } (u\,12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (12\ldots p) \right).$$

Dus $T_2 = \sum_{u=1}^{u=p} \sum_{q=p+1}^{q=n} \pm \frac{\partial^2 X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u \partial x_q}$

$$\left(+ \text{ teeken voor } (qu1\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (q12\ldots p) \right)$$

$$+ \sum_{u=1}^{u=p} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_u{}^2}.$$

De termen onder het $\Sigma\,\Sigma$-teeken van T_1 worden vernietigd door die van T_2, zoodat we alleen overhouden

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_h{}^2}.$$

Gevolg. Is gegeven een vectordistributie $^p V$, dan heeft de vectordistributie $\int \frac{V dv}{k_n \pi r^{n-2}}$, over de geheele ruimte geintegreerd, tot tweede afgeleide V. (als $k_n \pi r^{n-1}$ het boloppervlak in R_n uitdrukt.)

De stelling gaat ook door voor een distributie van sommen van vectoren van verschillend aantal dimensies, bv. quaternionen.

We zullen zeggen, dat een vectordistributie de *potentiaaleigenschap* heeft, als haar scalarwaarden voldoen aan de eischen van verdwijnen in 't oneindige, die aan een scalarpotentiaalfunctie in R_n moeten gesteld worden. [1]) En we zullen in het volgende onderstellen, dat de vectordistributie van uitgang de potentiaaleigenschap bezit. Dan geldt:

Stelling 4. Een vectordistributie V is door haar totale afgeleide der tweede orde Z eenduidig bepaald.

Immers de scalarwaarden van V zijn elk eenduidig bepaald door de scalarwaarden van Z, waaruit ze door de operatie $\int \frac{scal.\ Z\, dv}{k_n\, \pi r^{n-2}}$ worden afgeleid.

Stelling 5. Een vectordistributie is door haar totale afgeleide der eerste orde eenduidig bepaald.

Immers uit de eerste totale afgeleide volgt de tweede, en daaruit volgens de vorige stelling de vector zelf.

We zullen zeggen, dat een vectordistributie de *veldeigenschap* heeft, indien de scalarwaarden van de totale afgeleide der eerste orde voldoen aan de eischen, die aan een agensdistributie van een scalarpotentiaalfunctie in R_n moeten gesteld worden. En we zullen in het volgende onderstellen, dat de vectordistributie van uitgang de veldeigenschap bezit. Dan geldt:

Stelling 6. Elke vectordistributie is te beschouwen als een totale afgeleide, m. a. w. elke vectordistributie heeft een potentiaal, en die potentiaal is door haar eenduidig bepaald.

Bewijs. Zij V de gegeven distributie, dan is:

$$P = \int \frac{\nabla V\, .\, dv\, .}{k_n\, \pi r^{n-2}}$$

haar potentiaal. Immers $\nabla^2 P = \nabla V$ of $\nabla(\nabla P) = \nabla V$, of $\nabla P = V$. Verder volgt uit de veldeigenschap van V, dat P eenduidig bepaald is als ∇^{-2} van ∇V, dus als ∇ van V. Duidelijk heeft P de potentiaal-eigenschap, de veldeigenschap behoeft ze echter niet te hebben.

N.B. Een distributie, die hier buiten beschouwing blijft, omdat

---

[1]) Gewoonlijk wordt de eisch gesteld, dat de functie moet worden oneindig klein van de $n-2^{de}$ orde t. o. v. de afstand tot het eindige. Men kan echter bewijzen, dat oneindig klein worden zonder meer voldoende is.

ze niet de veldeigenschap, ofschoon wel de potentiaaleigenschap heeft, is b.v. het fictieve krachtveld van een enkel agenspunt in R_2. Immers hier is niet een in 't oneindige verdwijnende — en als zoodanig dan eenduidig bepaalde — potentiaal. Het magnetisch veld in R_2 heeft wèl de veldeigenschap, en ook alle velden van een enkel agenspunt in R_3 en hoogere ruimten.

Noemen we de eerste afgeleide van ${}^{p}V$: $\overline{\backslash 1/}\,V$, de tweede: $\overline{\backslash 2/}\,V$, dan is ${}^{p}V$ te splitsen in:

$$\nabla\int\frac{\overline{\backslash 1/}\,V\,.\,dv}{k_n\,\pi r^{n-2}}=\nabla P_1=\overline{\backslash 2/}\,P_1={}^{p}_{p+1}V.$$

en

$$\nabla\int\frac{\overline{\backslash 2/}\,V\,.\,dv}{k_n\,\pi r^{n-2}}=\nabla P_2=\overline{\backslash 1/}\,P_2={}^{p}_{p-1}V.$$

Uit het voorgaande volgt ook direct:

Stelling 7. Elke ${}^{p}_{p-1}V$ heeft als potentiaal een ${}^{p-1}_{p}V$. Elke ${}^{p}_{p+1}V$ heeft als potentiaal een ${}^{p+1}_{p}V$.

We kunnen als volgt, vooreerst van de ${}^{p}_{p+1}V$, aangeven de elementair-distributie, d. w. z. die bijzondere ${}^{p}_{p+1}V$, waarvan de willekeurige R_n-integraal moet worden genomen, om de meest algemeene ${}^{p}_{p+1}V$ te krijgen.

Immers de algemeene ${}^{p}_{p+1}V$ is $\overline{\backslash 2/}$ van de algemeene ${}^{p+1}V$, is dus de algemeene R_n-integraal van de $\overline{\backslash 2/}$ van een geïsoleerden $(p+1)$-dimensionalen vector, die, zooals we licht meetkundig zien, bestaat uit gelijke ^{p}vectoren in het oppervlak van een ^{p}bol, met oneindig kleinen straal om het punt van den gegeven geïsoleerden vector, en in de R_{p+1} van den vector beschreven.

Evenzoo is de algemeene ${}^{p}_{p-1}V$ de $\overline{\backslash 1/}$ van de algemeene ${}^{p-1}V$, is dus de algemeene R_n-integraal van de $\overline{\backslash 1/}$ van een geïsoleerden ${}^{p-1}$vector, die bestaat uit gelijke ^{p}vectoren loodrecht op het oppervlak van een ${}^{n-p}$bol, met oneindig kleinen straal beschreven om het punt van den gegeven geïsoleerden vector in de R_{n-p+1}, loodrecht op dien vector.

Stelling 8. We kunnen nu de algemeene ${}^{p}V$ denken als willekeurige integraal van elementairvelden E_1 en E_2, waar:

$E_1 = \nabla \cdot \int \frac{{}_p^{p-1}Zdv}{k_n \pi r^{n-2}}$, waar ${}_p^{p-1}Z$ bestaat uit de $^{p-1}$vectoren in het oppervlak van een oneindig kleinen $^{p-1}$bol B_z . . . . (1)

$E_2 = \nabla \cdot \int \frac{{}_p^{p+1}Ydv}{k_n \pi r_{n-2}}$, waar ${}_p^{p+1}Y$ bestaat uit de $^{p+1}$vectoren loodrecht op het oppervlak van een oneindig kleinen $^{n-p-1}$bol B_y. . (2)

Overigens moeten op eindigen afstand van hun oorsprong de velden E_1 en E_2 volkomen identiek gebouwd zijn; immers twee velden E_1 en E_2 met denzelfden oorsprong moeten zijn te sommeeren tot een geïsoleerden ^{p}vector in dien oorsprong.

We kunnen de bollen B_y en B_z met hun indicatrices noemen *elementairwervelstelsels* W_y en W_z. Een veld is dan door zijn elementairwervelstelsels eenduidig bepaald, en kan beschouwd worden als door die wervelstelsels veroorzaakt.

We gaan nu de theorie op eenige voorbeelden toepassen.

Het krachtveld in R_2.

Het veld E_1. De elementairbol B_z wordt hier twee vlak bij elkaar gelegen punten, het elementairwervelstelsel W_z gaat over in twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden, in die beide punten geplaatst. Het geeft een scalarpotentiaal $\frac{\cos \varphi}{r}$, waarin φ de hoek is van den voerstraal met de R_1 van W_z, d.i. de verbindingslijn der beide punten van W_z. Het elementairveld is de (eerste) afgeleide van de potentiaal (de gradient); het is het veld van een agensdubbelpunt in 2 dimensies.

Het veld E_2. De elementairbol B_y bestaat weer uit twee vlak bij elkaar gelegen punten, het elementairwervelstelsel W_y stelt in die twee punten twee gelijke en tegengestelde planivectoren. De planivectorpotentiaal (door een scalarwaarde bepaald) wordt ook hier weer $\frac{\cos \varphi}{r}$; het veld zelf wordt dus verkregen door alle vectoren van een veld E_1 $90°$ te draaien. Daar het aan den anderen kant buiten den oorsprong met E_1 identiek gebouwd moet zijn, kunnen we het veld E_1 resp. E_2 „zichzelf duaal" noemen.

In onze ruimte is het veld E_1 te verwerkelijken als dat van een vlakke oneindig lange en smalle magnetische band met polen langs de randen; het veld E_2 als dat van twee oneindig lange evenwijdige rechte electrische stroomen, vlak bij elkaar en tegengesteld gericht.

Het planivector-(wervel-)veld in R_4.

Het veld E_1. De elementairbol B_z is een cirkeltje, het elementairwervelstelsel W_z een stroompje daarlangs. Het levert en lijnvectorpotentiaal $= \frac{\sin \varphi}{r^3}$, gericht volgens de cirkels, die zich op het vlak van W_z als met W_z concentrische cirkels projecteeren, en waar φ is de hoek van den voerstraal met het normaalvlak van W_z. Het veld is de eerste afgeleide (rotatie) van deze potentiaal.

Het veld E_2. De elementairbol B_y is weer een cirkeltje, het elementairwervelstelsel W_y stelt in de punten van dat cirkeltje gelijke R_3-vectoren er loodrecht op. De R_3-potentiaal bestaat uit de R_3's loodrecht op de potentiaalvectoren van een veld E_1: het veld E_2 wordt dus verkregen door van alle planivectoren van een veld E_1 de normaalvlakken te nemen. Daar aan den anderen kant E_1 en E_2 buiten den oorsprong identiek gebouwd zijn, kan men ook hier weer zeggen, dat het veld E_1 resp. E_2 zichzelf duaal is.

We kunnen dus het wervelveld in R_4 beschouwen als teweeggebracht door elementaircirkelstroompjes van tweeërlei aard; twee gelijke stroomen van verschillende soort brengen gelijk gebouwde wervelvelden te weeg, maar het eene veld staat volkomen loodrecht op het andere.

Zijn dus van een veld de beide voortbrengende stroomstelsels gelijk, dan bestaat het uit gelijkbeenige dubbelwervelingen.

Het krachtveld in R_3.

Het veld E_1. W_z geeft een dubbelpunt; hierbij komt een scalarpotentiaal $\frac{\cos \varphi}{r^2}$, waar φ de hoek van den voerstraal met de as van het dubbelpunt is; de afgeleide (gradient) geeft het bekende veld van een elementairmagneet,

Het veld E_2. W_y bestaat uit gelijke planivectoren, loodrecht op een cirkelstroompje. Representeeren we de planivectorpotentiaal door den lijnvector er loodrecht op, dan vinden we voor dien lijnvector: $\frac{\sin \varphi}{r^2}$, gericht volgens de cirkels, die zich op het vlak van W_z als met W_z concentrische cirkels projecteeren, en waar φ is de hoek van den voerstraal met de loodlijn op het cirkelstroompje. Het veld E_2 is de tweede afgeleide van de planivectorpotentiaal, d.i. de rotatie van den normaal-lijnvector.

Volgens het vroeger afgeleide is het veld E_2 van een cirkelstroompje

buiten den oorsprong gelijk aan het veld E_1 van een elementairmagneet loodrecht op het stroompje.

We hebben zoo het principe afgeleid, dat een willekeurig krachtveld kan worden beschouwd als teweeggebracht door elementairmagneten en elementairstroompjes. Een continu agglomeraat in het eindige van elementairmagneten geeft een stelsel eindige magneten; een continu agglomeraat in het eindige van elementairstroompjes geeft een stelsel eindige gesloten stroomen, d. w. z. van eindige afmetingen; de lineaire lengte der aparte stroomen kan oneindig zijn.

Men kan natuurlijk volgens stelling 6 de scalarpotentiaal ook opbouwen uit die van enkele agenspunten ($\frac{1}{4\pi} \times$ de tweede afgeleide van het veld), en de vectorpotentiaal uit die van stroomelementen (loodlijn op $\frac{1}{4\pi} \times$ de eerste afgeleide van het veld), maar het fictieve „veld van een stroomelement" heeft overal rotatie, is dus het werkelijke veld van een vrij gecompliceerde stroomdistributie. Een veld, dat als eenige stroom een stroomelement zou hebben, is niet alleen physisch, maar ook mathematisch onbestaanbaar. Een veld van een enkel agenspunt, hoewel physisch misschien even onbestaanbaar, is mathematisch in de Euclidische ruimte tengevolge van haar oneindige uitgestrektheid toevallig mogelijk als het veld van een magneet, waarvan de eene pool zich oneindig ver heeft verwijderd.

Ook in de hyperbolische ruimte is om dezelfde reden het veld van een enkel agenspunt bestaanbaar, maar in de elliptische en sferische ruimten, die eindig zijn, is het even onbestaanbaar geworden als het veld van een stroomelement. De wijze waarop Schering (Göttinger Nachr. 1870, 1873; vergel. ook Fresdorf diss. Göttingen 1873; Opitz diss. Göttingen 1881) en Killing (Crelle's Journ. 1885) de potentiaal der elliptische ruimte opbouwen, uitgaande van de onderstelling, dat als eenheid van veld moet mogelijk zijn het veld van een enkel agenspunt, voert dan ook tot ongerijmde consequenties, waarop Klein (Vorlesungen, über Nicht-Euklidische Geometrie) gewezen heeft, zonder evenwel een verbetering voor te slaan. Om de potentiaal der elliptische en sferische ruimten op te bouwen, kan niet anders dan het veld van een dubbelpunt als eenheid van veld worden genomen, wat hier te ver zou voeren, maar in een volgende mededeeling nader zal worden uitgevoerd.

Met het krachtveld in R_3 is tegelijk het er mee duale wervelveld in R_3 behandeld. Het is een integraal van wervelvelden, zooals die om de krachtlijnen van een elementairmagneet en zooals die om de inductielijnen van een elementairkringstroom loopen.

Het krachtveld in R_n .

Het veld E_1. W_z geeft weer een dubbelpunt; dit geeft een scalarpotentiaal $\frac{\cos\varphi}{r^{n-1}}$, waar φ is de hoek tusschen voerstraal en dubbelpuntsas; de gradient hiervan geeft wat we kunnen noemen het veld van een elementairmagneet in R_n.

Het veld E_2. W_y bestaat uit gelijke planivectoren, loodrecht op een $^{n-2}$bolletje B_y. Om nu de planivectorpotentiaal in een punt P te vinden, noemen we OL de loodlijn op de R_{n-1}, waarin B_y gelegen is, noemen het vlak LOP het „meridiaanvlak" van P, stellen $\angle LOP = \varphi$, en noemen OQ de in het meridiaanvlak getrokken loodlijn op OL. We zien dan, dat alle planivectoren van W_y de richting OL met het meridiaanvlak gemeen hebben, dus ontbonden kunnen worden volgens dat meridiaanvlak en een vlak, dat het meridiaanvlak loodrecht snijdt. De laatste ontbondenen heffen, als ze, gedeeld door de $n-2^{de}$ macht van hun afstand tot P, in P worden geplaatst, elkaar twee aan twee op, en de eerste geven paren van gelijke en tegengestelde planivectoren, gericht evenwijdig aan het meridiaanvlak, en van elkaar op oneindig kleinen afstand verwijderd volgens de richting OQ. Deze veroorzaken in P een planivectorpotentiaal volgens het meridiaanvlak $= c\frac{\sin\varphi}{r^{n-1}}$. Het veld E_2 is van deze potentiaal de $\nabla = \sqrt[2]{}$, en is buiten den oorsprong identiek met het veld van een elementairmagneet volgens OL.

Het krachtveld in R_n kan dus worden beschouwd als teweeggebracht door 1°. magneten 2°. wervelstelsels bestaande uit de vlakke werveltjes loodrecht op een $^{n-2}$bolletje opgericht. We kunnen de oorzaak ook zoeken in de bolletjes zelf met hun indicatrices, en zeggen dat het veld wordt teweeggebracht door magneten en wervelbolletjes van $n-2$ dimensies, (zooals in R_3 de oorzaak wordt gezocht in den gesloten electrischen stroom, in plaats van in de wervelingen daaromheen).

Velden van een enkel vlak wervelelement zijn ook hier onbestaanbaar. Toch kan men spreken van het fictieve „veld van een enkele wervel", hoewel dat feitelijk overal in de ruimte werveling heeft. Men kan n.l. zeggen :

Is van een krachtveld in elk punt de divergentie (een scalar) en de rotatie (een planivector) gegeven, dan is het de ∇ van een potentiaal : $\int\frac{div.\,dv}{k_n\pi r^{n-2}} + \int\frac{rot.\,dv}{k_n\pi r^{n-2}}$; deze formule beschouwt het veld als een integraal van fictieve velden van agenspunten, en van enkele wervels.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER, getiteld: *„Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders"*. (1e Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

§ 1. In de laatste jaren is van verschillende zijden beproefd, om langs theoretischen weg een numeriek verband op te sporen tusschen de verschijnselen der thermische en elektrische geleidbaarheid van metallieke geleiders, en wel met behulp der meer en meer veldwinnende theorie der elektronenbeweging.

Zoo achtereenvolgens in 1900 door P. DRUDE [1]), J. J. THOMSON [2]) en E. RIECKE [3]), en in het afgeloopen jaar door H. A. LORENTZ [4]).

Een der merkwaardige resultaten van deze onderzoekingen is dit, dat *genoemde theorie tusschen het electrisch en thermisch geleidingsvermogen van alle metalen, onafhankelijk van hunne bijzondere chemische geaardheid, eene konstante, en met de absolute temperatuur recht evenredige verhouding heeft doen kennen.*

Onder aanname, dat zich de elektronen in zulk een metaal vrij kunnen bewegen, met eene van de temperatuur afhankelijke snelheid, zooals zulks in ideale gassen met de molekulen plaats heeft, en voorts onder aanname, dat deze elektronen alleen tegen de veel zwaardere metaal-atomen botsen, zoodat m. a. w. hunne onderlinge kollisie verwaarloosd wordt, terwijl beide soorten van deeltjes als volkomen veerkrachtige bollen beschouwd worden, — laat zich inderdaad de verhouding van het thermisch geleidingsvermogen λ tot het elektrisch geleidingsvermogen σ, als eene met de absolute temperatuur T evenredige konstante voorstellen.

Slechts in de absolute waarde van 't verhoudingsgetal gaan de theorieën van DRUDE en LORENTZ uiteen; volgens DRUDE toch zal: $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$ zijn; volgens LORENTZ is: $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$. In deze uitdrukkingen hebben λ, σ en T de boven aangegeven beteekenis, terwijl α eene konstante is, en e de elektrische lading van het elektron voorstelt.

---

[1]) P. DRUDE, Ann. Phys. (1900). **1**. 566; **3**. 369.

[2]) J. J. THOMSON, Rapport du Congrès de physique Paris (1900). **3**. 138.

[3]) E. RIECKE, Ann. Phys. Chem. (1898). **66**. 353, 545, 1199; Ann. Phys. (1900). **2**. 835.

[4]) H. A. LORENTZ, Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Amst. (1904—1905). p. 493, 565, 710.

Door JAEGER en DIESSELHORST [1]) zijn naar eene van KOHLRAUSCH afkomstige methode, de waarden voor $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij verschillende metalen experimenteel bepaald. De overeenstemming tusschen theorie en waarneming is in de meeste gevallen alleszins bevredigend; slechts hier en daar, zooals o.a. [2]) bij het bismuth is de afwijking aanzienlijker. Uit hunne metingen aan 't zilver bij 18° C. laat zich voor de uitdrukking: $\frac{aT}{e}$ de waarde: 47×10^5 in C.G.S.-eenheden afleiden. (Zie LORENTZ, loco cit. p. 505); volgens DRUDE's formule: 38×10^5.

§ 2. In den eerstkomenden tijd wensch ik eene experimenteele bijdrage tot deze theorieën te leveren door eene reeks van bepalingen van analogen aard, maar meer in het bijzonder aan *gekristalliseerde* geleiders, en wel in verschillende richtingen van die kristalfasen.

Nemen wij het meest algemeene geval, waarin dus drie onderling loodrechte thermische en elektrische hoofdrichtingen in zulke kristallen zijn aan te wijzen, dan maken de genoemde theorieën het voor alle zulke geleidende kristallen tamelijk waarschijnlijk, dat:

$$\frac{\lambda_x}{\sigma_x} = \frac{\lambda_y}{\sigma_y} = \frac{\lambda_z}{\sigma_z}, \text{ en dus ook: } \lambda_x : \lambda_y : \lambda_z = \sigma_x : \sigma_y : \sigma_z.$$

Niet slechts, dat dus in geleidende kristallen de richtingen van grootere elektrische geleidbaarheid ook tevens die van grootere thermische geleidbaarheid zouden moeten zijn, — theoretisch zou de verhouding der elektrische hoofd-geleidbaarheden numeriek *gelijk* moeten zijn aan die der thermische hoofd-geleidbaarheden.

Tot dusverre is van dergelijke gegevens nog zeer weinig bekend.

---

[1]) W. JAEGER und DIESSELHORST, Berl. Sitz. Ber. (1899). 719 e. v. Verg. REINGANUM, Ann. Phys. (1900) **2**, 398.

[2]) Bij Al, Cu, Ag, Ni, Zn, varieert de waarde voor $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 18° C. tusschen 636×10^8 en 699×10^8; bij Cd, Pb, Sn, Pt, Pd, tusschen 706×10^8 en 754×10^8; bij Fe tusschen 802 en 832×10^8, dus reeds meer. Bij het *bismuth* is $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 18° C. 962×10^8. Terwijl bij de overige genoemde metalen de waarden van $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 100° C. en bij 18° C. zich verhouden als gemiddeld: 1,3 : 1, is bij 't *bismuth* deze verhouding slechts 1.12. JAEGER en DIESSELHORST bezigden bij hunne proeven staafjes, en met 't oog op de groote neiging van 't *Bi* om te kristalliseeren, kunnen hunne uitkomsten bij dit metaal niet als geheel ondubbelzinnig worden aangemerkt, daar de waarden van elektrisch en thermisch geleidingsvermogen in de hoofdrichtingen van 't gekristalliseerde bismuth zeer aanzienlijk verschillen.

Het best onderzochte gevai is dat van den ijzerglans, $Fe_2 O_3$, en wel van een, een weinig titaandioxyd-houdend mineraal van Zweedsche herkomst, hetwelk door H. Bäckström en K. Angström [1]) op zijn thermisch en elektrisch geleidingsvermogen onderzocht werd. Zij vonden voor de verhouding van het thermisch geleidingsvermogen bij dit ditrigonale mineraal in de richting der hoofd-as (c) en in die, loodrecht daarop (a), bij 50° C.:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1.12.$$

Voor de verhouding der elektrische weerstanden w bij diezelfde temperatuur vonden zij:

$$\frac{w_c}{w_a} = 1.78, \text{ en dus: } \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 1.78.$$

Hieruit volgt, dat bij genoemden geleider de theorie wèl, voor zoover het den *kwalitatieven* samenhang der geleidingsvermogens aangaat, met de observatie overeenstemt, doch kwantitatief *niet*, en wel is, — in tegenstelling met de meest-voorkomende afwijkingen, — hier de verhouding der grootheden λ *kleiner* dan die der grootheden σ.

Ook de empirische regel van Jannettaz, volgens welke de geleidbaarheid voor warmte, parallel de richtingen van volkomener splijtbaarheid in kristallen tevens 't grootst is, gaat hier slechts in zóóverre op, als de ijzerglans, welke eene uitgesproken splijtbaarheid *niet* bezit, zich dan toch nog 't best laat klieven volgens de basis {111} (Miller), d. w. z. parallel aan het vlak der boven met a aangeduide richtingen.

§ 3. Om onze kennis in dit opzicht derhalve wat te verrijken werd het plan opgevat, om in eene reeks van bepalingen, het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen voor eenige hooger-, en ook voor lager-symmetrische kristallijne geleiders, en wel als 't kon, voor metalen, te onderzoeken. Voorloopig stel ik mij ten doel de verhouding dier geleidbaarheden in de verschillende hoofdrichtingen te bepalen en vervolgens later wellicht ook metingen dier geleidingsvermogens zelve in absolute maat uit te voeren.

I. Over de thermische en elektrische geleidbaarheden bij het gekristalliseerde Bismuth, en bij den Haematiet.

Metingen van het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van het bismuth zijn reeds bekend.

[1]) H. Bäckström en K. Ångström, Ofvers. K. Vetensk. Akad. Förh. (1888). No. 8, 533; Bäckström, ibid. (1894), No. 10, 545.

MATTEUCCI [1]) bepaalde de thermische geleidbaarheid volgens de bekende methode van INGENHOUSZ, door meting van de lengte der afgesmolten waslaag, welke was aangebracht aan 't oppervlak van cylindrische staafjes, uit bismuth, // en ⊥ op de hoofd-as gesneden, terwijl 't eene uiteinde in op 150° C. verhit kwik gedompeld werd. Hij vond als gemiddelde waarde voor de verhouding der hoofdgeleidbaarheden, loodrecht en normaal op de hoofd-as, de waarde 1,08. Hier gaat de regel van JANNETTAZ op, aangezien de volkomen splijtbaarheid van het ditrigonale bismuth plaats heeft langs {111} (MILLER), dus loodrecht op de hoofd-as. JANNETTAZ [2]) heeft de SÉNARMONT'sche methode op 't bismuth toegepast. Hij deelt mede, dat de ellipsen bij het bismuth eene groote excentriciteit hebben, exakte metingen echter voerde hij niet uit.

Kort geleden heeft LOWNDS [3]) de SÉNARMONT'sche methode opnieuw op 't bismuth toegepast. Hij vindt voor de verhouding der halve ellips-assen: 1.19, en dus voor de verhouding der geleidbaarheden: 1.42.

Het laatste onderzoek is van PERROT [4]). Volgens de SÉNARMONT'sche methode vindt hij als assenverhouding der ellipsen ongeveer 1.17, en dus voor de verhouding der geleidbaarheden ⊥ en // as: 1.368, hetgeen met het door LOWNDS gevonden getal vrij goed overeenstemt. Ten tweede bepaalde PERROT de genoemde verhouding volgens eene door C. SORET aangegeven methode, welke reeds vroeger ook door THOULET [5]) was voorgesteld, en wel door meting van den tijd, welke er verloopt tusschen de momenten, waarop twee stoffen met bekende smeltpunten ϑ_1 en ϑ_2, aan verschillende zijden van een blok der te onderzoeken stof op gegeven afstand geplaatst, beginnen te smelten. Als indices werden gebezigd: *α-Naftylamine* ($\vartheta = 50°$ C.), *o-Nitro-Aniline* ($\vartheta = 66°$ C.), en *Naftaline* ($\vartheta = 79°$ C.).

Als gemiddelde van alle waarnemingen vindt PERROT aldus als verhouding der hoofdgeleidbaarheden: 1,3683, hetgeen volkomen met zijn resultaat volgens SÉNARMONT's methode overeenstemt.

Echter wordt door hem terecht opgemerkt, dat deze overeenstemming tusschen beide uitkomsten *eene geheel toevallige* is, en dat de methode van THOULET en SORET *niet* als van algemeene geldigheid mag beschouwd worden. Het bewijs daarvan is door den Heer

---

[1]) MATTEUCCI, Ann. Chim. et Phys. (3). **43**. 467. (1855).

[2]) JANNETTAZ, Ann. de chim. phys. **29**. 39. (1873).

[3]) L. LOWNDS, Phil. Magaz. V. 152. (1903).

[4]) L. PERROT, Archiv. d. Science phys. et nat. Généve (1904). (4). **18**. 445.

[5]) THOULET, Ann. de Chim. Phys. (5). **26**. 261. (1882).

C. CAILLER, langs theoretischen weg geleverd [1]); de overeenkomst wordt hier bewerkt door de toevallige *kleine* waarde van een quotient: $\frac{hl}{k}$, waarin l de dikte van het plaatje bismuth is, en h en k de koëfficienten zijn van uitwendige en inwendige geleidbaarheid.

§ 4. Ik heb getracht, de verhouding der hoofdgeleidingsvermogens te bepalen volgens de door W. VOIGT aangegeven methode.

Zooals bekend is, berust deze methode op de meting van den hoek, welke de twee isothermen met elkaar maken aan de grenslijn tusschen twee plaatjes, welke tot eene kunstmatige tweeling zijn samengevoegd, wanneer de warmtestrooming langs de grenslijn voortschrijdt. Zijn λ_1 en λ_2 de beide hoofdgeleidbaarheden van een aan de kristallografische hoofd-as parallel gesneden bismuthplaatje, en is de hoek φ, welke beide hoofdrichtingen met de grenslijn maken, gelijk aan 45°, dan is volgens eene vroeger [2]) afgeleide formule:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = tg\left(45° + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

§ 5. Het door mij gebezigde bismuth werd mij door den Heer Dr. F. L. PERROT op de meest welwillende wijze afgestaan.

Ook hièr betuig ik den genoemden geleerde nogmaals mijn hartelijken dank.

Het door mij onderzochte prisma is dàt, hetwelk de Heer PERROT in zijne publikatie's [3]) met M aanduidt, en voor hetwelk hij volgens de SÉNARMONT'sche methode voor $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ de waarde 1,390 vond. Het aan Dr. VAN EVERDINGEN destijds afgestane prisma A, leverde op dezelfde wijze voor $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ de waarde 1,408.

Parallel aan de kristallografische as, en wel in twee, onderling 90° verschillende richtingen van het basis-vlak {111}, werden twee plaatjes gesneden, en deze tot tweelingsplaatjes, met $\varphi = 45°$, vereenigd.

Al spoedig bleek, dat de VOIGT'sche methode [4]) hier bijzondere moeilijkheden opleverde, hetgeen, zooals Prof. VOIGT mij mededeelde, bij *metalen* juist het algemeen-optredende euvel is. Vooreerst is 't moeilijk, een samenhangenden overtrek van elaïdine-zuur + was

[1]) C. CAILLER, Archiv. de Scienc. phys. et nat. Genève (1904). (4). 18. 457.
[2]) Deze Verslagen. (1906). Maart p. 799.
[3]) Zie pag. 4, noot 10.
[4]) VOIGT, Göttinger Nachr. (1896). Heft 3, p. 1—16; ibid. (1897). Heft 2. 1—5.

te vinden; meestal trekt zich het gesmolten mengsel op de gladgepolijste oppervlakte tot druppeltjes samen, in stede van te stollen tot eene gelijkmatige laag. Ten tweede vallen de isothermen meest kromlijnig uit, en treden er in hun vorm allerlei onregelmatigheden op, welke wel met de groote specifieke geleidbaarheid der metalen in verband met de zooeven genoemde eigenaardigheid, hun oorzaak zullen hebben. Op raad van den Heer VOIGT heb ik eerst 't metaaloppervlak met een uiterst dun laagje vernis bedekt; deze lost in 't gesmolten zuur op, en doet dit in vele gevallen beter hechten. Erg beste resultaten leverde ook dit hier niet op. Daarentegen gelukte het mij tenslotte eene behoorlijke bedekking der oppervlakte te verkrijgen, door de witte was te vervangen door de *gele* was der apotheken. Deze bevat n.l. eene, waarschijnlijk uit de honig afkomstige kleefstof, en levert, in goede verhouding met elaïdinezuur gemengd, de gewenschte oppervlakte-laag.

Dan heb ik verder de onderzijde van het plaatje, en de zijkanten, behalve de twee, welke ⊥ op de grenslijn staan, met een dikke laag vernis, met b. v. kwikjodide-koperjodide aangemengd, bestreken [1]). De verwarming werd dan bij het overtrekken niet hooger dan tot beginnend zwart-worden ($\pm$ 70° C.) voortgezet.

De plaatjes moeten rechthoekigen of vierkanten vorm hebben, aangezien anders de isothermen meestal krom worden.

Verder is 't eene vereischte, *snel* te verhitten, dus de koperen bout op vrij hooge temperatuur te brengen; ook dàn hebben de isothermen rechteren vorm en leveren meer konstante waarden voor ε.

De metingen verrichtte ik op de dubbele objekttafel van een LEHMANN'sch kristallisatie-mikroskoop, en wel op een met dik zeemleder overtrokken objektglaasje, om de te snelle afkoeling en stolling van 't overtrek-laagje tegen te gaan.

Na tallooze vergeefsche pogingen gelukte het ten slotte eene langere reeks van konstante waarden te verkrijgen. Als gemiddelde uit een 30-tal observatie's vond ik: $\varepsilon = 22°12'$, en dus:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1{,}489.$$

§ 6. De thans gevonden waarde is wat grooter dan die, welke de Heer PERROT heeft gevonden. Het leek mij niet van belang ontbloot, te onderzoeken, in hoeverre eene dergelijke afwijking ook in andere

[1]) De door RICHARZ (Naturw. Rundschau, **17**, 478 (1902)) voorgeslagen methode van experimenteeren leverde in dit geval geene genoegzaam scherp begrensde isothermen, en werd dus opgegeven.

gevallen aanwezig was, en of zij steeds, vergeleken met de, langs den door SÉNARMONT, JANETTAZ en ROENTGEN voorgeslagen weg verkregen uitkomsten, dezelfde richting heeft.

Inderdaad heeft het onderzoek aan vele mineralen mij geleerd, dat alle vroeger verkregen waarden *kleiner* zijn dan die, welke langs den hier gevolgden weg verkregen worden.

Eerst meende ik zelfs, dat deze verschillen nòg grooter waren, dan die, welke hier medegedeeld worden. Ofschoon meer uitgebreid onderzoek, ook aan eenige, mij door Prof. VOIGT welwillend geleende plaatjes, deed erkennen, dat deze verschillen niet zulk een omvang hadden, als ik eerst vermoedde, zoo *blijft* toch de afwijking steeds in *dezelfde* richting bestaan.

Zoo mat ik aan een plaatje, uit een *Apatiet*-kristal van Stillup in Tyrol, den hoek ε, en vond dien $= 17°$. Uit de ligging der isothermen volgt bovendien nog dat $\lambda_c > \lambda_a$ is, zoodat: $\frac{\lambda_c}{\lambda_a} = 1{,}35$ wordt.

Aan een *kwarts*plaatje, van Prof. VOIGT afkomstig, vond ik: $\varepsilon = 30\frac{1}{2}°$, zoodat hier $\frac{\lambda_c}{\lambda_a} = 1{,}75$ wordt. Aan een plaatje uit *Antimoniet* van Skikoku in Japan, parallel aan het vlak {010} gesneden, werd $\frac{\lambda_c}{\lambda_a}$ zelfs veel grooter gevonden dan 1,74, welke waarde uit DE SÉNARMONT's en JANNETTAZ' proeven volgt, daar zij voor de verhouding der halve ellips-assen: 1.32 vinden.

Voor *Apatiet* vinden zij evenzoo 1,08, voor kwarts 1,73, terwijl TUCHSCHMIDT de warmtegeleiding van dit laatste mineraal volgens de WEBER'sche methode in absolute maat bepaalde, en de waarde 1,646 voor de verhouding $\frac{\lambda_c}{\lambda_a}$ uit zijne proeven volgt.

Steeds liggen de afwijkingen in dien zin, dat de waarden van het quotient $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, als $\lambda_1 > \lambda_2$ is, *grooter* uitvallen, wanneer de VOIGT'sche methode wordt aangewend, dan in 't geval van die van DE SÉNARMONT. Toch is de hier gevolgde methode principieel zóó zuiver, en biedt zij in zóóveel mindere mate aanleiding tot waarnemingsfouten, dat zij zeker de voorkeur boven de andere onderzoekingswijze verdient.

Ten slotte werd dus ook de *IJzerglans* van Elba nog op zijn geleidingsvermogen onderzocht. Een plaatje, parallel aan de *c*-as gesneden, bleek inhomogeen te zijn, en gasblaasjes te bevatten. Aan een fraai gepolijst preparaat van Prof. VOIGT werden door mij bij herhaling de hoeken ε gemeten, en vrijwel konstant $10\frac{1}{2}°$ gevonden, terwijl de ligging der isothermen leerde, dat λ_a ook hièr grooter dan λ_c was.

Voor den *Yzerglans* volgt hieruit de waarde : $\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1{,}202$. De waarde, door Bäckström en Angström aan hun materiaal gevonden, met behulp der door Christiansen aangegeven methode, was 1,12. Ook hier ligt de afwijking in den boven omschreven zin.

Uit de medegedeelde proeven vindt men voor de verhouding : $\varkappa_a : \varkappa_c$ bij beide kristalfasen, als daaronder verstaan wordt : $\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)_a : \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)_c$, de waarden :

Bij *Bismuth* : $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1{,}128.$

Bij *Haematiet* : $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1{,}480.$

Hierbij zijn mijne metingen van $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ gekombineerd met de beste waarde door van Everdingen aan het Perrot'sche prisma gevonden,[1]) nl.: $\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 1{,}68$, en met de door de Zweedsche onderzoekers aan den haematiet gevonden waarde : 1,78 bij 50° C.

§ 7. Ware de overeenstemming tusschen theorie en waarneming volkomen, dan zou in beide gevallen $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1$ zijn. De genoemde waarden 1,128 en 1,480 zijn dus in zekeren zin eene maat voor de grootte van afwijking tusschen de waarneming en de gevolgtrekking, die door de elektronentheorie waarschijnlijk wordt gemaakt.

In de eerste plaats valt dan op, dat de overeenstemming veel beter is bij het *bismuth* dan bij den *ijzerglans*. Dit is ook wel duidelijk, als men bedenkt, dat de theorie toch in eerste instantie voor *metallische* geleiders is opgesteld. De invloed van de bijzondere geaardheid der materie bij het *oxyde*, in vergelijk met het ware *metaal*, doet zich hier duidelijk gelden.

Men zou zich kunnen afvragen, of wellicht ook eenige samenhang tusschen de kristalstruktuur en de chemische geaardheid eenerzijds, en de genoemde waarden van $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}$ anderzijds, is aan te toonen. Een dergelijk verband zou dáárom van beteekenis zijn, omdat het wellicht een wegwijzer kan zijn ter opsporing van de bijzondere, in de

---

[1]) van Everdingen, Archives Néerland. (1901) 371 ; Versl. Akad. v. Wet. (1895—1900) ; Comm. Phys. Lab. Leiden, 19, 26, 37, 40 en 61. Zie Archiv. Néerl. p. 452 ; staafjes No. 1 en No. 5.

kristallijne struktuur gelegene faktoren, welke hier eene volledige aansluiting van elektronentheorie en observatie in den weg staan.

§ 8. Vooreerst valt op te merken, dat eene vergelijking van de strukturen beider fasen hier als van zelf aangewezen is. Beide onderzochte stoffen kristalliseeren ditrigonaal-skalenoëdrisch, en hebben analoge assenverhoudingen: voor *bismuth*: $a : c = 1 : 1{,}3035$ (G. Rose), voor *ijzerglans*: $a : c = 1 : 1{,}3654$ (Melczer). Bij beide lichamen is de habitus die van 't rhomboëder, hetwelk bij elk hunner zeer dicht tot het regulaire hexaëder nadert. De karakteristieke hoek α is nl. voor het *bismuth* $= 87°34'$, voor den *ijzerglans* $= 85°42'$. Vooral aan 't bismuth is de pseudo-kubische bouw zeer duidelijk: de vlakken van volkomene splijtbaarheid, welke aan die der vormen $\{111\}$ en $\{11\bar{1}\}$ beantwoorden, naderen in hooge mate door hunne kombinatie tot het regulaire oktaëder. Ofschoon de ijzerglans geene volkomen splijtbaarheid bezit, zoo laat hij zich toch in elk geval, met schelpachtig scheidingsvlak, 't best klieven volgens $\{111\}$. Het lijdt wel geen twijfel, of de elementair-parallelepipeda der beide kristalstrukturen zijn in beide fasen pseudo-kubische, rhomboëdrische konfiguratie's, en de vraag is dan vooreerst, in welke verhouding de molekulaire dimensie's dier cellen in beide kristallen tot elkaar staan.

Denkt men zich in alle kristalfasen op zoodanige wijze de geheele ruimte in volume-eenheden verdeeld, dat elk dier, alom aaneensluitende, onderling kongruente, b.v. kubische elementen juist één enkel chemisch molekuul omvat, dan volgt daaruit, dat bij verschillende kristallen de grootte dier volume-elementen evenredig is met $\frac{M}{d}$, waarin M 't molekuulgewicht der stoffen, en d 't specifiek gewicht der kristallen is. Stelt men nu in elke kristalfase den inhoud van de elementaircellen der struktuur gelijk aan dit aequivalent-volume $\frac{M}{d}$, dan zullen de afmetingen dier cellen voor alle kristallen op eene zelfde lengteeenheid herleid zijn, n.l. alle op de lengte van eene kubus-ribbe die aan 't volume-element eener kristalfase toebehoort, wier dichtheid door hetzelfde getal wordt uitgedrukt als haar molekuulgewicht; want in dat bijzonder geval toch, is $V = \frac{M}{d} = 1$. Berekent men nu de afmetingen van zulk een elementair-parallelopipedon der Bravais'sche struktuur, welks inhoud gelijk is aan het quotient $\frac{M}{d}$, en welks ribben zich verhouden als de kristalparameters $a : b : c$, dan zijn de aldus gevonden dimensie's χ, ψ en ω, de zgn. *topische parameters*

der fase, welke, tegelijk onafhankelijk van elkaar door BECKE en MUTHMANN ingevoerd, bij de onderlinge vergelijking van chemisch-verschillende kristalfasen al groote diensten bewezen hebben. In het bijzonder geval, dat de elementair-cellen der kristalstruktuur *rhomboëdrischen* vorm hebben, zooals zulks bij ditrigonale kristallen het geval is, worden de parameters χ, ψ en ω aan elkaar gelijk ($= \varrho$). De in dit geval geldige relatie's zijn:

$$\varrho = \left(\frac{V}{\sin^2 \alpha \,.\, \sin A}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{met} \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}.$$

Voert men thans deze berekeningen uit met de hier geldende waarden: $Bi = 207{,}5$; $Fe_2O_3 = 159{,}64$; $d_{Bi} = 9{,}851$ (PERROT); $d_{Fe_2O_3} = 4{,}98$, dan worden dus:

$$V_{Bi} = 21{,}064 \quad \text{en} \quad V_{Fe_2O_3} = 32{,}06,$$

en vindt men met behulp der gegeven betrekkingen, en de waarden van α en A voor elke fase: [1])

$$\frac{\varrho_{Bi}}{\varrho_{Fe_2O_3}} = \frac{2{,}7641}{3{,}1853}.$$

Vergelijkt men nu eens deze waarden voor de ribben der rhomboëdrische elementair-cellen van de kristalstruktuur met die van de verhoudingen $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}$ in beide fasen, dan blijkt merkwaardigerwijze de volgende betrekking tusschen hen te bestaan:

$$\left(\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}\right)_{Fe_2O_3} : \left(\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}\right)_{Bi} = \varrho^2_{Fe_2O_3} : \varrho^2_{Bi} = 1{,}32.$$

De overeenstemming is zoo goed, als men met het oog op de waarnemings-fouten wenschen mag: bij den eersten term der vergelijking is de waarde volkomen zuiver: 1.312, bij den laatsten term: 1,328.

Voor beide fasen laat zich met andere woorden in ons geval de verhouding $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_e}$ schrijven in den vorm: $C.\varrho^2$, waarin C eene konstante is, die van de bijzondere chemische geaardheid der fase onafhankelijk is.

In plaats van de verhouding: $\varrho_1^2 : \varrho_2^2$, voldoet misschien nog beter: $\varrho_1^2 \sin \alpha_1 : \varrho_2^2 \sin \alpha_2 = 1.305$. Deze uitdrukkingen echter stellen niets

---

1) Voor bismuth is: $\alpha = 87°34'$ en $A = 87°40'$; voor den haematiet is: $\alpha = 85°42'$ en $A = 86°0'$. De hoek A is 't supplement van den standhoek op de poolribben der rhomboëdrische cellen, en α is de, tusschen de poolribben ingesloten, vlakke hoek.

anders voor dan de *oppervlakte der elementaire mazen van de drie hoofdvlakken der trigonale molekuulstruktuur*, want deze toch zijn in ons geval ruiten, wier vlakke hoek $= \alpha$ is. Dan zou dus de verhouding van $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_o}$ in beide fasen recht evenredig zijn met de retikulaire dichtheid van de hoofd-netvlakken der BRAVAIS'sche strukturen. Eene keuze tusschen deze en bovengenoemde opvatting kan hier nog niet gedaan worden, omdat α_1 en α_2 te weinig van 90° verschillen. Bovendien zal verder onderzoek aan andere kristallen moeten leeren, of men hier met iets meer dan met eene toevallige overeenkomst te doen heeft. Dergelijke onderzoekingen, ook aan lager-symmetrische geleiders, worden op dit oogenblik met dit doel ondernomen; naar ik hoop zal ik over niet te langen tijd daaromtrent nadere mededeelingen kunnen doen.

Zaandam, Mei 1906.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. STEIN. S.J.: „*Waarnemingen der totale zonsverduistering van* 30 *Aug.* 1905 *te Tortosa (Spanje)*".

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

Tegen het einde van Juni 1905 begaf ik mij op uitnoodiging van den Heer R. CIRERA S.J., Directeur van het nieuwe „Observatorio del Ebro" naar Tortosa, om te gaan deelnemen aan de waarneming der totale zonsverduistering. Mij werd opgedragen metingen te verrichten der gemeenschappelijke koorde van zon en maan bij begin en einde der verduistering en tevens de oogenblikken der vier contacten te bepalen. De resultaten konden eene bijdrage leveren ter verbetering der betrekkelijke plaatsen van zon en maan.

De bepaling der coordinaten van de waarnemingsplaats werd ten zeerste vergemakkelijkt door de omstandigheid, dat vandaar uit de signalen der drie punten Espina, Gordo en Montsià van 't Spaansche geodesische net zichtbaar zijn. De hoekmetingen met een theodoliet gaven tot resultaat:

$$\varphi = 40°49'\ 13''.43 \quad ; \quad \lambda = 1^m\ 58^s\ 18\ O \text{ van Greenwich.}$$

Hierbij is streng rekening gehouden met den spheroïdalen vorm der aarde.

Latere metingen, door den Heer J. UBAGH uitgevoerd, gaven een

identiek resultaat. Electrische tijdsignalen van de Madridsche sterrenwacht rechtstreeks overgeseind, gaven voor de lengte $1^m\ 58^s.8$ *O* van Greenw. Als meest waarschijnlijke waarde is aangenomen $1^m\ 58^s.8$, het gemiddelde der beide bepalingen. Ter controle deed ik nog een 30-tal poolshoogte-bepalingen met een geïmproviseerd Talcott-instrument, en vond daaruit als gemiddelde: $\varphi = 40°49'\ 14''.8$. De hoogte boven 't zee-niveau is 55 M.

Het instrument, dat mij ten dienste stond voor de eclips-waarneming, was een nieuwe aequatoriaal van MAILHAT (Parijs), van $2^m.40$ brandpuntsafstand en 16 cM. opening, voorzien van een oculair met dubbelen mikrometer. De schroefwaarde van een der beide schroeven werd door mij bepaald uit 18 doorgangen van circumpolair-sterren in de nabijheid van den meridiaan. Ik vond daarvoor:

$$R_1 = 60''.3534 \quad \pm\ 0''.0117$$

De waarde der andere schroef werd bepaald, door de intervallen met behulp der eerste uit te meten:

$$R_2 = 1.00010\ .\ R_1$$

Het observatorium is in 't bezit van een goede sterre-klok, waarvan de gang sinds een viertal maanden met zorg werd gecontroleerd met behulp van ster-doorgangen. De Heer B. BERLOTY, geoefend observator, met deze taak belast, heeft in den nacht van 29—30 Aug. een 20-tal tijdsterren geobserveerd, zoodat de kennis van den tijd aan nauwkeurigheid niets te wenschen overliet.

Tijdens de phase-waarnemingen was het objectief met een diaphragma van karton tot 25 mm. gereduceerd. Het oculair, met vergrooting 30, was voorzien van een blauw glas. De waarnemingen der koorden werden voortgezet, zoolang de grootte van het gezichtsveld van het oculair, dat ruim 20′ in diameter was, dit toestond. De momenten der waarnemingen werden op mijn „top"-teeken genoteerd door den Heer BELDA, gezeten voor eene M. T.-standaardklok, die vóór, tijdens en na de waarnemingen werd vergeleken met de sterreklok; een andere assistent noteerde de mikrometer-aflezingen.

Tijdens het begin en het einde der verduistering was de omgeving der zon volmaakt helder, zoodat ik de koorde-metingen ongestoord kon volbrengen, hoewel nu en dan bemoeilijkt door onregelmatigheden in den gang van het drijfuurwerk. Van eenige minuten vóór tot na totaliteit was de zon met lichte wolken bedekt, maar toch waren de oogenblikken van contact nog met voldoende zekerheid te constateeren.

WAARNEMINGEN.

Eerste contact: h m s 11 55 39 .1 (M. Tijd v. Greenw.)

	Lengte der koorde (verbeterd voor refractie)
	"
11 56 28 .2	294.93
57 12 .1	390.24
57 35 .2	437 22
58 20 .0	507.74
59 8 .2	566.98
59 38 .9	608.94
12 0 9 .2	642.58
1 25 .0	721.69
2 49 .9	798.82
4 18 .3	876.43
4 57 .0	906.12
5 44 .3	935.04
6 15 .9	959.75
6 53 .2	983.94
7 18 .9	1004.93
8 1 .2	1030.37
8 43 .3	1052.50
9 23 .3	1078.17
9 49 .1	1096.89
10 16 .1	1106.16
10 42 .2	1124.37
11 9 .3	1138.90
11 26 .1	1144.49
11 56 .3	1160.37
12 24 .3	1178.82

Tweede contact: h m s 1 16 13 .2

Derde contact: 1 19 7 .2

	Lengte der koorde
h m s	"
2 15 53 .0	1297.92

h m s	Lengte der koorde "
2 17 17 .3	1256.94
18 4 .5	1232.27
18 25 .3	1219.81
18 42 .5	1209.51
19 13 3	1193.25
19 38 .2	1181.49
20 45 .0	1157.42
21 5 .3	1129.77
21 28 .3	1117.78
22 1 .0	1095.75
22 35 .3	1073.82
23 4 .1	1054.40
23 21 .3	1041.52
23 54 .3	1020.90
24 36 .0	993.28
25 2 .2	973.01
25 35 .3	950.47
26 2 .3	920.28
26 29 .3	903.24
26 52 .3	880 81
27 13 .3	863.90
27 36 .2	845.41
28 7 .6	819.14
28 43 .3	779.01
29 5 .3	762.98
29 38 .6	726.38
30 2 .3	697.40
30 22 .3	677.17
30 52 .3	637.13
31 14 .8	610.37
31 40 .6	573 84
32 4 .5	538.62
32 42 .6	480 78
33 3 .3	437.21
33 13 .3	406.92

Vierde contact: h m s 2 34 44 .7.

Bij de afleiding der resultaten heb ik de zonne-parallaxe gelijk 8".80 genomen; voor 't overige heb ik de constanten ontleend aan de publicatie „Observatorio Astronomico de Madrid. Memoria sobre el eclipse total de Sol del dia 30 de Agosto de 1905". Deze zijn:

Gemiddelde straal der zon $R_0 = 15'59''.63$ (AUWERS)

„ „ „ maan $r_0 = 15'32''.83$ (KUESTNER en BATTERMANN)

Parallaxe der maan $\pi_0 = 57'\ 2''.68$

Rechte klimming der zon, Aug. 30, 12^h M.T. Gr. $\alpha_\odot = 158°10'44''.24$

Declinatie „ „ „ „ $\delta_\odot = 9°\ 9'33''.19$

Rechte klimming der maan, „ „ $\alpha_(= 157°42'47''.95$ (HANSEN-NEWCOMB).

Declinatie „ „ „ „ $\delta_(= 9°53'\ 3''.48$ (HANSEN-NEWCOMB).

Elke waarneming levert eene voorwaarde-vergelijking ter bepaling van de correcties Δ van de elementen van zon en maan. Noemen wij deze correcties achtereenvolgens:

$$\Delta R,\ \Delta r,\ \Delta\alpha_\odot,\ \Delta\alpha_(,\ \Delta\delta_\odot,\ \Delta\delta_(,\ \Delta\pi,$$

dan verkrijgen wij door vergelijking der waargenomen afstanden en koorden met de berekende, de volgende vergelijkingen: (de coefficienten zijn hier tot twee decimalen afgerond)

KOORDEN-VERGELIJKINGEN.

I. Waarnemingen na 't eerste contact.

											W.—B.
										"	"
+7.98	ΔR	+7.97	Δr	+7.14	$\Delta\alpha$ (—⊙	−3.20	$\Delta\delta$ (—⊙	+1.67	$\Delta\pi$ =	+50.71	−10.36
+5.50	„	+5.49	„	+4.88	„	−2.19	„	+1.12	„	+36.23	− 5.57
+4.88	„	+4.87	„	+4.30	„	−1.93	„	+1.01	„	+37.59	+ 0.70
+4.10	„	+4.09	„	+3.56	„	−1.60	„	+0.81	„	+32.40	+ 1.78
+3.58	„	+3.57	„	+3.10	„	−1.39	„	+0.69	„	+22.49	− 2.13
+3.34	„	+3.32	„	+2.87	„	−1.29	„	+0.64	„	+24.96	+ 0.27
+3.15	„	+3.13	„	+2.69	„	−1.20	„	+0.59	„	+22.45	− 0.67
+2.78	„	+2.76	„	+2.34	„	−1.05	„	+0.51	„	+19.66	− 0.49
+2.50	„	+2.48	„	+2.06	„	−0.92	„	+0.43	„	+16.66	− 1.12
+2.29	„	+2.26	„	+1.85	„	−0.82	„	+0.38	„	+20.03	+ 4.06
+2.21	„	+2.18	„	+1.76	„	−0.79	„	+0.36	„	+19.60	+ 4.28
+2.13	„	+2.10	„	+1.68	„	−0.75	„	+0.34	„	+13.42	− 1.19
+2.08	„	+2.05	„	+1.63	„	−0.73	„	+0.33	„	+15.60	+ 1.43
+2.02	„	+1.99	„	+1.57	„	−0.70	„	+0.31	„	+14.57	+ 0.47
+1.99	„	+1.95	„	+1.53	„	−0.69	„	+0.30	„	+17.85	+ 4.46
+1.94	„	+1.90	„	+1.48	„	−0.66	„	+0.29	„	+15.73	+ 2.82
+1.89	„	+1.85	„	+1.43	„	−0.64	„	+0.27	„	+11.49	− 0.97
+1.85	„	+1.81	„	+1.38	„	−0.62	„	+0.26	„	+12.97	+ 0.87
+1.82	„	+1.78	„	+1.35	„	−0.60	„	+0.25	„	+16.44	+ 4.68
+1.80	„	+1.76	„	+1.32	„	−0.59	„	+0.25	„	+10.08	− 1.56
+1.77	„	+1.73	„	+1.30	„	−0.58	„	+0.24	„	+13.51	+ 1.19
+1.75	„	+1.71	„	+1.27	„	−0.57	„	+0.24	„	+12.97	+ 1.77
+1.74	„	+1.69	„	+1.26	„	−0.56	„	+0.23	„	+ 9.37	− 1.70
+1.71	„	+1.67	„	+1.23	„	−0.55	„	+0.22	„	+10.37	− 0.50
+1.69	„	+1.65	„	+1.21	„	−0.54	„	+0.22	„	+12.71	+ 2.06

II. Waarnemingen vóór 't laatste contact. W.—B.

												″	″
+1.52	ΔR	+1.46	Δr	—0.99	$\Delta \alpha$ (—⊙	+0.49	$\Delta \delta$ (—⊙	+0.16	$\Delta \pi$ =	—	5.39	+	0.51
+1.57	„	+1.51	„	—1.05	„	+0.52	„	+0.18	„	—	5.30	+	0.97
+1.60	„	+1.55	„	—1.09	„	+0.53	„	+0.19	„	—	5.84	+	0.67
+1.61	„	+1.56	„	—1.10	„	+0.54	„	+0.19	„	—	7.39	—	0.76
+1.62	„	+1.57	„	—1.12	„	+0.55	„	+0.19	„	—	8.59	—	1.88
+1.64	„	+1.59	„	—1.14	„	+0.56	„	+0.20	„	—	8.19	—	1.31
+1.66	„	+1.62	„	—1.16	„	+0.57	„	+0.20	„	—	6.20	+	0.81
+1.71	„	+1.67	„	—1.23	„	+0.59	„	+0.22	„	[+	7.95]	—	
+1.74	„	+1.70	„	—1.25	„	+0.61	„	+0.22	„	—	2.58	+	4.99
+1.75	„	+1.71	„	—1.27	„	+0.62	„	+0.23	„	—	5.97	+	1.72
+1.78	„	+1.74	„	—1.30	„	+0.64	„	+0.24	„	—	7.71	+	0.22
+1.82	„	+1.78	„	—1.34	„	+0.66	„	+0.25	„	—	7.88	+	0.29
+1.85	„	+1.81	„	—1.38	„	+0.67	„	+0.25	„	—	8.47	—	0.07
+1.87	„	+1.83	„	—1.40	„	+0.68	„	+0.26	„	—	9.75	—	1.22
+1.91	„	+1.87	„	—1.44	„	+0.70	„	+0.27	„	—	8.05	+	0.78
+1.96	„	+1.93	„	—1.50	„	+0.73	„	+0.28	„	—	6.19	+	3.02
+2.00	„	+1.97	„	—1.54	„	+0.75	„	+0.29	„	—	7.13	+	2.15
+2.05	„	+2.02	„	—1.60	„	+0.78	„	+0.31	„	—	4.88	+	4.94
+2.10	„	+2 07	„	—1.64	„	+0.80	„	+0.32	„	—13.04		—	2.92
+2.14	„	+2.12	„	—1.69	„	+0.82	„	+0.33	„	—	9.47	+	0.96
+2.19	„	+2.16	„	—1.74	„	+0.85	„	+0.34	„	—12.56		—	1.80
+2.24	„	+2.21	„	—1.79	„	+0.87	„	+0.35	„	—11.04		+	0.04
+2 29	„	+2.26	„	—1.84	„	+0.89	„	+0.36	„	—10.50		+	0.87
+2.36	„	+2.34	„	—1.91	„	+0.93	„	+0.38	„	—	8.40	+	3.46
+2.46	„	+2.44	„	—2.01	„	+0.98	„	+0.40	„	—14.81		—	2.31
+2.53	„	+2.51	„	—2.08	„	+1.01	„	+0.42	„	—	9.40	+	3.53
+2.65	„	+2.63	„	—2.20	„	+1.06	„	+0.44	„	—11.28		+	2.38
+2.74	„	+2.72	„	—2.29	„	+1.11	„	+0.46	„	—14.62		—	0.37
+2.83	„	+2·81	„	—2.37	„	+1.15	„	+0.48	„	—12.33		+	2.47
+2.98	„	+2.96	„	—2.52	„	+1.22	„	+0.52	„	—16.88		—	1.15
+3.12	„	+3.10	„	—2.65	„	+1.28	„	+0.55	„	—15.37		+	1.38
+3.29	„	+3.27	„	—2.81	„	+1.36	„	+0.58	„	—18.89		—	1.29
+3.49	„	+3.48	„	—3.00	„	+1.45	„	+0.63	„	—19.50		—	1.52
+3.90	„	+3.89	„	—3.39	„	+1.64	„	+0.71	„	—18.51		+	2.74
+4.20	„	+4.19	„	—3.67	„	+1.77	„	+0.78	„	—26.71		—	3.86
+4.37	„	+4.34	„	—3.82	„	+1.85	„	+0.81	„	—38.87		—10.28	

Contact-vergelijkingen:

$I \quad \Delta R + \Delta r + 0.903\ \Delta\alpha_{(-\odot)} - 0.405\ \Delta\delta_{(-\odot)} = + \ 3''.78$

$II \quad \Delta R - \Delta r - 0.9668\ \Delta\alpha^{(\odot} - 0.2007\ \Delta\delta_{(-\odot)} +$
$+ 0.0004\ \Delta^2\alpha_{(-\odot)} - 0.0036\ \Delta\alpha\Delta\delta + 0.0091\ \Delta^2\delta_{(-\odot)} = - 6''.52$ [1])

$III \quad \Delta R - \Delta r + 0.3085\ \Delta\alpha_{(-\odot)} - 0\ 9489\ \Delta\delta_{(-\odot)} +$
$+ 0.0104\ \Delta^2\alpha_{(-\odot)} + 0.0068\ \Delta\alpha\Delta\delta + 0.0012\ \Delta^2\delta_{(-\odot)} = + 4''.02$

$IV \quad \Delta R + \Delta r - 0.889\ \Delta\alpha_{(-\odot)} + 0.435\ \Delta\delta_{(-\odot)} = - 11''.18$

Een enkele blik op de koorden-vergelijkingen leert, dat 't niet mogelijk is, daaruit alle onbekenden te bepalen. Tengevolge van de evenredigheid der coefficiënten kan men de eerste 25 vergelijkingen na het 1e contact vervangen door ééne enkele; evenzoo de 35 overige. Om 't gewicht der waarnemingen onmiddellijk na het eerste en vóór het laatste contact — wanneer de koorde minder scherp begrensd is en snel varieert — te verminderen, heb ik de beide normaalvergelijkingen niet gevormd volgens de methode der kleinste kwadraten, maar eenvoudig door optelling.

Wij schrijven ze in den vorm:

$68.1(\Delta R+\Delta r)+56.2\Delta\alpha-25\ 2\Delta\delta=+489''.46 - 0.35(\Delta R-\Delta r) - 12.9\Delta\pi$
$-81.6(\Delta R+\Delta r)+65.1\Delta\alpha-31.6\Delta\delta=+397''.87+0.24(\Delta R-\Delta r)+12.8\Delta\pi$

waaruit wij vinden:

$$\Delta R + \Delta r = + 1''.05 \ - 0.015\ \Delta\delta - 0.003\ (\Delta R - \Delta r) - 0.16\ \Delta\pi.$$
$$\Delta\alpha = + 7''.428 + 0.465\ \Delta\delta - 0.001\ (\Delta R - \Delta r) - 0.02\ \Delta\pi.$$

Verwaarloozen wij de laatste termen, dan vinden wij als resultaat uit de koordenvergelijkingen:

$$\Delta R + \Delta r = + 1''.05 \ - 0.015\ \Delta\delta_{(-\odot)}$$
$$\Delta\alpha_{(-\odot)} = + 7''.428 + 0.465\ \Delta\delta_{(-\odot)}.$$

Uit de vergelijkingen van het 2e en 3e contact vinden wij:

$$\Delta\alpha_{(-\odot)} = + 7''.793 + 0.464\ \Delta\delta_{(-\odot)}.$$
$$\Delta\alpha_{(-\odot)} = + 7''.13 + 0.667\ (\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\delta_{(-\odot)} = - 1''.43 + 1\ 437\ (\Delta R - \Delta r).$$

Eindelijk, de vergelijkingen van 't 1ste en 4de contact geven:

$$\Delta\alpha_{(-\odot)} = + 8''.35 + 0''.468\ \Delta\delta_{(-\odot)}$$
$$[\Delta R + \Delta r = - 3''.78]$$

Dit laatste resultaat voor $\Delta R + \Delta r$, dat geheel afwijkt van 't

[1]) Het is niet geoorloofd — zooals meestal geschiedt — bij de vergelijkingen van het tweede en derde contact de kwadratische termen te verwaarloozen, daar de correcties $\Delta\alpha$ en $\Delta\delta$ in vergelijking met den afstand van zon- en maancentrum (in casu 46′) te groot zijn.

boven gevondene, is weinig betrouwbaar. Het wordt volkomen verklaard door aan te nemen, dat 't eerste contact te laat, het laatste te vroeg is geobserveerd. Dat 't eerste contact te laat is genoteerd, is ternauwernood te betwijfelen, daar ik door het te vroeg intreden der zonsverduistering geheel verrast en overrompeld werd. Als bewijs dat 't laatste contact te vroeg is aangegeven dient eene momentopname der zon (diameter $= 10$ cm.) genomen op hetzelfde oogenblik waarop ik het „top"-teeken gaf. Daarop is werkelijk nog een kleine indeuking in den rand der zon te constateeren.

Ter vergelijking der verkregen uitkomsten hadden de Heeren Th. Wulf en J. D. Lucas de goedheid mij vrije beschikking te laten over het resultaat hunner hoogst interessante waarnemingen van het 2e en 3e contact, met behulp van lichtgevoelige selenium-elementen te Tortosa verkregen. (Men zie hierover Astron. Nachr. N°. 4071). Voor die momenten vonden zij:

Begin der totaliteit $1^u\ 16^m\ 15^s,6$
Einde „ „ 1 19 6 ,9.

Deze leveren de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta R - \Delta r - 0.9650\ \Delta\alpha_{(-\odot} - 0.2117\ \Delta\delta_{(-\odot} + 0.0004\ \Delta^2\alpha_{(-\odot} - \\ - 0.0039\ \Delta\alpha\ \Delta\delta + 0.0092\ \Delta^2\delta_{(-\odot} = -\ 5''.73 \\ \Delta R - \Delta r + 0.3063\ \Delta\alpha_{(-\odot} - 0.9493\ \Delta\delta_{(-\odot} + 0.0105\ \Delta^2\alpha_{(-\odot} + \\ + 0.0069\ \Delta\alpha\ \Delta\delta + 0.0012\ \Delta^2\delta_{(-\odot} = +\ 4''.10 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Waaruit wij vinden:

$$\Delta\alpha_{(-\odot} = +\ 6''.42 + 0.653\ (\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\delta_{(-\odot} = -\ 1''.76 + 1.404\ (\Delta R - \Delta r).$$

Trekt men de twee vergelijkingen A van elkaar af, dan vindt men:

$$\Delta\alpha_{(-\odot} = +\ 7''.238 + 0.465\ \Delta\delta_{(-\odot}$$

Dit is in uitmuntende overeenstemming met het resultaat der koorde-vergelijkingen $\Delta\alpha = +\ 7''.428 + 0.465\ \Delta\delta$; maar tevens blijkt dat 't niet mogelijk is uit de combinatie der contact- en koordevergelijkingen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ en $\Delta R - \Delta r$ afzonderlijk te bepalen.

Bij het afleiden van het eindresultaat is aan de uitkomst der koordemetingen en der contact-bepalingen Wulf—Lucas een gelijk gewicht $= 1$ gegeven, en aan mijne waarnemingen van het 2e en 3e contact het gewicht $\frac{1}{2}$. Zoo vinden wij, met terzijdelating van het eerste en vierde contact:

$$\Delta R + \Delta r = +\ 1''.07 - 0.02\ (\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\alpha_{(-\odot} = +\ 6''.66 + 0.66\ (\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\delta_{(-\odot} = -\ 1''.65 + 1.42\ (\Delta R - \Delta r).$$

De laatste kolom der koorde-vergelijkingen geeft de afwijkingen in den zin Waarn.-Berek., die overblijven, als men deze getalwaarden substitueert. De middelbare fout der eerste 25 waarnemingen (afgezien van de eerste) bedraagt $\pm 2''.53$; die der laatste 35 (afgezien van de laatste) is $\pm 2''.21$.

Voor de Boekerij worden aangeboden: 1°. door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatie van den Heer H. E. BOEKE: „De mengkristallen bij natrium-sulfaat, -molybdaat en -wolframaat", 2°. door den Heer ZWAARDEMAKER de dissertatiën van A. DEENIK: „Het onderscheidingsvermogen voor toonintensiteiten; D. J. A. VAN REEKUM: „Quantitatieve onderzoekingen over reflexen"; J. GEWIN: „De woelbewegingen van het hart".

De vergadering wordt gesloten.

(6 Juni, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 30 Juni 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 48.

Verslag van de Heeren WEBER, WIND en VAN DER STOK over een circulaire van den Directeur van het Oceanographisch Museum te Monaco, p. 49.

P. VAN ROMBURGH: „Over glyceryltriformiaat", p. 51.

P. VAN ROMBURGH en W. VAN DORSSEN: „Over eenige derivaten van het 1-3-5 hexatriëen", p. 54.

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Driephasenlijnen bij chloralalcoholaat en zoutzuuraniline", p. 58.

H. HAGA: „Over de polarisatie van Röntgenstralen", p. 64.

M. NIEUWENHUIS—VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND: „De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten". (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WENT), p. 69.

L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 75.

A. PANNEKOEK: „De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 94.

H. KAMERLINGH ONNES: „Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het Cryogeen Laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof", p. 109. (Met 3 platen). XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus, p. 124. (Met 1 plaat). XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van —252° tot —259° p. 126. (Met 1 plaat). XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het Caseadeproces, p. 130. (Met 1 plaat). XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distallatie van minder zuivere", p. 132.

H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer", p. 133.

H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficient van Jenaglas en van platina tusschen +16° en —182°, p. 151. XI. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den waterstofthermometer, p. 160. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer", p. 166

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 169.

Errata, p. 169.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE, KAMERLINGH ONNES, CARDINAAL en WENT dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 29 Juni 1906 met verzoek een onderzoek in te stellen omtrent de vraag, of ten aanzien van de inrichting der op het Rijks-Museum aangebrachte bliksemafleiders en de beproeving daarvan thans andere regels behooren te worden gesteld dan in de jaren 1887 en 1888 zijn aangegeven.

In handen gesteld van de Heeren LORENTZ, ONNES, HAGA en ZEEMAN om daarover advies uit te brengen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid d.d. 28 Juni 1906 waarbij bericht wordt dat er geene termen bestaan om aan het verzoek der Geologische Commissie te voldoen. In handen gesteld van de Geologische Commissie.

3°. Missive van den Ingenieur Directeur der Rijksopsporing van Delfstoffen waarin deze naar aanleiding van een vroeger schrijven dezer Afdeeling aan den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid verzoekt in nadere aanraking te komen met de Geologische Commissie, ten einde samenwerking te verkrijgen tusschen beide instellingen bij het onderzoek van den bodem van Nederland. Gesteld in handen der Geologische Commissie.

4°. Missive van den Heer P. DROSTE, namens administrateuren van het P. W. Korthals-fonds, waarbij bericht wordt dat dit jaar weder een som van *f* 600.— zal worden beschikbaar gesteld tot bevordering der kruidkunde. In handen gesteld van de botanische leden der Afdeeling.

5°. Brief van den Voorzitter van het Congrès international pour l'étude des régions polaires, in September a.s. te Brussel te houden, ter begeleiding van verschillende stukken op dat Congres betrekking hebbende en het verzoek bevattende dat de Akademie zich op dat Congres zal doen vertegenwoordigen.

In handen gesteld van de Heeren LELY en WEBER om daarover te dienen van advies.

6°. Brief van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, mededeelende dat de Keiz. Akademie van Wetenschappen te Tokio den wensch heeft te kennen gegeven als lid tot de Internationale Associatie van Akademiën toe te treden.

Hieromtrent zal in overleg met de Letterkundige Afdeeling beslist worden.

7°. Circulaire van het Zentralbureau der Internationalen Seismolo-

gischen Association bericht gevende dat het Bureau te Straatsburg thans geheel voor het doen van onderzoekingen ingericht is. Voor kennisgeving aangenomen.

8°. Circulaire van de University te Aberdeen bericht gevende dat de feestviering zal plaats vinden op Dinsdag 25 September a.s. en waarbij verzocht wordt den naam van den vertegenwoordiger der Akademie op te geven. Bericht is gezonden dat de Heer W. EINTHOVEN de Akademie zal vertegenwoordigen.

Oceanographie. — De Heer VAN DER STOK brengt het volgende verslag uit:

Bij schrijven van 29 Mei 1906, No. 27 is ondergeteekenden om praeadvies in handen gesteld eene missive van Dr. J. RICHARD, Directeur van het Musée océanographique te Monaco, waarin hij het voornemen te kennen geeft van den Vorst van Monaco, om een eerste internationaal oceanographisch congres bijeen te roepen op een later nader vast te stellen tijdstip. Voorloopig wordt slechts gevraagd instemming te betuigen met dit voornemen en eventueele opmerkingen, waartoe de circulaire aanleiding kan geven, mede te deelen.

Tot toelichting van het voorstel moge het volgende onder de aandacht der Akademie worden gebracht.

1. Het blijkt meer en meer, dat de problemen van geophysischen en geobiologischen aard in zulk een phase van ontwikkeling verkeeren, dat internationale samenwerking volstrekt noodzakelijk kan worden geacht voor het verzamelen van nauwkeuriger gegevens dan tot nog toe werden verkregen en voor de organisatie van waarnemingen op plaatsen en tijden, waarop langs toevalligen weg geen observaties kunnen worden verwacht.

Zoowel de voor dit doel aan te wenden methoden als de daarvoor noodzakelijke middelen liggen buiten het bereik van individueelen arbeid en zelfs van Instituten en Observatoria.

Alleen door internationale overeenkomst kunnen de methoden van onderzoek en waarneming, zooal niet gelijk, dan toch onderling vergelijkbaar worden en, vooral bij het aanvatten van nieuwe problemen, kan alleen onderling overleg leiden tot een rationeel gebruik van arbeid en geld.

Niet alleen voor het verkrijgen van nieuw materiaal, ook voor de bewerking van de oude, bij instellingen van verschillende nationaliteit opgestapelde, waarnemingen is internationaal overleg onmisbaar.

Mannen van initiatief, die tevens over ruime middelen kunnen beschikken, als de Vorst van Monaco, TEISSERENC DE BORT, LAWRENCE

Rotch e. a., hebben den weg gewezen, die gevolgd moet worden om de groote problemen der oceanische en atmosferische circulatie met kans op succes te kunnen aanvatten; op den duur echter kan het wetenschappelijk onderzoek niet afhankelijk zijn van dergelijke alleenstaande pogingen, en reeds hunne toewijding aan dezen pionierarbeid wijst er op, dat alleen van georganiseerde, algemeene samenwerking heil is te verwachten.

2. In de tweede plaats blijkt uit de geschiedenis van het geophysisch onderzoek der laatste jaren, dat de belangstelling in de daarbij op den voorgrond tredende problemen bij voortduring toeneemt, zoodat internationale samenwerking een dringende eisch wordt.

Wij kunnen volstaan met te wijzen op de door Hildebrandsson georganiseerde wolkenwaarnemingen over de geheele aarde, op het internationaal onderzoek der hoogere luchtlagen door middel van ballontochten, op de Noordpoolexpeditie in 1882—83, de antarktische expeditie in den laatsten tijd en op de Associatie voor de studie van aardbevingen, allen ondernemingen, waaraan internationaal overleg tot grondslag heeft gediend,

Het internationaal onderzoek der Noord- en Oost-zee eindelijk, aanvankelijk ondernomen met het oog op belangen van materieelen aard, waaraan negen belanghebbende Staten deelnemen, heeft tot zooveel nieuwe gezichtspunten en problemen geleid, dat hieruit duidelijk blijkt, dat dergelijke problemen alleen op groote schaal kunnen worden aangevat en behandeld.

3. In de derde plaats eindelijk spreken wij het gaarne als onze meening uit, dat niemand hiertoe beter het initiatief had kunnen nemen dan de Vorst van Monaco. Sedert een lange reeks van jaren heeft hij zijn talenten, zijn persoon en zijn middelen gewijd aan oceanographische studiën. De diepzeekaart der aarde, een model werk, tot stand gekomen door internationale coöperatie, heeft haar ontstaan te danken aan zijn initiatief en materieelen steun. Een omvangrijk werk over de resultaten zijner talrijke expeditie in den Atlantischen Oceaan, waarbij hem steeds een staf van geleerden van verschillende nationaliteiten ter zijde stond, wordt door hem uitgegeven. Hij heeft den stoot gegeven tot het houden van de Cours d'océanographie te Parijs en op zijn jacht zijn de bekende waarnemingen met vliegers verricht tot peiling van de hoogte der passaatwinden, ook is hij de stichter van het museum voor oceanographie, dat eerlang te Monaco zal worden geopend, en zeer onlangs heeft hij het voornemen te kennen gegeven een Instituut voor Oceanographie te Parijs te stichten.

Op grond van het medegedeelde waaruit blijken moge :

1°. dat internationale organisatie van den arbeid noodzakelijk is,

2°. dat het oogenblik om nu een congres te organiseeren, waar overleg kan worden gepleegd en vanwaar leiding kan uitgaan, gelukkig is gekozen, en

3°. dat de voorsteller de aangewezen persoon is om het voorgestelde plan te opperen en tot een goed einde te brengen,

meenen de ondergeteekenden, dat het voornemen van den Vorst van Monaco groote waardeering en krachtige aanbeveling verdient en dat het op den weg der Akademie ligt een blijk te geven van hare ingenomenheid met dit voornemen, onder mededeeling dat zij hoopt, dat, als het Congres in beginsel tot stand gekomen zal zijn, een of meerdere harer leden bereid zullen gevonden worden haar op het eerste internationaal congres voor Oceanographie te Monaco te vertegenwoordigen.

M. Weber
C. H. Wind.
J. P. van der Stok

De conclusie van het Verslag wordt goedgekeurd.

Scheikunde. — De Heer P. van Romburgh biedt eene mededeeling aan: *„Over glyceryltriformiaat"*.

Vele jaren geleden heb ik mij bezig gehouden met de studie van de inwerking van oxaalzuur op glycerine en toen aangetoond [1]), dat bij de bereiding van mierenzuur, volgens de methode van Lorin, als tusschenproduct een glyceryldiformiaat ontstaat. Tevens wendde ik toen reeds pogingen aan om het triformiaat, dat als eenvoudigste representant der klasse van vetten niet zonder belang scheen, te bereiden o. a. ook door het diformiaat met watervrij oxaalzuur te verhitten, wat mij destijds niet gelukte. Later heeft Lorin [2]) deze laatste proeven herhaald met zeer groote hoeveelheden watervrij oxaalzuur. Hij geeft op, dat inderdaad het mierenzuurgehalte stijgt, ten slotte tot 75%, zonder dat hij echter geslaagde pogingen vermeldt om het triformine af te scheiden.

Sinds mijne eerste onderzoekingen heb ik niet opgehouden te trachten mijn doel te bereiken. De opgaven van Lorin, dat men door gebruik te maken van zeer groote hoeveelheden watervrij oxaalzuur

[1]) Compt. Rend. **93**, (1881) 847.
[2]) „ „ **100**, (1885) 282.

het mierenzuurgehalte van het residu kan opvoeren, vond ik bevestigd en ik meende door een voortgezette inwerking ten slotte het gezochte product te kunnen verkrijgen. Herhaalde pogingen hebben echter niet de verwachte uitkomst gehad, al werd dan ook een glycerylformiaat met hoog mierenzuur gehalte gevormd, waaruit door gefractionneerde distillatie in vacuo een met nog enkele procenten diformiaat verontreinigd triformiaat verkregen kon worden.

Ik vermeld hier slechts een paar seriën proeven, die ik te Buitenzorg, eerst met medewerking van Dr. NANNINGA en later van Dr. LONG genomen heb. In de eerste werd een product verkregen dat bij 25° het S. G. 1.309 had en bij titratie 76.6% mierenzuur gaf, terwijl triformiaat 78.4% moet geven. Het tekort wijst nog op een gehalte van ruim 10% diformiaat in het verkregen product.

Bij de andere werd, gedurende een maand, het diformiaat dagelijks met een ruime hoeveelheid watervrij oxaalzuur behandeld, maar ook thans was het resultaat niet gunstiger.

De moeielijkheid om groote hoeveelheden geheel watervrij oxaalzuur te bereiden, gevoegd bij het feit, dat bij de reactie kooloxyde optreedt, waarmede eene vorming van water uit het mierenzuur gepaard moet gaan, geven wel eene voldoende verklaring er voor, dat de reactie niet geheel in den gewenschten zin verloopt. Eene volkomen scheiding van het di- en triformaat is, doordat de kookpunten van beide stoffen slechts weinig verschillen, ook in vacuo niet te verkrijgen.

Daarom nam ik mijn toevlucht tot de inwerking van watervrij mierenzuur op glyceryldiformiaat. Het watervrije mierenzuur bereidde ik door distillatie van geconcentreerd zuur met zwavelzuur in vacuo en daarop volgende behandeling met watervrij kopersulfaat. Ook nu gelukte het mij niet het triformiaat in volkomen zuiveren toestand te bereiden, steeds gaf het bij de titratie waarden, die op een gehalte van ongeveer 10% diformiaat wezen.

Later, toen het 100% mierenzuur een goedkoop te verkrijgen handelsproduct geworden was, heb ik die proeven op grootere schaal herhaald, maar al kon ik ook het gehalte aan diformiaat verminderen een zuiver triformiaat werd niet verkregen.

Herhaaldelijk had ik ook beproefd door afkoeling een gekristalliseerd product te verkrijgen, maar te vergeefs, totdat ik eindelijk, door een formiaat met hoog mierenzuurgehalte langen tijd in vloeibaar ammoniak af te koelen, zoo gelukkig was in de zeer dik vloeibare massa een klein kristal te zien ontstaan. Door de temperatuur langzaam te laten stijgen en tegelijkertijd met een glasstaaf de massa om te roeren gelukte het mij den inhoud van de afgekoelde buis bijna

geheel te doen vastworden. Zuigt men dan de kristallen bij 0° af, perst ze bij lage temperatuur tusschen papier en herhaalt men deze bewerkingen met de opnieuw gedeeltelijk gesmolten massa eenige malen dan verkrijgt men ten slotte een volkomen kleurloos, bij 18° smeltend product, waarin bij titratie het voor glyceryltriformiaat vereischte mierenzuurgehalte gevonden werd.

Het. S. G. van het gesmolten product bij 18° is 1.320.

$$n_{18}^{d} = 1.4412$$

MR. gev. 35.22, ber. 35.32.

Ook het zuivere product, eenmaal gesmolten, wordt bij afkoeling zeer moeielijk vast, tenzij men het met een spoor van het gekristalliseerde ent. Bij snelle kristallisatie verkrijgt men naalden, bij langzame groote, compacte kristallen.

In vacuo laat het triformiaat zich onveranderd distilleeren; het kookpunt ligt bij 38^{mm} bij 163°. Bij snelle distillatie onder de gewone luchtdrukking ondergaat het slechts zeer geringe ontleding. Het kookpunt ligt dan bij 266°. Een met diformiaat verontreinigd product daarentegen laat zich onder die omstandigheden niet distilleeren, maar wordt onder ontwikkeling van koolzuur- en kooloxydegas en vorming van allylformiaat ontleed.

Verhit men het triformiaat langzaam, dan neemt men bij 210° eene duidelijke gasontwikkeling waar; om deze in gang te houden moet de temperatuur echter geleidelijk stijgen. Het ontwikkelde gas bestaat uit ongeveer gelijke volumina koolmono- en dioxyde. Het distillaat bevat eenig mierenzuur, als hoofdproduct allylformiaat en verder geringe hoeveelheden allylalkohol; in de kolf blijft een weinig glycerine achter [1]).

Het glyceryltriformiaat wordt door water, waarin het onoplosbaar is, in de koude slechts langzaam verzeept, met warm water heeft de verzeeping snel plaats.

Ammoniak werkt er op in onder vorming van glycerine en formamide. Met aminen ontstaan de gesubstitueerde formamiden, zooals ik vroeger reeds mededeelde [2]).

De beschreven eigenschappen doen zien, dat het glycerylformiaat, het eenvoudigste „vet", in zijne eigenschappen aanzienlijk verschilt van de triglycerylesters van de hoogere vetzuren.

---

[1]) Deze ontleding van het triformiaat heeft o. m. er aanleiding toe gegeven het gedrag van de formiaten van verschillende glycolen en meerwaardige alkoholen bij verhitting te bestudeeren. Onderzoekingen daarvoor zijn reeds geruimen tijd hier in het laboratorium in gang.

[2]) Zittingsverslag 30 Sept. 1905.

Scheikunde. — De Heer P. VAN ROMBURGH doet, ook uit naam van den Heer W. VAN DORSSEN eene mededeeling: *„Over eenige derivaten van het* 1-3-5-*hexatriëen"*.

In de Vergadering van 30 Dec. 1905 is medegedeeld, dat wij door verhitting van het diformiaat van s. divinylglycol er in geslaagd waren een koolwaterstof van de samenstelling C_6H_8 te bereiden waaraan wij de formule:

$$CH_2 = CH - CH = CH - CH = CH_2$$

gaven.

Sinds is deze koolwaterstof in eenigszins grootere hoeveelheid bereid geworden en konden 50 gram in een kolf van LADENBURG, na herhaaldelijke distillatie over natrium, in een koolzuuratmosfeer gefractioneerd worden.

De hoofdmassa kookte thans van 77°—78°.5 (gecorr.; bar. 764,4 mm.)

$$\text{Sp. Gew.}_{13.5} \quad 0.7498$$

$$n_{D\,13.5} \quad 1.4884.$$

Ook nu was er een geringe hoeveelheid af te scheiden van een product met hooger soortelijk gewicht en grooteren brekingsindex.

In de eerste plaats werd de inwerking van broom op de koolwaterstof nader bestudeerd.

Laat men bij de met chloroform verdunde koolwaterstof, bij — 10°, onder sterk roeren met een roerder van WITT, eene oplossing van broom in hetzelfde oplosmiddel druppelen dan wordt het broom onmiddellijk geaddeerd en zoodra er één molecuul opgenomen is kleurt de vloeistof zich bij verdere toevoeging geel. Staakt men, zoodra dat punt bereikt is, het toedruppelen en distilleert men de chloroform in vacuo af dan houdt men een gekristalliseerd product over, gedrenkt met vrij veel van een olieachtige stof. Door afpersen en omkristalliseeren uit laag kokenden petroleumaether, verkrijgt men fraaie, kleurlooze kristallen, die bij 85°.5—86° scherp smelten. [1])

Eene broombepaling volgens LIEBIG gaf 66.84%, een dibromide $C_6H_8Br_2$ vereischt 66.65%.

Een tweede broomadditieproduct, en wel een tetrabromide, werd verkregen door inwerking van broom in chloroform, bij 0°, in 't zonlicht; tegen het eind wordt het broom slechts langzaam opgenomen. Ook nu wordt de chloroform in vacuo verwijderd, waarna men het gevormde product uit methylalkohol omkristalliseert. Het smeltpunt

[1]) In de vorige voorloopige mededeeling is abusievelijk 89°—90° vermeld.

ligt bij 114°—115° en verandert bij omkristalliseeren niet. De analyse toonde aan dat er 4 atomen broom zijn opgenomen.

Analyse: Br. Gev. 80.2% Ber. v. $C_6H_8Br_4$ 79.99%.

Een derde broomadditieproduct werd het eerst gevonden in het broom, dat bij de bereiding van de koolwaterstof gebruikt was om het door de ontwijkende gassen medegevoerde hexatriëen tegen te houden. Later werd het bereid door bij de met één vol. chloroform verdunde koolwaterstof, bij 0°,3 mol. broom te voegen en het mengsel gedurende 8 u. op 60° te verhitten. De reactie is dan nog niet afgeloopen en men verkrijgt een mengsel van tetra- en hexabromide waaruit met behulp van aethylacetaat het laatste, als een bij 163°.5—164° smeltende stof, verkregen kan worden.

Analyse: Br. Gev. 85.76%. Ber. v. $C_6H_8Br_6$ 85.71%.

Het beschreven *dibromide* bleek bij nader onderzoek identisch te zijn met een door GRINER [1]) uit s. divinylglycol met phosphortribromide verkregen bromide, waarvoor hij het smeltpunt 84.°5—85° opgeeft. Een volgens GRINER bereid product smolt bij 85°.5—86° en gaf met het uit de koolwaterstof bereide dibroomadditieproduct geen smeltpuntsverlaging.

GRINER (loc. cit.) verkreeg door additie van broom aan het dibromidē uit het glycol bereid, een tetrabromide $C_6H_8Br_4$, dat bij 112° smolt, benevens een bij 108°—109° smeltend product, hetwelk hij voor een geometrisch isomeer houdt. Bij het bereiden van het tetrabromide volgens GRINER, werd slechts het bij 112° smeltende product verkregen [2]), dat identisch bleek met het hierboven beschreven, uit de koolwaterstof bereide tetrabroomadditieproduct. Een mengsel toch der beide bromiden vertoonde hetzelfde smeltpunt als de beide stoffen afzonderlijk.

Voortgezette inwerking van broom op het tetrabromide volgens GRINER gaf ons eindelijk het bij 163°—164° smeltend hexabromide, identisch met het uit de koolwaterstof bereide.

Door de beschreven broomderivaten is het dus nu, in verband met de resultaten van GRINER, wel uiterst waarschijnlijk, dat de door ons verkregen koolwaterstof inderdaad de boven opgestelde formule heeft.

Volgens de beschouwingen van THIELE over geconjugeerde dubbele bindingen zou men bij de additie van 2 atomen broom aan ons hexatriëen het ontstaan van een stof met de formule:

---

[1]) Ann. chim. phys. [6] 26. (1892) 381.

[2]) Onderzoekingen op grootere schaal zullen moeten uitmaken of er werkelijk als bijproduct een bij 108° smeltend isomeer optreedt, dat dan slechts een zeer geringen invloed op het smeltpunt van het andere product schijnt te hebben,

$$CH_2Br - CH = CH - CH = CH - CH_2Br \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan wel:

$$CH_2Br - CH = CH - CHBr - CH = CH_2. \quad . \quad . \quad (2)$$

hebben kunnen verwachten, uit welke laatste stof dan door opnieuw addeeren van twee broomatomen het tetrabromide:

$$CH_2Br - CHBr - HC = CH - CHBr - CHBr \quad . \quad . \quad (3)$$

gevormd zou worden

Daar echter het verkregen gekristalliseerde dibromide identisch is met het uit s. divinylglycol bereide waaraan men op grond van de vormingswijze de formule

$$CH_2 = CH - CHBr - CHBr - CH = CH_2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

moet toekennen (tenzij, wat in verband met waargenomen feiten à priori niet geheel onwaarschijnlijk geacht kan worden, er, door intramoleculaire atoomverschuiving, inderdaad een bromide van de formule (1) of (2) ontstaan zou zijn) zou in dit geval van twee geconjugeerde systemen de regel van THIELE niet opgaan.

Proeven om uit het gekristalliseerde dibromide het glycol te regenereeren hebben nog niet tot afdoende resultaten gevoerd, zoodat het laatste woord in dit vraagstuk nog niet gesproken is. Het onderzoek ook der vloeibare bromiden wordt echter voortgezet.

Merkwaardig blijft het intusschen, dat bij een stof als dit hexatriëen, hetwelk toch driemaal de dubbele binding bevat, slechts de additie van het eerste molecuul broom gemakkelijk gaat.

Volgens de methode van SABATIER en SENDERENS gelukt het gemakkelijk het hexatriëen 6 atomen waterstof te doen addeeren. Leidt men den damp ervan met waterstof, bij 125°—130°, over bij lage temperatuur gereduceerd nikkel, dan wordt de waterstof gretig opgenomen en men verkrijgt een lager kokend product, dat evenwel nog geringe hoeveelheden van onverzadigde verbindingen (misschien ook cyclische) bevat. Ter verwijdering van deze werd het product met broom behandeld en, na verwijdering van de overmaat en verdere reiniging, gefractioneerd. Als hoofdfractie werd verkregen een bij 68°,5—69°,5 kokende vloeistof (Bar. 759.7).

$$SG_{12°} = 0{,}6907 \qquad n_{d_{12°}} = 1.3919$$

Hoewel het kookpunt met dat van het verwachte hexaan overeenstemt, verschillen de voor het spec. gewicht en de refractie gevonden waarden nog te veel van de door BRÜHL en door EYKMAN voor hexaan gevondene [1]).

---

[1]) BRÜHL (B. B. **27**. (1894) 1066) vindt $SG_{20} = 0.6603$, $n^{d_{20}} = 1.3734$.; EYKMAN (R. **14**, (1881) 187) $SG_{14} = 0.6652$ $n^{d_{14}} = 1.37725$.

Daarom werd het uit hexatriëen verkregen product eenigen tijd met telkens ververscht rookend zwavelzuur geschud, totdat dit zich niet meer kleurde. Na deze behandeling werd verkregen:
een fractie van

Kpt. 69°—70° SG_{14}. 0,6718 $n_{d_{14}}$ 1.38250

en eene van

Kpt. 69°.7—70°.5 SG_{14} 0.6720 $n_{d_{14}}$ 1.38239

Een in het laboratorium door den Heer SCHERINGA, pharm. stud., volgens BRÜHL [1]) bereid n. hexaan gaf de volgende waarden

Kpt 69° SG_{14} = 0.664 $n_{d_{14}}$ = 1.3792

terwijl een uit diallyl, volgens de methode van SABATIER en SENDERENS door den Heer SINNIGE, chem. cand., verkregen n. hexaan

Kpt 68°.5—70° SG_{10} 0. 6716 en $n_{d_{10}}$ = 1.38211 gaf.

Het schijnt dus, dat het volgens de methode van SABATIER en SENDERENS verkregen hexaan nog geringe hoeveelheden van bijmengsels bevat.

Toch kan er wel geen twijfel bestaan of het 1-3-5-hexatriëen neemt 6 atomen waterstof op onder vorming van normaal hexaan.

Van grooter belang voor de kennis der nieuwe koolwaterstof kan echter de reductie met behulp van natrium en absoluten alkohol geacht worden. Zijn in 't algemeen onverzadigde koolwaterstoffen niet geschikt om onder genoemde omstandigheden waterstof op te nemen, anders wordt dit wanneer er een geconjugeerd systeem in aanwezig is. In het 1-3-5-hexatriëen nu vindt men twee geconjugeerde systemen. Men zou nu kunnen verwachten bijv. het optreden van een 2-4 hexadiëen:

$$CH_3—CH=CH—CH=CH—CH_3$$

dan wel van een 2-5 hexadiëen:

$$CH_3—CH=CH—CH_2—CH=CH_2$$

Het eerste kan, daar het nog een geconjugeerd systeem heeft, opnieuw twee atomen waterstof opnemen en dan

$$CH_3—CH_2—CH=CH—CH_2—CH_3,$$

hexeen-3, geven terwijl het andere niet verder gehydreerd zal worden [2]). De verkregen resultaten schijnen er op te wijzen dat inderdaad beide reacties naast elkaar verloopen zijn en het eindproduct der hydreering een mengsel van hexadieen met hexeen is.

10 Gram 1-3-5 hexatriëen werden met 100 gr. kokenden absoluten alkohol en 15 gram natrium behandeld. Nadat het natrium opgelost

[1]) Ann. **200**. (1880) 183.

[2]) Indien er $CH_2=CH—CH_2—CH_2—CH=CH_2$ mocht ontstaan, zal dit evenmin gemakkelijk meer waterstof opnemen.

was werd stoom doorgevoerd, waardoor de gevormde koolwaterstof, met een weinig alkohol er bij, gemakkelijk afgescheiden kon worden. Na redistillatie werd de koolwaterstof met water gewasschen, met chloorcalcium gedroogd en dan over natrium gedistilleerd.

Bij 75°.5 begon zij te koken, dan steeg de temperatuur langzaam tot 81°.

In twee fracties werd de vloeistof opgevangen.

fractie I. Kpt. 75.°5—78° $S.G.^{10}$ 0.7326. $n_{d_{10}} = 1.4532$
„ II. „ 78° —79.°5 „ — „ 1.4665

Dan werden deze fracties weer vereenigd en opnieuw met natrium en alcohol behandeld. Na reiniging en droging werd ook nu geen constant kokende vloeistof verkregen. Zij begon nu bij 72°5 te koken, terwijl de temperatuur opliep tot 80°. De hoofdfractie had de volgende constanten:

Kpt. 72.°5—74° $S.G._{12}$ 0.7146 $n_{d_{12}}$ 1.4205

De fractie 75°—80° had $n_{d_{12}} = 1.4351$.

Eene elementair analyse der van 72°.5—74° kokende fractie gaf de volgende uitkomst: C 87.06. H 13.32.

Berekend voor C_6H_{10} C 87.7 H 12.3
„ „ C_6H_{12} C 85.6 H 14.4

De onderzochte fractie bestaat dus zeer waarschijnlijk uit een mengsel van C_6H_{10} en C_6H_{12}. De hoeveelheid, die wij onder handen hadden, was onvoldoende om eene verdere scheiding te kunnen uitvoeren. Wij hopen in staat te zijn deze proeven op grootere schaal te herhalen, zoodra wij weer over eene ruimere hoeveelheid van het zoo kostbare uitgangsmateriaal beschikken.

Utrecht, Org. Chem. Lab. d. Univ.

Scheikunde. — De Heer Bakhuis Roozeboom, doet eene mededeeling over: *„Driephasenlijnen bij choralalcoholaat en zoutzuuraniline"*.

Het is nu 20 jaren geleden dat de studie der dissociatie-verschijnselen bij verschillende vaste verbindingen van water en gassen mij langs experimenteelen weg de eigenaardige gedaante deed vinden van die driephasenlijn, welke het verband tusschen temperatuur en druk aangeeft voor binaire mengsels waarin eene vaste verbinding naast oplossing en damp voorkomt. De algemeene beteekenis dier lijn werd langs thermodynamischen weg door van der Waals afgeleid, en de veelvuldigheid van haar optreden werd later door de studie van velerlei andere stelsels bewezen.

Dat men praktisch bij de studie van dissociabele verbindingen zoo veelvuldig met deze driephasenlijn te maken heeft, ligt aan de omstandigheid, dat in een overgroot aantal der meest voor de hand liggende gevallen de vluchtigheid der beide componenten, of van een van beide zoo klein is, dat zelfs bij geringe dissociatie der verbinding onmiddellijk naast deze zoowel damp als vloeistof optreedt.

Bij de latere onderzoekingen, die geleid hebben tot een meer volledig overzicht van de velerlei evenwichtstoestanden die tusschen vaste vloeibare en gasvormige phasen in allerlei conbinatie mogelijk zijn, zijn de drukmetingen meer op den achtergrond geraakt. Naarmate echter het overzicht omtrent den samenhang aller dezer evenwichten bij binaire mengsels hare voltooiing naderde en in een ruimtevoorstelling op 3 assen van concentratie, temperatuur en druk kon worden overzien, ontstond de behoefte om voor sommige evenwichten zoowel theoretisch als experimenteel het verband tusschen temperatuur en druk nog nader vast te stellen en de daarin overgebleven leemten aan te vullen.

Zoo is in den laatsten tijd door verschillende beschouwingen van VAN DER WAALS, SMITS en mijzelf hetzij qualitatief hetzij qualitatief-quantitatief het beloop en het verband van meerdere p,t-lijnen op nieuw nagegaan.

Tot de lijnen, die vroeger nagenoeg niet bestudeerd waren, behoorden de evenwichtslijnen die doorloopen worden, wanneer men bij constant volume de vaste verbinding naast enkel damp aan temperatuurverandering bloot stelt. Experimenteel zijn deze alleen dan gemakkelijk te bepalen, wanneer de vluchtigheid van de minst vluchtige component niet te gering is. STORTENBEKER deed er indertijd eene poging toe bij zijn onderzoek over de verbindingen van chloor en iodium; doch slaagde er niet in hiervoor goede gegevens te krijgen.

In de tweede plaats was het wenschelijk eenige experimenteele bevestiging te vinden voor den eigenaardigen vorm der driephasenlijn eener verbinding, welke door SMITS onlangs werd afgeleid voor het geval, dat in den druk der vloeibare mengsels harer componenten een minimum voorkomt.

Het is nu den heer LEOPOLD gelukt voor beide vraagpunten te gelijker tijd experimenteele bijdragen te vinden bij eene serie van zeer nauwgezet uitgevoerde onderzoekingen, waarbij als vaste verbindingen optreden chloralalcoholaat en zoutzuuraniline.

Vaste verbindingen die twee merkbaar vluchtige bestanddeelen leveren (als PCl_5, $NH_3.H_2S$, $PH_3.HCl$, $CO_2.2\,NH_3$ enz.) zijn vroeger wel onderzocht, maar hetzij alleen op hun dissociatietoestand in gasvorm, hetzij op het evenwicht van vast naast gasmengsels van

verschillende verhouding bij constante temperatuur; maar vloeistoffen treden daarbij eerst bij hooge drukken op, zoodat het beloop der driephasenlijnen nimmer bestudeerd was.

De beide verbindingen werden derhalve zoo gekozen, dat in hunne smeltpunten temperatuur noch druk te hoog waren. Voorts was het verschil in vluchtigheid der twee componenten bij het eerste voorbeeld, chloral + alcohol, veel kleiner dan bij het tweede, anilin + chloorwaterstof. Verder was uit de gegevens omtrent beide verbindingen met vrij groote zekerheid af te leiden dat de vloeibare mengsels hunner componenten een minimumdruk zouden vertoonen.

Dit laatste punt werd allereerst nagegaan door bepaling der kooklijnen, waarin dan omgekeerd een maximum moet voorkomen. In beide gevallen bleek dit te bestaan en gelegen te zijn aan de zijde der minst vluchtige component, in casu chloral of aniline.

Het onderzoek der driephasenlijnen toonde nu allereerst dat deze den verwachten vorm bezitten, waarin namelijk twee maxima en een minimum van druk optreden.

In het eerste stelsel (Fig. 1) is CFD de driephasenlijn en zijn T en T_2 de maxima respectievelijk voor den dampdruk van oplossingen

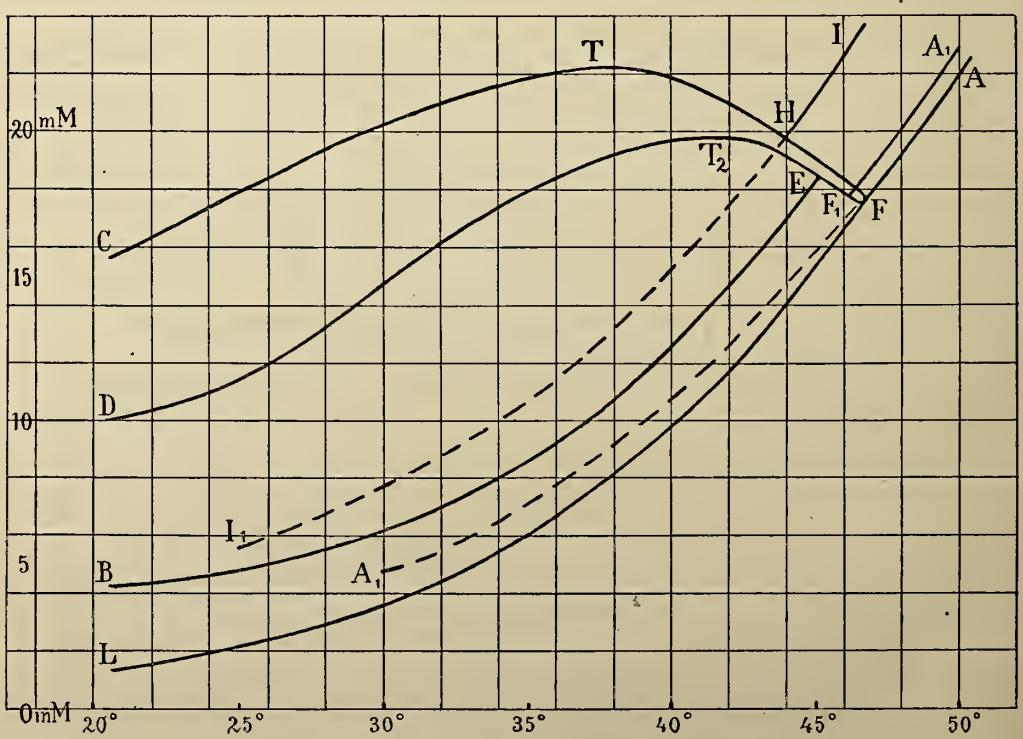


Fig. 1.

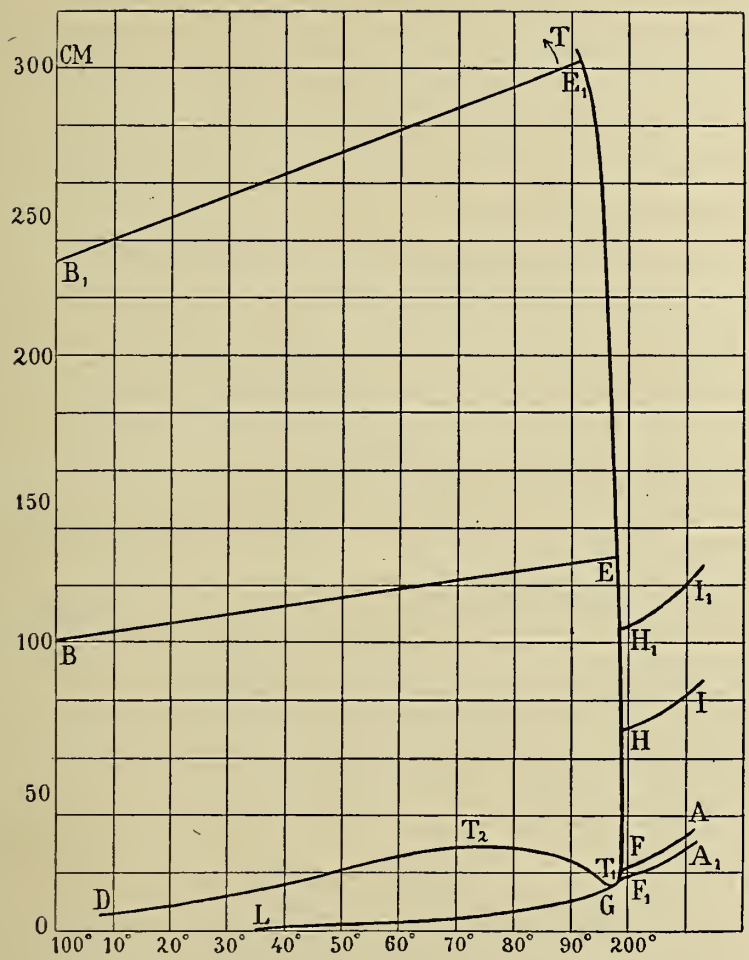


Fig. 2.

met overmaat van alcohol of chloral en verzadigd met chloralalcoholaat, en ligt het minimum zeer dicht bij het smeltpunt F.

In het tweede stelsel (zoutzuuraniline Fig. 2) ligt het 1e maximum, bij overmaat van HCl, bij zoo hoogen druk dat deze niet nader bepaald is, het tweede T_2 aan den anilinekant daarentegen bij matigen druk en is het minimum T_1 aan dezelfde zijde gelegen en verder van het smeltpunt verwijderd dan in Fig. 1.

	T_1 minimum	F smeltpunt
p	16 cM.	22.5 cM.
t	197°	199°2

De bepaling dezer lijnen en evenzoo die der evenwichtslijnen voor verbinding + damp of vloeistof + damp, welke in beide figuren nog voorkomen, kan alleen geschieden ter eene of ter andere zijde van

het punt F, omdat men natuurlijk in het apparaat voor het meten der drukkingen nooit anders dan grooter of kleiner overmaat van de eene of van de andere component kan hebben. Daarnaast is het mogelijk het apparaat te vullen met de verbinding in drogen zuiveren staat. Bij de gebezigde verbindingen werd dit bereikt, door zeer zuivere kristallen langs den weg van herhaalde sublimatie in het luchtledige te bereiden.

In het tweede voorbeeld gelukte het daarmee de sublimatielijn van zoutzuuraniline LG te bepalen. Op deze lijn volgt dan het stuk GF der driephasenlijn, omdat voorbij G geen damp meer mogelijk is van dezelfde samenstelling als de verbinding, maar alleen met eenigen overmaat aan HCl, en daardoor eenige vloeistof ontstaat met eenigen overmaat aan aniline. Is de toestel echter goed gevuld met de verbinding, zoodat er weinig volume voor den damp overblijft, dan zal men de driephasenlijn G tot zeer nabij het smeltpunt afloopen, om bij F over te gaan op de lijn FA voor het evenwicht der gesmolten verbinding met haar damp.

Wij hebben hier dus de eerste experimenteele bevestiging van de normale opeenvolging der p_1t-lijnen wanneer men die bepaalt met eene zuivere verbinding die min of meer dissocieert.

Theoretisch moet het minimum T_1 in de driephasenlijn ter linkerzijde van het eindpunt G der sublimatielijn liggen. Het verschil is hier wel gering, doch toch nog volkomen zeker:

	T_1	G
p	16 cM.	16.5 cM,
t	197°	198°

Bij het chloralalcoholaat vallen de punten T_1 en G beide zoo nabij samen met F, dat dit punt praktisch niet te onderscheiden is van het tripelpunt eener niet dissocieerende verbinding, maar LF en FA of haar metastabiel verlengde FA' elkander in F schijnen te snijden. Trouwens bewees het onderzoek der smeltlijn dat het chloralalcoholaat in gesmolten toestand zeer weinig gedissocieerd is.

Bij beide verbindingen zijn voorts de p, t-lijnen bepaald bij overmaat aan chloral of aan aniline. Een zeer kleine overmaat daarvan is reeds voldoende om bij temperaturen ver beneden het smeltpunt nog vloeistof naast de verbinding aanwezig te doen zijn en men beweegt zich dan op den laagsten tak der driephasenlijn. In Fig. 1 werd deze bij een geringen overmaat aan chloral van D over T_2 tot F_1 doorloopen, slechts even beneden het smeltpunt en ging men van daar op de vloeistof-gaslijn F_1A_1 over, welke een weinig boven FA gelegen was.

In Fig. 2 kon bij geringen overmaat aan aniline het stuk $DT_2T_1GF_1$

doorloopen worden. Hierin kwam het minimum T_1 voor, terwijl het stuk GF_1 geheel samenviel met het correspondeerende deel van GF, dat reeds in de proef met de zuivere verbinding bepaald was. Even beneden F was de verbinding geheel verdwenen en ging men op de vloeistof-gaslijn F_1A_1 over, welke hier in onderscheid met Fig. 1 beneden FA gelegen was.

Is de overmaat der component zeer gering, dan treedt vloeistof eerst bij hoogere temperaturen der driephasenlijn op en wordt beneden deze temperatuur eene sublimatielijn bepaald bij overmaat van de componente in den damp; welke lijn dus hooger moet liggen dan de zuivere sublimatielijn.

Zoo werd bij chloralalcoholaat eene dergelijke lijn BE (Fig. 1) bepaald, merkbaar boven LF gelegen. Bij E trad vloeistof op en werd nu een stuk der driephasenlijn EF tot een punt zoo nabij F afgeloopen, dat de vloeistofgaslijn die daarna gevolgd werd bijna niet boven FA lag.

De overmaat van chloral was dus uiterst klein; in weerwil daarvan lag BE zeer duidelijk boven LF. De plaats van BE hangt in hooge mate af van het gasvolume boven de vaste verbinding, daar dit den overdruk bepaalt van den overmaat der component die hierin geheel vervat is, zoolang er geen vloeistof optreedt. Het bleek dan ook uiterst moeielijk chloralalcoholaat zoo zuiver te maken, dat dit de laagst denkbare sublimatielijn LF vertoonde die in F aan de driephasenlijn raakt.

Bij mengsels met overmaat van alcohol kunnen dergelijke sublimatielijnen eveneens voorkomen. Ook hier behoeft echter de overmaat van alcohol slechts zeer klein te zijn om zelfs bij lage temperaturen vloeistof te behouden en dus den tak CTF der driephasenlijn te bekomen. Zulks geschiedt bijv. steeds wanneer men kristallen der verbinding bezigt die uit overmaat alcohol gekristalliseerd zijn. Er zit dan reeds genoeg moederloog in.

Men verkrijgt dan het eigenaardige verschijnsel, dat de verbinding schijnbaar geheel vast is tot nabij het smeltpunt en vindt voor den dampdruk de kromme CTF, terwijl de oversmolten vloeistof de dampdruklijn FA_1 geeft, welke veel lager ligt. Ramsay heeft dit vroeger reeds geconstateerd, zonder eene verklaring te kunnen vinden, daar de ligging van de driephasenlijn toenmaals onbekend was.

Bij het zoutzuuraniline was het wegens de groote vluchtigheid van het HCl niet moeilijk bij overmaat van deze componente sublimatielijnen te bepalen. In Fig. 2 zijn twee dergelijke lijnen bepaald BE en B_1E_1. Van E_1 af werd de driephasenlijn over het stuk E_1H_1 gevolgd, daarna de vloeistof-gaslijn H_1I_1. Van E evenzoo achter-

eenvolgens *EH* en *HI*. Bij nog geringer overmaat van HCl zou men op de driephasenlijn nog dichter bij *F* geëindigd zijn.

Bij het chloralalcoholaat vertoonde zich voorts nog het verschijnsel dat eene vaste stof die zich na smelting dissocieert bij niet te langzame verwarming tot boven haar smeltpunt kan verhit worden, een geval dat onlangs bij de smelting van gecompliceerde silicaten door DAY en ALLEN is waargenomen maar ook bij het eenvoudig samengestelde chloralhydraat reeds was gevonden.

Een voorbeeld van het derde type van driephasenlijn, waarbij het maximum en minimum in den benedensten tak der driephasenlijn zijn verdwenen is tot nu toe niet gevonden.

De beide thans gevonden typen zullen zich echter veelvuldig vertoonen bij andere dissociabele verbindingen zooals de bovengenoemde en stellen dus in staat het algemeene gedrag zulker stoffen beter dan tot dusver te overzien.

Natuurkunde. — De Heer HAGA doet eene mededeeling: *„Over de polarisatie van Röntgenstralen"*.

In de Phil. Trans. Royal Soc. of London vol. 204, p. 467, 1905 deelt BARKLA zijne proeven mede, waardoor hij meent aangetoond te hebben dat de stralen, door een RÖNTGEN-buis uitgezonden, gedeeltelijk gepolariseerd zijn, in overeenstemming met hetgeen uit de wijze van ontstaan dezer stralen door BLONDLOT was voorspeld.

Bij deze proeven onderzocht BARKLA de secundaire stralen, door lucht of door vaste lichamen: papier, aluminium, koper, tin, uitgezonden, door de ontladingssnelheid van geladen electroskopen te meten; hij vond in 2 richtingen loodrecht op elkaar, beide tevens loodrecht op de richting der opvallende primaire stralen, een maximum- en minimumwerking voor de secundaire stralen door lucht, papier en aluminium uitgezonden, het verschil bedroeg tot 20%.

Op eenigszins andere wijze had ik getracht dezelfde zaak te onderzoeken: een bundel RÖNTGEN-stralen werd volgens de as van een buis gezonden zonder de buiswand te raken; tegen de binnenwand werd een cilindervormig gebogen photografische film aangebracht, om na te gaan of de, door de luchtdeeltjes secundair uitgestraalde, stralen in de een of de andere richting een grootere werking vertoonden. Toen BARKLA, wien ik het negatieve resultaat mijner proeven mededeelde, mij wees op kool als een zeer sterke uitstraler voor secundaire stralen werd de volgende inrichting getroffen.

S_1 (fig. 1) stelle de voorwand van een dikwandige looden kast, waarin de RÖNTGEN-buis geplaatst is, voor; S_2 en S_3 4 mM. dikke geelkoperen platen van 10×10 cM., op 15 cM. van elkander, onwrikbaar op de

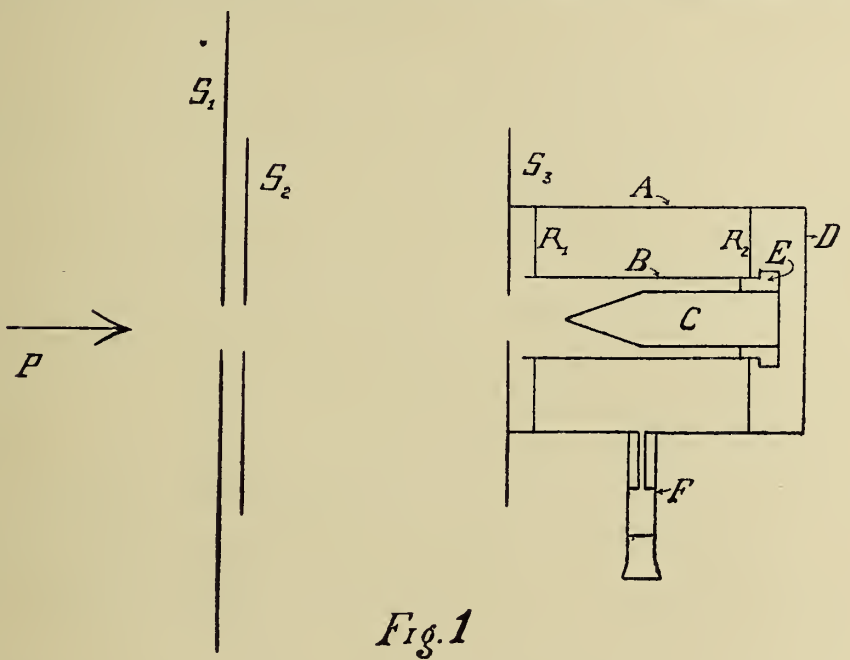


Fig. 1

bovenzijde van een ijzeren balk bevestigd. In het midden dezer platen zijn openingen van 12 mM. diameter; tegen de achterzijde van S_3 is een metalen cilinder A bevestigd, waarin een koperen buis B_1 voorzien van twee ringen R_1 en R_2, goed gecentreerd geschoven kan worden [1]).

In de buis B past een ebonieten dop E waarin een 6 cM. lange koolstaaf van 14 mM. diameter bevestigd is; het voorste einde van deze staaf is over een lengte van twee cM. kegelvormig afgedraaid. De opening in S_3 was door een schijf zwart papier bedekt; de achterkant van A was afgesloten door een afschroefbaar metalen deksel D.

De afmetingen waren zoodanig gekozen dat de grens van den door de openingen in S_1, S_2 en S_3 doorgelaten RÖNTGEN-stralenbundel tusschen de buitenkant van de koolstaaf en de binnenzijde van de buis B gelegen was. Een photografische film tegen de binnenzijde van B was dus beschermd tegen direkte RÖNTGEN-stralen.

Neemt men BARKLA's onderstelling aangaande het ontstaan van secundaire stralen in lichamen met een klein atoomgewicht aan, dan zou, indien de RÖNTGEN-stralen geheel of gedeeltelijk gepolariseerd waren,

[1]) Figg. 1 en 2 zijn op ongeveer de helft der ware grootte.

bij volkomen samenvallen van de as van den stralenbundel met de as van de koolstaaf op twee *diametraal* gelegen deelen van de film maxima, en juist tusschen deze, minima moeten ontstaan, terwijl uit de richting van de as der kathodestralen de plaats der maxima en minima is af te leiden.

Er bleek een zeer gemakkelijk middel te zijn om te constateeren of de stralenbundel al dan niet symmetrisch de buis *B* doorliep. Plaatst men nl. in de binnenkant van het deksel *D* een photografische plaat of film, die dus loodrecht staat op de as van de koolstaaf, dan ziet men, na ontwikkelen, tusschen de donkere beelden van de koolstaaf en ebonieten dop een scherp geteekenden lichten ring. Ook op het fluoresceerend scherm was deze ring — natuurlijk een donkere — zeer goed waar te nemen en men kon gemakkelijk de RÖNTGEN-buis zóó plaatsen, dat deze ring concentrisch was met de beelden van koolstaaf en ebonieten dop.

Deze ring bleek veroorzaakt doordat de stralen, die van uit de antikathode de koolstaaf niet evenwijdig met de as doorliepen en de koolstaaf weer verlieten, niet in staat waren het eboniet te doordringen, maar door deze stof geheel geabsorbeerd werden; werd de ebonieten dop door een van kool vervangen dan was de ring verdwenen; het is dus een zeer fraai voorbeeld van de selectieve absorptie der RÖNTGEN-stralen. [1])

Was door dit hulpmiddel een symmetrische gang der RÖNTGEN-stralen verkregen, dan vertoonden zich de beide maxima en minima nooit, noch bij korten noch bij langen duur der proef, hoewel op de film dikwijls een krachtige inwerking werd verkregen; een dergelijke werking ontstond b.v. reeds bij een expositietijd van één uur, wanneer een, door een turbine-onderbreker gedreven, inductor van 30 cM. vonkenlengte gebruikt werd; de stroom werd door een accumulatoren batterij van 65 volt geleverd, stroomsterkte 7 ampère; de RÖNTGEN-buis was „week".

Wel kreeg ik soms één maximum of een ongelijkmatige werking op de film, maar alleen bij een onsymmetrischen stand van de opstelling.

Uit deze proeven moet dus worden afgeleid 1° dat de RÖNTGEN-stralen hoogstens tot een zeer gering bedrag gepolariseerd kunnen zijn en 2° dat *mogelijkerwijze* bij BARKLA's proeven, waarbij niet tegelijkertijd in diametraal gelegen richtingen werd onderzocht, een asymmetrie in de opstelling de waargenomen maxima en minima heeft veroorzaakt.

---

[1]) Voor deze proef neme men, bij overigens gelijke inrichting een koolstaaf van 1 cM. diameter, 4 cM. lang.

Met ongeveer dezelfde inrichting herhaalde ik BARKLA's proeven over de polarisatie der secundaire stralen, door hem, ook door middel der electroskopen, aangetoond en beschreven in Proc. Roy. Soc. Series A, vol 77, pg. 247, 1906.

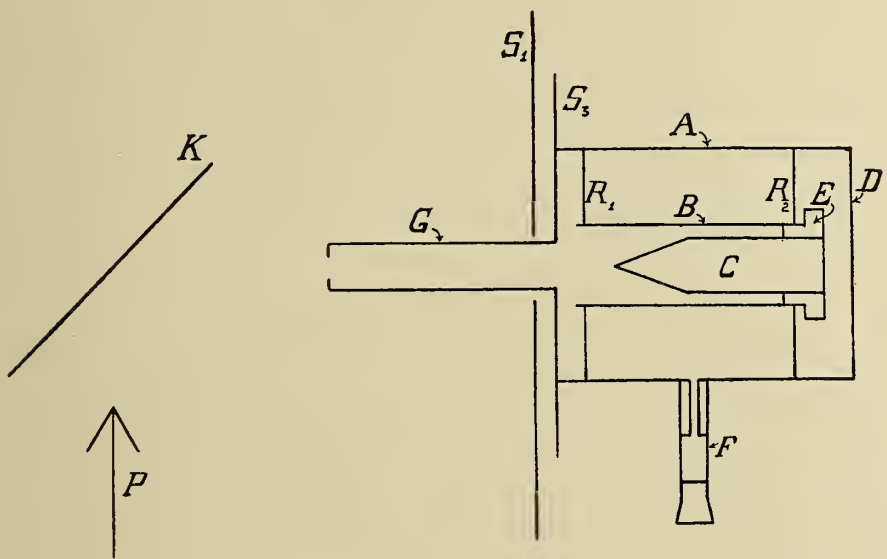


Fig. 2

De RÖNTGEN-stralen vielen in de richting der pijl (fig. 2) op de 12 mM. dikke koolplaat K, groot 8×8 cM.; de door deze uitgezonden secundaire stralen konden gaan door de op S_3 bevestigde 6 cM. lange buis G, die aan de voorzijde voorzien was van een koperen plaatje met eene opening van 5 mM. Deze koperen buis was in de looden kast geplaatst op 8 cM. van het midden der koolplaat; looden schermen beschutten de buis tegen direkte werking der primaire stralen. Bij deze proef werd de bovengenoemde inductor door een WEHNELT-onderbreker gedreven, de accumulatoren batterij had een spanning van 65 Volt, stroom 7 amp. Een zeer goede opname werd in dertig uur verkregen en vertoont zeer duidelijk twee maxima en twee minima, de afstand der middens der maxima bedraagt juist de helft van den binnenomtrek der buis en uit hun plaats is af te leiden dat ze veroorzaakt zijn door de tertiaire stralen door het kegeloppervlak der koolstaaf uitgezonden.

Bij deze proef waren het midden der antikathode, de as van de koolstaaf en het midden der koolplaat in één horizontaal vlak en was de as der kathodestralen in één vertikaal vlak met het midden der koolplaat, de assen der primaire en secundaire stralen stonden loodrecht op elkander. Bij deze plaatsing moet, volgens de opvatting

van BARKLA, het maximum der werking der tertiaire stralen in het zooeven genoemde horizontale vlak gelegen zijn; ook dit werd bij mijn proef geheel bevestigd gevonden. Ten einde namelijk te weten welk deel van de photografische film in dit vlak lag, was aan de buitenzijde van de cilinder A een zijbuisje F aangebracht, dat bij de proef horizontaal geplaatst werd; in dit buisje paste een metalen staafje met nauwe doorboring, zoodat men in de donkere kamer, na wegnemen van het caoutchouc stopje dat F afsloot, met een lange naald, door dit staafje en kleine openingen in de wand van A en B heen, een klein gaatje in de film kon prikken. Dit gaatje bevond zich juist midden in een der maxima.

Door deze proef is dus photografisch volkomen bevestigd wat BARKLA door zijn electroskopen gevonden had en de gepolariseerde toestand der door kool uitgezonden secundaire stralen bewezen.

Bij zijne verschillende onderzoekingen wees BARKLA op de groote overeenkomst in het karakter der secundaire en primaire RÖNTGEN-stralen; ook bij de hier besproken proeven bleek dit uit het radiogram opgenomen op de film in het deksel D; niet alleen dat de secundaire stralen door de 6 cM. lange koolstaaf de film nog aantastten, maar de lichte ring was weder duidelijk te zien, zoodat eboniet ook alle secundaire stralen absorbeert, die door de koolstaaf gegaan zijn.[1]) Dat de ring niet zoo scherp begrensd was als bij de proeven met de primaire stralen laat zich ongedwongen verklaren uit de verschillende uitgebreidheid der stralenbronnen: bij de primaire stralen een zeer klein gedeelte der antikathode, bij de secundaire het deel der koolplaat dat door de openingen in G en S_3 stralen zond.

Wordt het door deze overeenkomst reeds zeer waarschijnlijk dat ook RÖNTGEN-stralen uit *transversale* trillingen bestaan, zoo leveren deze proeven nog een verder bewijs voor deze zelfde stelling. Neemt men nl. de voorstelling van BARKLA aan voor het ontstaan der secundaire stralen in lichamen met klein atoomgewicht, dan kan zeer gemakkelijk worden aangetoond, dat, wanneer de primaire RÖNTGEN-stralen uit *longitudinale* trillingen bestonden, bij de hier besproken proef de maximale werking der tertiaire stralen in een vertikaal vlak zou hebben plaats gehad en niet, zooals het geval is geweest, in een horizontaal vlak.

Groningen, Natuurkundig Laboratorium der Universiteit.

---

[1]) De ring was geheel concentrisch: de opstelling dus geheel symmetrisch.

Plantenkunde. — De Heer Moll biedt eene mededeeling aan van Mevrouw Dr. M. Nieuwenhuis—von Uexküll-Güldenband : *„De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten"*.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. Went.)

Gedurende mijn verblijf van een achttal maanden te Buitenzorg (in 1901) heb ik mij hoofdzakelijk bezig gehouden met het onderzoek van den bouw en de eigenaardigheden der suikerafscheidende myrmecophiele planten. De uitkomsten dezer waarnemingen, die zich over een 70-tal planten uitstrekken, zijn niet vereenigbaar met de door Delpino, Kerner, Trelease, Burck, en vele anderen verkondigde meening, dat de extraflorale suikerafscheiding der planten dienen zoude, om mieren aan te lokken, die dan als wederdienst deze planten tegen velerlei schadelijke dieren zouden beschermen.

In geen enkel geval toch kon ik waarnemen, dat de suikerafscheiding aan de plant nut opleverde ; wel bleek mij, dat de mieren zich met de suiker voedden, doch in plaats van tevens van nut te zijn, benadeelden zij de plant op indirecte wijze door het aanbrengen en opkweeken van luizen ; verder lokken de extraflorale nectariën niet alleen mieren, maar eveneens een menigte kevers, wantsen, larven, enz. aan en deze vergenoegen zich niet met de suiker alléén, maar eten te gelijker tijd de nectariën zelf op en vreten vaak de bladeren en de bloemen in niet geringe mate aan.

Bij omstreeks een derde der planten, welke ik hierop onderzocht, berokkent de afscheiding der suiker zóó voorzeker zeer groote schade ; bij een ander derde ondervindt de plant slechts gering nadeel door dit aanlokken van ongewenschte bezoekers, terwijl bij het laatste derde geen enkele aanwijzing te vinden was, dat zij door hare suikerafscheiding tegenover andere planten in het nadeel waren.

Van degene, welke door hare suikerafscheiding op indirecte wijze benadeeld worden, geef ik hier slechts een paar voorbeelden uit de vele, die ik later uitvoeriger elders zal bespreken.

Spathoglottis plicata Bl. is een in den Indischen Archipel algemeen voorkomende Orchidee. Men vindt haar in de omstreken van Buitenzorg o. a. op den Salak en zij wordt in den Plantentuin in de randen om de perken in het Orchideënkwartier gebruikt. Hare bladen (alle wortelbladeren) zijn volgens Smith tot 1.20 M. lang, smal, met een lange punt voorzien en overlangs gevouwen ; haar bloeiwijze staat rechtop, wordt tot 2 M. hoog en draagt aan haar einde, in de oksels van gekleurde schutblaadjes, een aantal bloemen, wier kleur wisselt tusschen roodviolet en wit. De schutblaadjes en bloemdek-

bladeren hebben stompe punten, welke dik zijn en donkerder van kleur. Op de bloeiwijzen wemelt het steeds van twee soorten mieren, één groote en één kleine soort. Zelfs als de bloemknoppen nog gesloten zijn, vindt men de mieren reeds op de schutblaadjes en nauwelijks zijn de bloemen geopend, of de mieren vallen ook op de bloemdekbladeren aan. Het onderzoek leerde, dat suiker hier als aanlokmiddel wordt afgescheiden.

Om dit te bewijzen werden bloemen gedurende eenigen tijd onder een vochtige glazen klok geplaatst en na eenige uren kon toen met FEHLING's-proefvocht in de vloeistof, die door de secerneerende bladeren aan de buitenzijde was afgescheiden, suiker aangetoond worden. Bijzondere organen voor deze suikerafscheiding kon ik intusschen niet vinden; waarschijnlijk geschiedt deze inwendig en komt het product naar buiten door de opperhuid of door de huidmondjes.

Het was reeds aan DELPINO bekend, dat sommige Orchideën suiker afscheiden op de bloembladeren; het merkwaardige der genoemde *Spathoglottis* is echter, dat de aangelokte mieren een zoo schadelijken invloed op haar uitoefenen. Terwijl n.l. de kleine soort op de bloemen blijft en zich met de daar afgescheiden suiker tevreden stelt, daalt de groote soort ook naar de wortelbladeren af en tast deze aan, en wel dikwijls in die mate, dat slechts een geraamte van het blad overblijft; deze zoo schadelijke groote mieren worden door de veel talrijkere kleine in het geheel niet verjaagd. Het bleek verder ten duidelijkste, dat de suikerafscheiding inderdaad de oorzaak was, dat zóó gewichtige organen als de bladeren door deze groote soort werden opgegeten. Het bewijs hiervoor leverden n.l. die planten, welke uitgebloeid waren en vruchten droegen; bij deze had geen suikerafscheiding meer plaats en de bladeren, die in dit tijdperk nieuw ontstonden, bleven dientengevolge ongedeerd. Hier was het dus juist de suikerafscheiding in de bloeiperiode, die de mieren aantrok, terwijl de bladeren der plant op zich zelf geen voldoende aanlokking op de mieren uitoefenden.

Een tweede voorbeeld, hoeveel nadeel de suikerafscheiding aan de planten zelve kan berokkenen, ontleen ik aan verscheidene boom- en struikachtige *Malvacaeën*. In den Plantentuin staat een ongedetermineerde boom, een *Malvacea* uit Indochina. Deze heeft niet alleen nectariën op de stengel- en kelkbladeren, maar biedt den mieren bovendien een zeer geschikte woonplaats aan in de paarsgewijze naar elkaar toegebogen steunblaadjes. De hierdoor gevormde ruimten worden inderdaad door mieren bewoond, maar toch niet zooveel als men zou verwachten. De reden hiervan is, dat zij, ondanks den overvloed aan nectariën, geen voedsel genoeg vinden, omdat op deze

boomen een wantsensoort voorkomt, die niet slechts de afgescheiden suiker gebruikt, maar ook de nectariën zelf opeet. Deze wantsen beschadigen de bladeren bovendien in die mate, dat de boom er onder lijdt, hetgeen reeds bij oppervlakkige beschouwing opvalt. Hetzelfde kan men opmerken bij een boom, gemerkt „*Malvacea Karato*" en bij eenige andere soorten dezer familie.

Om te bewijzen, dat het afscheiden van suiker, hetwelk schadelijke insecten aanlokt, inderdaad voor deze boomen van nadeel is, zou het nog noodig zijn, aan te toonen, dat zij ongeschonden blijven, als de suikerafscheiding niet plaats heeft. Dit bewijs wordt reeds zonder meer door eenige andere *Malvaceën* geleverd:

Twee in Indië zeer verbreide struikachtige *Malvaceën*, namelijk: *Hibiscus rosa sinensis L.* en *Hibiscus tiliaceus L.* hebben op hunne bladeren nectariën. Zij worden echter noch door mieren noch door andere schadelijke insecten bezocht, omdat in die nectariën altijd, voor zoover ik kon nagaan, een schimmel woekert, die uiterlijk reeds aan haar zwarte kleur te herkennen is. Deze schimmel maakt, dat de suikerafscheiding niet tot stand komt en hierdoor vervalt de aantrekkingskracht der nectariën voor insecten, die voor de plant schadelijk zouden zijn. Deze struiken steken juist door hun gunstig uiterlijk in het *Malvaceën*kwartier sterk af tegenover de bovenvermelde planten, welke door mieren en andere insecten bezocht worden.

Op grond van de omstandigheid, dat de extraflorale nectariën zich hoofdzakelijk op en bij de bloeiwijzen bevinden, stelde Burck de hypothese op, dat zij in sommige gevallen er toe zouden dienen, om mieren in de nabijheid der bloemen te lokken, teneinde deze te beschermen tegen het aanboren en tegen den roof van honig door bijen en wespen. Ik kon echter zelfs aan de door hem onderzochte planten geen bevestiging voor zijne hypothese vinden. Vooreerst toch komen de nectariën slechts zelden *uitsluitend* op de bloeiwijzen voor; ook de door hem als bewijs aangevoerde planten, als: *Thunbergia grandiflora*, Roxb., *Gmelina asiatica L*, en *Gmelina bracteata*, *Nycticalos macrosyphon* en *Nycticalos Thomsonii* kunnen niet als voorbeelden dienen, omdat deze planten evenzoo aan hare vegetatieve organen, als bladeren en stengels, nectariën bezitten, welke volgens hem aldaar niet aanwezig zijn of door hem niet genoemd worden. Wat de zoogenaamde „mierenbroodjes" (Burck'sche Körperchen) op de kelk van *Thunbergia grandiflora* betreft, is het mij gebleken, dat deze in 't geheel geen „food-bodies" zijn, maar gewone suikerafscheidende vervormde haren, welke ik ook op de bracteen, bladeren en bladstelen van deze plant heb aangetroffen.

Verder bleek mij, dat het aantal der aangeboorde bloemen in geen

verhouding staat tot het aantal der op de kelk voorkomende nectariën, zooals volgens BURCK juist het geval zoude zijn. Veelmeer is dit afhankelijk van uitwendige factoren, als bijv. van de min of meer vrije standplaats der planten, van het weer enz.

Als voorbeeld hiervan moge de slingerplant *Bignonia Chamberlayni* aangehaald worden. Van deze plant bleken op vele dagen slechts 1,6 % der afgevallen bloemen niet door *Xylocopa coerulea* aangeboord te zijn, ofschoon talrijke mieren steeds op de nectariën der kelk voorkomen.

Een voorbeeld, dat de meer of minder vrije standplaats op de talrijkheid der perforaties harer bloemen van invloed is, vindt men in twee soorten van het geslacht der *Faradaya*, die beide nectariën op de kelk en op de bladeren hebben. Bij *Faradaya papuana* SCHEFF., die in den botanischen tuin te Buitenzorg te midden van vele andere rijk bloeiende planten staat, worden de bloemen vaak door een *Xylopoca* aangeboord; van de afgevallen bloemen was slechts 1 % niet beschadigd. Anders was dit bij een tweede, nog onbepaalde soort van hetzelfde geslacht, die, wat de nectariën betrof, geen verschil vertoonde met de eerste, en die op eenigen afstand van deze groeide, op een minder open standplaats. Hare takken hingen gedeeltelijk tot op den grond en droegen veel minder bloemen dan *Faradaya papuana*. Van deze nu bleven 19,3 % der bloemen onaangeboord.

Wat den invloed der weersgesteldheid betreft, bleek mij, dat het aantal der aangeboorde bloemen ten nauwste daarmede samenhangt. Was het overdag zonnig weer geweest, dan was den volgenden morgen een zeer veel grooter aantal bloemen aangeboord dan wanneer regen de insecten verhinderd had uit te vliegen. Dit was o.a. zeer opvallend bij *Ipomoea carnea* JACQ., een struik, die zoowel op de bladeren als op den kelk nectariën draagt, welke laatste door *Vespa analis* en twee *Xylocopa's* aangeboord wordt. Des morgens verzameld, zonder acht te geven op het weder van den vorigen dag, waren van de afgevallen bloemen 90 % aangeboord; na regenachtige dagen waren 57 % der bloemen beschadigd en na zonnige dagen werden zelfs 99,1 % aangeboord.

Hieruit blijkt ten duidelijkste, van hoe weinig waarde statistische opgaven zijn omtrent het aangeboord worden van bloemen en omtrent hunne eventueele bescherming door mieren, wanneer niet daarbij tevens gelet is op alle andere omstandigheden, die daarop invloed kunnen uitoefenen.

Wanneer men tracht zich rekenschap te geven van de rol, die de insecten, in gunstigen of ongunstigen zin, ten opzichte van een plant spelen, ontmoet men in de tropen grooter bezwaren dan bijv.

in Midden-Europa, omdat de vegetatieperiode er zoo veel langer duurt. Daardoor kan men in het eene gedeelte dier periode bepaalde insecten bij menigte aantreffen, die in een ander tijdperk niet meer voorkomen. Deze bijzondere moeilijkheid bij het beantwoorden der vraag, of bepaalde inrichtingen bij een plant eene aanpassing aan eene bepaalde diersoort vormen of niet, wordt in een botanischen tuin nog daardoor vergroot, dat de planten zich hier bijna alle op een voor haar meer of minder ongewone standplaats of omgeving bevinden. Toch kan men ook hier wel een onderzoek instellen naar het onderlinge gedrag der dieren die de planten bezoeken, alsmede naar hunne wijze van doen tegenover de planten zelf, terwijl de uitkomsten hiervan ons dan in staat stellen, om met eenig recht een besluit te trekken omtrent de onderlinge verhoudingen op de natuurlijke standplaats dezer planten. Bij den aanvang mijner onderzoekingen heb ik mij op dat standpunt geplaatst, mij onder meer de volgende vragen gesteld en daarop de hier in 't kort vermelde antwoorden verkregen:

1°. Op welke plantendeelen treft men extraflorale suikerafscheiding aan?

In de door mij onderzochte gevallen vond ik suikerafscheiding aan de takken, bladeren, steunblaadjes, schutblaadjes van verschillenden aard, bloemstengels en -stelen, vruchtbeginsels, benevens aan de buitenzijde en binnenzijde van kelk en kroonbladeren, en wel aan elk dezer op zichzelf of in een groot aantal verschillende combinaties. Het meest echter waren zij te vinden: *a.* Op bladscheeden en kelk te zamen, *b.* alléén op de bladschijf, *c.* op de bladstelen, bloemstengel en kelk. Van het voorkomen in andere combinaties heb ik daarentegen voor ieder slechts 1—3 voorbeelden aangetroffen.

2°. Wijst de bouw of de plaatsing der nectariën er duidelijk op, dat zij op een bezoek van mieren ingericht zijn?

Behoudens in enkele gevallen (zooals bijv. bij de nectariën, die bij de dicht opeenstaande bloemen van *Gmelina asiatica* Scheff. aan die zijde van den kelk, die van de as der bloeiwijze is afgekeerd, voorkomen) moet het antwoord op deze vraag beslist ontkennend luiden. Wel schijnt het bij den zeer veelvuldig voorkomenden bekervorm der nectariën, alsof deze zeer geschikt ware, om de afgescheiden honig te bewaren, maar aan de bladeren vindt men deze nectariën grootendeels aan hunne onderzijde met de opening naar beneden gericht. Ik herinner hier aan de beide groote, eveneens naar beneden gekeerde bekervormige nectariën aan den voet der zijbladeren van enkele *Erythrina*-soorten.

Het veelvuldig voorkomen van nectariën op de kelken, die alleén

in het knopstadium honig afscheiden, scheen erop te wijzen, dat deze knoppen in het bijzonder beschermd moeten worden. Hiermede is intusschen in strijd, dat somtijds, volgens mijne waarnemingen, slechts de helft der bloemen kelknectariën draagt (bijv. *Spathodea campanulata* BEAUV.).

Bij vele *Smilax*-soorten lokt slechts een deel der takken mieren aan en wel juist die takken, welke geene bloemen dragen en dus, volgens de heerschende opvattingen, het minst bescherming zouden noodig hebben. Het is met de bescherming der bloemen dan ook moeilijk overeen te brengen, dat nectariën voorkomen aan de binnen- en buitenzijde van den bovenrand der kroonbuis van *Nycticalos macrosyphon*, *Spathodea serrulata* en andere. Het lokken van mieren naar den ingang der bloemkroon, dus juist dáár, waar de dieren die kruisbevruchting veroorzaken, binnen moeten komen, kan voorzeker van het standpunt der biologen onpraktisch genoemd worden.

Tegen de opvatting, dat deze planten bescherming noodig zouden hebben, pleit ook het feit, dat juist bij de jonge planten, bij welke dan toch wel bescherming het meest noodzakelijk zou zijn, deze aanlokmiddelen voor beschermende mieren niet aanwezig zijn. Kort geleden heeft ook ULE [1]) hierop opmerkzaam gemaakt als gevolg van zijn onderzoek van Amerikaansche planten.

3°. Heeft bij *alle* nectariën suikerafscheiding plaats?

Dit is niet het geval; bij eenige nectariën kon ik zelfs geen afscheiding aantoonen, nadat zij langeren tijd onder een glazen stolp vertoefd hadden; bijv. was dit het geval met de bladeren van *Gmelina asiatica*. Zij worden dan ook niet door mieren bezocht, ofschoon deze insecten steeds voorkomen op de evenzoo gevormde, maar sterk secerneerende nectariën van den kelk.

De hoeveelheid der afgescheiden stoffen is overigens zeer wisselend bij dezelfde nectariën eener zelfde plant en afhankelijk van velerlei uit- en inwendige invloeden.

4°. Worden alle afscheidingsproducten der nectariën altijd en gaarne door mieren gebruikt?

Ook dit is blijkbaar niet steeds het geval, want terwijl de nectariën van sommige planten voortdurend door mieren worden bezocht, loopen bij anderen de nectariën als het ware over, zonder dat een dier er op afkomt (bij eenige soorten van *Passiflora* bijv.).

5°. Op welken leeftijd der organen scheiden de nectariën suiker af?

In den regel houden de nectariën der bloeiwijzen op te secerneeren, zoodra de bloemen geopend zijn; die der stengelbladeren

[1]) ENGLER's Bot. Jahrbücher, Heft III. Bd. 37. 1906.

functioneeren zelfs dikwijls slechts in de jongste ontwikkelingsstadiën.

6°. Treden de mieren, die de planten met nectariën bezoeken, tegen andere bezoekers vijandig op?

Hoewel ik dagelijks uren lang het doen en laten der mieren bij de extraflorale nectariën naging, heb ik toch nooit opgemerkt, dat zij andere dieren op eenigerlei wijze hinderden. Op de *Luffa*-soorten kan men de mieren bij dezelfde nectariën vreedzaam bezig zien naast een keversoort, die de plant groot nadeel toebrengt door het aanvreten van bladeren en knoppen.

De uitkomsten van mijne onderzoekingen aan eenige wilde planten van Java op hunne natuurlijke standplaats kwamen geheel overeen met die, in den Buitenzorgschen tuin verkregen.

Juist die soorten van mieren, die zich op de zoogenaamde „mierenplanten" van den Indischen Archipel ophouden, schijnen tot de onschadelijke te behooren; de kwaadaardige soorten met krachtige mondwerktuigen, bijv. die, welke in West-Java *semoet ranggrang* genoemd worden en volgens Dr. Vorderman door de Maleiers tot verdediging der Mangaboomen tegen kevers gebruikt worden, zijn carnivoor. Daarom moeten dan ook deze mieren opzettelijk aangelokt worden door het ophangen van dierlijke stoffen (doode leguanen) in de te beschermen boomen.

Wat dan wel de beteekenis zou zijn van het voorkomen van de vaak zóózeer gedifferentieerde organen als vele extraflorale nectariën en van de suikerafscheiding, welke zij in de meeste gevallen vertoonen, kan slechts uitgemaakt worden door nieuwe onderzoekingen, welke intusschen niet alleen op de biologie, doch ook op de physiologie der plant betrekking moeten hebben.

Leiden, Juni 1906.

Wiskunde. — De Heer Korteweg biedt eene mededeeling aan van den Heer L. E. J. Brouwer: „*Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten.*"

(Mede aangeboden door den Heer P. H. Schoute).

A. *De hyperbolische* R_3.

I. Denken we een rechthoekig coördinatenstelsel aangebracht zoodat $ds = \sqrt{A^2\,du^2 + B^2\,dv^2 + C^2\,dw^2}$, en denken we een lijnvectordistributie X met ontbondenen X_u, X_v, X_w, dan is de integraal van X langs een gesloten kromme gelijk aan die van den planivector Y over een willekeurig oppervlak, daardoor begrensd; hierin zijn de ontbondenen van Y bepaald door:

$$Y_u = \frac{1}{BC}\left\{\frac{\partial (X_v B)}{\partial w} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial v}\right\} \text{ enz.}$$

Immers brengen we op het begrensde oppervlak kromlijnige coördinaten ξ en η aan, ten opzichte waarvan de begrenzing convex is, dan is de oppervlakte-integraal:

$$\int \sum \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial (X_v B)}{\partial w} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial v}\right) d\xi\, d\eta.$$

Hierin samennemende de termen, die $X_w C$ bevatten, en $\frac{\partial (X_w C)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}$ optellend en aftrekkend, krijgen we:

$$\int d\xi\, d\eta \left\{\frac{\partial (X_w C)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}\right\}.$$

Dit partieel integreerend, de eerste term naar η, de tweede naar ξ, komt $\int X_w C\, dw$ langs den omtrek; hetgeen te zamen met de analoog komende integralen $\int X_v B\, dv$ en $\int X_u A\, du$ de lijnintegraal van X langs den omtrek geeft.

Den planivector Y noemen we in overeenstemming met de vroeger (zie deze Verslagen 26 Mei 1906, p. 14—26)[1]) gegeven terminologie de *eerste afgeleide* van X.

Analoog wordt eenvoudig als *tweede afgeleide* gevonden de scalar:

$$Z = \frac{1}{ABC} \sum \frac{\partial \{X_u . BC\}}{\partial u}.$$

---

[1]) De daar gegeven methode leidde uit de indicatrix van een convexe begrenzing die van den inhoud af, door een punt van het inwendige *vóóraan* te zetten; en zij verstond onder den vector $X_{pqr...}$ een vector met indicatrix *opqr*.... We kunnen echter ook de indicatrix van den inhoud bepalen, door *achteraan* de indicatrix der begrenzing een punt van het inwendige te zetten; en daarbij aan den vector $X_{pqr...}$ de indicatrix *pqr..o* toekennen. Dan vinden we:

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{\alpha_{q_{p+1}} = \alpha_1 .. \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_1} ... \alpha_{q_p}}}{\partial x_{\alpha_{q_{p+1}}}};$$

$$Z_{\alpha_1 ... \alpha_{p-1}} = - \sum_{\alpha_q = \alpha_p ... \alpha_n} \frac{\partial X_{\alpha_1 ... \alpha_{p-1} \alpha_q}}{\partial x_{\alpha_q}}.$$

Deze laatste definities sluiten in de bekende *divergentie* van een vector, en *gradient* van een potentiaal, ook wat het teeken betreft; daarom zullen we voortaan daarvan uitgaan, en hebben ook daarvan de uitbreiding op niet-Euclidische ruimten genomen.

Naar de gewone uitdrukkingswijze is de eerste afgeleide de rotatievector, de tweede de divergentie.

II. Zal X zijn een ${}^1_2X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector Ξ, dan moeten we hebben:

$$X_u = \frac{1}{BC}\left\{\frac{\partial(\Xi_v B)}{\partial w} - \frac{\partial(\Xi_w C)}{\partial v}\right\} \text{ enz.},$$

en we zien licht, dat hiertoe noodig en voldoende is:

$$Z = 0.$$

III. Zal X zijn een ${}^1_0X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide (gradient) van een scalardistributie φ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial\varphi}{A\partial u} \qquad X_v = -\frac{\partial\varphi}{B\partial v} \qquad X'_w = -\frac{\partial\varphi}{C\partial w},$$

en we zien licht, dat hiertoe noodig en voldoende is:

$$Y = 0.$$

IV. We kunnen gemakkelijk aangeven (vgl. SCHERING, Göttinger Nachrichten 1870) de ${}^1_0X$, waarvan de divergentie een geisoleerde scalarwaarde in den oorsprong is.

Zij is gericht volgens de voerstraal en gelijk aan:

$$\frac{1}{sh^2 r},$$

wanneer we de ruimteconstante $= 1$ stellen [1]).

Zij is de eerste afgeleide van een scalardistributie:

$$-1 + coth\, r,$$

en heeft in den oorsprong een geisoleerde divergentie van 4π.

V. We zullen in 't volgende van X onderstellen, dat zij de *veldeigenschap* heeft, en hieronder verstaan, dat zij in 't oneindige verdwijnt, en wel zoo, dat zij in de richting van de voerstraal van lager orde dan $\frac{1}{r}$ en in de richting loodrecht op de voerstraal van lager orde dan e^{-r} wordt.

Voor een ${}^1_0X$ beteekent dit, dat zij afgeleid is van een scalardistributie,

[1]) Voor eene andere ruimteconstante hebben we in al de volgende formules slechts r te vervangen door $\frac{r}{R}$.

die de *potentiaaleigenschap* heeft, d. w. z. die in 't oneindige 0 wordt.

Nu geldt voor twee scalardistributies het theorema van GREEN (vgl. FRESDORF diss. Göttingen 1873):

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dO - \int \varphi \bigtriangledown^2 \psi . d\tau = \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dO - \int \psi \bigtriangledown^2 \varphi . d\tau$$

$$\left(= \int S \{grad. \varphi, grad. \psi\} dt. \right).$$

Worden nu in 't oneindige φ en ψ beide 0, terwijl tevens $lim. \varphi \psi e^{2r} = 0$, dan vallen, als we het theorema van GREEN toepassen voor een bol met oneindigen straal, de oppervlakte-integralen weg, en we houden:

$$\int \varphi . \bigtriangledown^2 \psi . d\tau = \int \psi . \bigtriangledown^2 \varphi . d\tau,$$

geintegreerd over de geheele ruimte.

Nemen we nu voor φ een willekeurige potentiaalfunctie, en voor $\psi : -1 + coth\, r$, waarin r den afstand voorstelt tot een willekeurig gekozen punt P, dan voldoen deze functies aan de voorwaarden van verdwijnen in 't oneindige en $lim. \varphi \psi e^{2r} = 0$, zoodat we hebben:

$$4\pi . \varphi_P = \int (-1 + coth\, r) \bigtriangledown^2 \varphi . d\tau.$$

Stellen we dus $-1 + coth\, r \equiv F_1(r)$, dan hebben we:

$$^1_0X = \sqrt{^1/} \int \frac{\sqrt{^2/}\, ^1_0X}{4\pi} F_1(r)\, d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

VI. We zien nu, dat er geen vectordistributie met de veldeigenschap bestaat, die in 't eindige nergens rotatie en nergens divergentie heeft. Immers zulk een vectordistributie zou, daar ze nergens rotatie heeft, een potentiaal moeten hebben, maar die potentiaal zou volgens de formule (*I*) overal 0 moeten zijn, dus ook haar afgeleide vector.

En hieruit volgt, dat een vectorveld eenduidig is bepaald door haar rotatie en haar divergentie.

VII. Kunnen we dus elementairdistributies van divergentie en van rotatie aangeven, dan zijn de daarbij behoorende vectorvelden elementairvelden, d. w. z. het willekeurige vectorveld is een willekeurige ruimte-integraal van zulke velden.

Voor die elementairvelden wordt zoo analoog als in een Euclidische ruimte (zie Verslagen Mei 1906 p. 22 en vlgg.) gevonden:

1°. een veld E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. een veld E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit gelijke planivectoren in de punten van een cirkelstroompje en loodrecht op dat cirkelstroompje.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn ook hier weer de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

VIII. Om het veld E_1 aan te geven, nemen we een sferisch coördinatenstelsel, en het dubbelpunt in den oorsprong langs de as van het stelsel. Het veld E_1 is dan de afgeleide van een potentiaal:

$$\frac{\cos \varphi}{sh^2 r}.$$

Het kan beschouwd worden als som van twee fictieve „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $-1 + coth\, r$, die echter feitelijk nog complementair agens in 't oneindige hebben.

IX. Het veld E_2 van een kringstroompje volgens het aequatorvlak in den oorsprong, is buiten den oorsprong met bovenstaand veld E_1 identiek. Elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met een lijnintegraal van 4π langs zichzelf. We gaan van dit veld E_2 een planivectorpotentiaal zoeken, die ligt in het meridiaanvlak, en onafhankelijk is van het azimuth.

Om die te vinden in een punt P met voerstraal r en sferischen poolafstand φ, hebben we slechts den totalen krachtstroom tusschen het meridiaanvlak van P en een volgend meridiaanvlak met azimuthverschil $d\vartheta$, die tusschen P en de positieve omwentelingsas doorgaat, te deelen door het element van den parallelcirkel door P over $d\vartheta$. Immers zij ds een willekeurig lijnelement door P in het meridiaanvlak, dat een hoek F met de krachtrichting maakt, zij dh het element van den parallelcirkel, Σ de bovengenoemde krachtstroom en H de gezochte vectorpotentiaal, dan is:

$$d\Sigma = dh \,.\, X ds \sin F,$$

terwijl de voorwaarde voor H is:

$$d(Hdh) = dh\, ds\, X \sin F.$$

We behoeven dus voor H maar te nemen: $\frac{\Sigma}{dh}$.

Om Σ te vinden, integreeren we den krachtstroom over de meridiaanzone op het boloppervlak door P. De krachtontbondene loodrecht op dat boloppervlak is $2 \cos \varphi \frac{ch\, r}{sh^3 r}$, dus:

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} 2 \cos\varphi \frac{ch\, r}{sh^3 r} . sh\, r\, d\varphi . sh\, r \sin\varphi\, d\vartheta = d\vartheta \coth r . \sin^2\varphi.$$

Dus

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \frac{\Sigma}{sh\, r \sin\varphi d\vartheta} = \frac{ch\, r}{sh^2 r} \sin\varphi.$$

X. Hieruit volgt, dat, als gegeven zijn twee willekeurige eenheidsvectoren in verschillende punten, langs wier verbindingslijn we een derden vector $= \frac{ch\, r}{sh^2 r}$ aanbrengen, dat alsdan het volumeproduct dezer drie vectoren dat wil zeggen het volume van het parallelepipedum dat deze vectoren tot ribben heeft met behoorlijk teeken genomen, voorstelt de lijnvectorpotentiaal volgens den eersten (tweeden) vector, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidsmoment volgens den tweeden (eersten) vector.

Om dat volumeproduct op te maken, moeten we eerst de beide gegeven vectoren overbrengen naar een zelfde punt hunner verbinbingslijn, elk evenwijdig aan zichzelf, dat is in het vlak, dat hij met die verbindingslijn, waarlangs verschoven wordt, bepaalt, en onder behoud van denzelfden hoek met die verbindingslijn.

Het volumeproduct $\psi(S_1, S_2)$ is een symmetrische functie der beide eenheidsvectoren, waarvan we weten, dat zij bij integratie van S_1 langs een gesloten kromme s_1 voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens S_2 door s_1, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens S_2 en een magnetische schaal met eenheidssterkte binnen s_1, m.a.w. de kracht volgens S_2 door een magnetische schaal met eenheidssterkte binnen s_1, m.a.w. de kracht volgens S_2 door een stroom met eenheidssterkte langs s_1. We kunnen dus $\psi(S_1, S_2)$ beschouwen als de kracht volgens S_2 door een eenheidsstroomelement volgens S_1.

Waarmee gevonden is voor de kracht van een stroomelement met eenheidssterkte in den oorsprong volgens de as van het coördinatenstelsel:

$$\frac{ch\, r}{sh^2 r} \sin\varphi,$$

gericht loodrecht op het meridiaanvlak.

XI. Voor het zoo ingevoerde fictieve veld van een stroomelement (dat intusschen overal in de ruimte stroom, d. i. rotatie heeft) gaan we een lijnvectorpotentiaal V zoeken, die overal „evenwijdig" (zie

boven onder § X) loopt aan het stroomelement, en waarvan de scalarwaarde een functie van r alleen is.

Noemen we die scalarwaarde U, en beschouwen we een elementairrechthoekje in het meridiaanvlak begrensd door voerstralen uit den oorsprong en cirkels om den oorsprong, dan is de lijnintegraal van V om dat rechthoekje:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\{U \sin\varphi \, sh\, r\, d\varphi\}\, dr - \frac{\partial}{\partial\varphi}\{U \cos\varphi\, dr\}\, d\varphi.$$

Dit moet gelijk zijn aan den krachtstroom door het rechthoekje:

$$\frac{ch\, r}{sh^2 r} \sin\varphi \,.\, sh\, r\, d\varphi.\, dr,$$

waaruit de volgende differentiaalvergelijking van U naar r komt:

$$U - \frac{\partial}{\partial r}\{U\, sh\, r\} = coth\, r,$$

waarvan de oplossing is:

$$U = csch\, r - \tfrac{1}{2}\, r\, sech^2\, \tfrac{1}{2}\, r + c\,.\, sech^2\, \tfrac{1}{2}\, r.$$

Kiezen we $c = 0$, dan vinden we dus als vectorpotentiaal V van een eenheidsstroomelement E:

$$csch\ r - \tfrac{1}{2}\, r\, sech^2\, \tfrac{1}{2}\, r \equiv F_2\,(r),$$

gericht evenwijdig aan E.

Brengen we nu in een willekeurig punt der ruimte een vector G aan, dan heeft de vector V de eigenschap, dat hij, in G geïntegreerd langs een elementairkring, wiens vlak loodrecht op G staat, aangeeft de kracht volgens G, veroorzaakt door het stroomelement E, of ook de vectorpotentiaal volgens E, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidssterkte volgens G.

Noemen we dus van twee eenheidsvectoren E en F de potentiaal $\chi\,(E, F)$ de symmetrische functie $F_2\,(r) \cos\varphi$, waar r den afstand van de aangrijpingspunten der beide vectoren, en φ hun hoek na evenwijdige overbrenging naar eenzelfde punt hunner verbindingslijn voorstelt, dan weten we, dat deze functie χ, bij integreering van b.v. E over een gesloten kromme e geeft niet alleen de negatieve energie van een magnetische schaal met eenheidssterkte, begrensd door e in het veld van een eenheidsstroomelement F, maar ook de ontbondene langs F van de vectorpotentiaal, veroorzaakt door een eenheidsstroom langs e.

Hieruit volgt nu weer voor den vector V van een stroomelement, dat hij bij integreering van het stroomelement tot een gesloten stroom wordt de door haar flux-eigenschap eenduidig bepaalde vectorpotentiaal van dien stroom.

Zoodat werkelijk *de* vectorpotentiaal van een ${}^1_2X$, d.i. van een veld van stroomen, wordt verkregen als integraal van de vectoren V der stroomelementen.

XII. We kunnen nu schrijven, dat in een willekeurig punt:

$$ {}^1_2X = \overline{\vee^2} \int \frac{\overline{\vee^1}\ {}^1_2X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II) $$

waarin we de vectorelementen der integraal eerst evenwijdig overbrengen naar het beschouwde punt, en daar sommeeren.

Beschouwen we dus nu een willekeurig krachtveld als teweeggebracht door zijn beide afgeleiden (de magneten en stroomen), dan kunnen we ons dat zoo voorstellen, dat beide afgeleiden zich volgens een in 't oneindige verdwijnende functie van den afstand door de ruimte voortplanten, en daardoor de potentiaal van het veld doen ontstaan.

Het veld X is n.l. de totale afleiding van de potentiaal:

$$ \int \frac{\overline{\vee^2}\ X}{4\pi} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overline{\vee^1}\ X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau. $$

De demping van de scalarpotentiaal is sterker, dan die van de vectorpotentiaal; immers de eerste wordt op groote afstanden van de orde e^{-2r}; de laatste van de orde re^{-r}. Verder blijkt de laatste niet continu van ∞ naar 0 af te nemen, maar aanvankelijk snel door 0 heen naar negatief te dalen, om vervolgens een negatief maximum te bereiken, en dan volgens een demping re^{-r} als negatieve (d. i. aan het voortbrengend stroomelement tegengesteld gerichte) vector naar 't oneindige tot 0 te naderen.

XIII. De bij de Euclidische ruimte gevonden bijzonderheid, dat $F_1(r) = F_2(r) = \frac{1}{r}$, berust hierop, dat in Euclidische ruimten de bewerking van tweemaal totale afleiding voor scalardistributies en vectordistributies van willekeurig aantal dimensies gelijk wordt gevonden. (zie deze Verslagen 26 Mei 1906, p. 19).

Zoeken we echter in de hyperbolische R_3 de ∇^2 van een scalardistributie u in een willekeurig punt, dan vinden we, dat punt kiezend als centrum van een Riemannsch normaalcoördinatenstelsel $\left(\text{d.w.z. een stelsel zóó, dat } ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{1 - x^2 - y^2 - z^2}\right)$:

$$ \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, $$

maar als ∇^2 van een vectordistributie met ontbondenen X, Y en Z, vinden we, voor de x-ontbondene X_{∇^2}:

$$X_{\nabla^2} = X + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

B. *De hyperbolische* R_2.

I. Als eerste afgeleide Y van een vectordistributie X wordt gevonden een planivector, bepaald door een scalarwaarde:

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial (X_u A)}{\partial v} - \frac{\partial (X_v B)}{\partial u}\right\}.$$

Als tweede afgeleide Z vinden we de scalar:

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial (X_u B)}{\partial u} + \frac{\partial (X_v A)}{\partial v}\right\}.$$

II. Zal X zijn een ${}^1_2X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector met scalarwaarde ψ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial \psi}{B \partial v} \qquad X_v = \frac{\partial \psi}{A \partial u},$$

waartoe noodig en voldoende is: $Z = 0$.

Zal X zijn een ${}^1_0X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide van een scalar φ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial \varphi}{A \partial u} \qquad X_v = -\frac{\partial \varphi}{B \partial v},$$

waartoe noodig en voldoende is: $Y = 0$.

III. De ${}^1_0X$, waarvan de divergentie een geïsoleerde scalarwaarde in den oorsprong is, wordt een vectordistributie volgens de voerstraal, groot:

$$\frac{1}{sh\, r}.$$

Zij is eerste afgeleide van de scalardistributie:

$$l \coth \tfrac{1}{2} r.$$

De divergentie in den oorsprong van dit veld is 2π.

De scalardistributie $l \coth \frac{1}{2} r$ heeft dus de potentiaaleigenschap. (Voor het veld van een enkel agenspunt in de Euclidische R_2 was dit niet het geval).

IV. We onderstellen in het volgende voor de gegeven vectordistributie weer de veldeigenschap (die voor 2 en ook voor n dimensies gelijk blijft gedefinieerd, als voor 3 dimensies); er is dan geen vectorveld mogelijk, dat nergens rotatie en nergens divergentie heeft; elk vectorveld is dus door zijn rotatie en divergentie bepaald, en we hebben vooreerst voor een gradientendistributie:

$$ {}^1_0X = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/}\ {}^1_0X}{2\pi}\, l\ coth\ \tfrac{1}{2}r\ d\tau. $$

$$ {}^1_0X = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/}\ {}^1_0X}{2\pi}\, F_1(r)\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I) $$

V. Voor het veld E_1 van een agensdubbelpunt wordt gevonden de gradient van de potentiaal:

$$ \frac{cos\ \varphi}{sh\ r}. $$

Het is te splitsen in twee „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $l\ coth\ \frac{1}{2}\ r$.

VI. Met bovenstaand veld E_1 is buiten den oorsprong identiek het veld E_2 van een dubbelpunt van rotatie, welks as loodrecht staat op de as van het agensdubbelpunt van het veld E_1. Voor dat veld E_2 vinden we als scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in een punt P den totalen krachtstroom tusschen P en de as van het agensdubbelpunt, dat is:

$$ sin\ \varphi\ coth\ r. $$

Zijn dus een eenheidsvector V en een eenheidsscalar S gegeven, en brengen we langs hun verbindingslijn een vector $coth\ r$ aan, dan is het volumeproduct ψ van V, S en den vector langs de verbindingslijn de scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in S door een eenheidsmagneet volgens V.

Van ψ weten we, dat zij bij sommeering van S uit een positieve eenheidsscalar S_2 en een negatieve S_1 voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens V tusschen S_1 en S_2 door, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens V en een magnetische strook S_1S_2 met eenheidssterkte, m. a. w. de kracht volgens V door een rotatiekoppel $S_1 \rightarrow S_2$. We kunnen dus ψ beschouwen als de kracht volgens V door een geisoleerde rotatie in S.

Zoodat we als fictief „krachtveld van een eenheidsrotatieëlement" moeten nemen:

$$ coth\ r, $$

gericht loodrecht op de voerstraal. Dit krachtveld heeft feitelijk overal in de R_2 rotatie.

VII. Zoeken we de scalarwaarde U, functie van r, die we aan een planivectorpotentiaal moeten toekennen, opdat het „veld van een eenheidsrotatieëlement" daarvan de tweede afgeleide zij. We moeten dan hebben:

$$-\frac{dU}{dr} = coth\ r.$$

$$U = l\ csch\ r.$$

En we hebben voor een willekeurige ${}^1_2X$:

$${}^1_2X = \overline{\backslash 2/} \int \frac{\overline{\backslash 1/}\ {}^1_2X}{2\pi}\ l\ csch\ r\ d\tau$$

$${}^1_2X = \overline{\backslash 2/} \int \frac{\overline{\backslash 1/}\ {}^1_2X}{2\pi} F_2(r)\ d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En een willekeurig vectorveld X is de totale afgeleide van de potentiaal

$$\int \frac{\overline{\backslash 2/}X}{2\pi} F_1(r)\ d\tau + \int \frac{\overline{\backslash 1/}X}{2\pi} F_2(r)\ d\tau.$$

VIII. Het wekt nu bevreemding, dat hier in R_2 F_1 en F_2 niet identiek worden gevonden, aangezien immers de beide afgeleiden en de beide potentialen van een vectordistributie, in de hyperbolische zoo goed als in de Euclidische R_2, in volledig duale relatie tot elkander staan. Het verschil is echter gelegen in het principe van de veldeigenschap, dat een verdwijnen in 't oneindige postuleert voor de scalarpotentiaal, maar niet voor de planivectorpotentiaal. Daar deze uit het voorgaande blijkt in 't algemeen niet te verdwijnen, is met het postulaat van de veldeigenschap de dualiteit verbroken.

Maar aan den anderen kant mist dat postulaat in R_2 den redelijken grond, dien het in ruimten met meer dimensies heeft. Immers bij het stellen er van denken we aan den eisch, dat de totale energie van een veld niet oneindig mag worden. Zoo gauw we nu in 't oneindige van R_n krachten van de orde e^{-r} hebben, geeft dit in een sferische laag met dikte dr en oneindigen straal om den oorsprong als middelpunt beschreven een energie van de orde $e^{-2r} \times e^{(n-1)r}\ dr = e^{(n-3)r}\ dr$; hetgeen, naar r geïntegreerd, voor $n \geqq 3$ een oneindige energie in

't oneindige van R_n zou geven. Voor $n \geqq 3$ worden dus door de veldeigenschap alleen vectordistributies uitgesloten, die geen physische beteekenis kunnen hebben.

Voor $n = 2$ echter mist het postulaat dat recht van bestaan; meer zin nog heeft de eisch (voor $n > 2$ met de veldeigenschap gelijkwaardig), dat voor gegeven rotatie en divergentie de vectordistributie een minimum-energie moet hebben. Onder deze voorwaarden gaan we dus het veld nog op nieuw na en zullen hier ook de dualiteit naar beide afgeleiden en beide potentialen terugvinden.

IX. Beschouwen we vooreerst distributies met alleen divergentie, en zoeken we de potentiaalfunctie, die bij gegeven ∇^2 een minimum-energie geeft.

We beschouwen de hyperbolische R_2 als conforme afbeelding van dát gedeelte van een Euclidische R_2, dat door een cirkel wordt begrensd; brengen we dan in overeenkomstige punten der afbeelding dezelfde potentiaal aan, dan blijven in overeenkomstige vlakelementen gelijke energieën en gelijke divergenties. Het vraagstuk wordt dus:

Welke potentiaal geeft binnen een gegeven kromme (in casu een cirkel) in de Euclidische R_2 onder gegeven divergentiedistributie een minimum-energie?

Hiervoor hebben we volgens het theorema van GREEN:

$$\tfrac{1}{2}\int \delta\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau = \int \Sigma \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} \cdot d\tau = \int u \cdot \frac{\partial . \delta u}{\partial \nu} \cdot dO - \int u \, \nabla^2 \delta u \cdot d\tau,$$

zoodat, daar $\nabla^2 \delta u$ overal binnen de grenskromme 0 is, de noodige en voldoende voorwaarde voor het wegvallen van de variatie der energie is:

$$u = 0 \text{ langs de grenskromme.}$$

Voor de algemeene vectordistributie met alleen divergentie in de hyperbolische R_2 vinden we dus ook onder de voorwaarde van minimum-energie, dat de potentiaal in 't oneindige 0 moet zijn. We vinden haar dus juist als onder het postulaat van de veldeigenschap, samengesteld uit velden E_1, afgeleid van een potentiaal $\frac{\cos \varphi}{sh\, r}$.

De krachtlijnen van dit veld E_1 hebben de vergelijking

$$\sin \varphi \coth r = c.$$

Slechts een deel van de krachtlijnen (in het Euclidische vlak alle) keert hier in zichzelf terug; de andere gaan naar 't oneindige. De aequipotentiaallijnen echter gaan geen van alle naar 't oneindige; ze

zijn in 't eindige gesloten, en worden alle omsloten door den cirkel in 't oneindige als niveau van 0-potentiaal.

Zoo ook voor de willekeurige ${}^1_0X$; van de krachtlijnen gaat een deel naar 't oneindige; de potentiaalniveau's echter zijn in 't eindige gesloten.

X. Zoeken we nu het veld met alleen rotatie, dat voor gegeven rotatiedistributie een minimumenergie geeft, dan volgt uit een beschouwing van de rotatie als divergentie van den normaalvector, dat de scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in 't oneindige 0 moet zijn; en de algemeene ${}^1_2X$ is samengesteld uit velden E_2, afgeleid van een planivectorpotentiaal $\frac{sin\ \varphi}{sh\ r}$ (terwijl we onder het postulaat van de veldeigenschap vonden $sin\ \varphi\ coth\ r$).

In tegenstelling met hoogere hyperbolische ruimten en met alle Euclidische en elliptische ruimten, zijn hier de velden E_1 en E_2 niet te sommeeren tot een enkelen geïsoleerden vector.

Voor dit veld E_2 en evenzoo voor de willekeurige ${}^1_2X$ zijn de krachtlijnen (tevens planivectorpotentiaalniveau's) in 't eindige gesloten krommen.

XI. We hebben nu gevonden:

$$ {}^1_0X = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/}\ {}^1_0X}{2\pi}\ l\ coth\ \tfrac{1}{2}\ r\ d\tau $$

$$ {}^1_2X = \overline{\backslash 2/} \int \frac{\overline{\backslash 1/}\ {}^1_2X}{2\pi}\ l\ coth\ \tfrac{1}{2}\ r\ d\tau. $$

En hieruit volgt, dat ook de algemeene vectordistributie X, die voor gegeven rotatie en divergentie een minimum-energie heeft, is gelijk aan:

$$ X_{div.} + X_{rot.} = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/} X}{2\pi}\ l\ coth\ \tfrac{1}{2}\ r\ d\tau + \overline{\backslash 2/} \int \frac{\overline{\backslash 1/} X}{2\pi}\ l\ coth\ \tfrac{1}{2}\ r\ d\tau. $$

Immers zij V een willekeurige distributie zonder divergentie en zonder rotatie in 't eindige, dan is zij afgeleid van een scalarpotentiaalfunctie, dus heeft zij (volgens § VIII) geen wederkeerige energie met $X_{div.}$; en evenmin (daar volgens § IX alle krachtlijnen van $X_{rot.}$ in 't eindige gesloten krommen zijn, en een flux van uitsluitend gesloten vectorbuizen geen wederkeerige energie heeft met een gra-

dientendistributie) met $X_{rot.}$; zoodat de energie van $X_{div.} + X_{rot.} + V$ grooter is, dan die van $X_{div.} + X_{rot.}$.

We hebben dus ten slotte voor de algemeene vectordistributie van minimum-energie X:

$$X = \nabla \int \frac{\nabla X}{2\pi} . l \coth \tfrac{1}{2} r \, d\tau.$$

C. *De hyperbolische* R_n.

I. Denken we een rechthoekig coördinatenstelsel zoodat:

$$ds = \sqrt{A_1 u_1^2 + \ldots . A_n u_n^2},$$

en denken we een lijnvectordistributie X met ontbondenen $X_1 \ldots X_n$, dan is de integraal van X langs een gesloten kromme gelijk aan die van den planivector Y over een willekeurig oppervlak, daardoor begrensd; hierin zijn de ontbondenen van Y bepaald door:

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{A_{\alpha_1} A_{\alpha_2}} \left\{ \frac{\partial (X_{\alpha_2} A_{\alpha_2})}{\partial x_{\alpha_1}} - \frac{\partial (X_{\alpha_1} A_{\alpha_1})}{\partial x_{\alpha_2}} \right\}.$$

Y is de *eerste afgeleide* of *rotatie* van X.

Verder is de uitgaande vectorstroom van X over een gesloten gebogen R_{n-1} gelijk aan de integraal van den scalar Z over den inhoud dier R_{n-1}; hierin is:

$$Z = \frac{1}{A_1 \ldots . A_n} \sum \frac{\partial (X_{\alpha_1} . A_{\alpha_2} \ldots . A_{\alpha_n})}{\partial x_{\alpha_1}}$$

Z is de *tweede afgeleide* of *divergentie* van X.

II. Zal X zijn een ${}^1_2X$, d.w.z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector Ξ, dan moeten we hebben:

$$X_{\alpha_1} = \frac{1}{A_{\alpha_2} \ldots . A_{\alpha_n}} \sum \frac{\partial . (\Xi_{\alpha_1 \alpha_{q_1}} A_{\alpha_{q_2}} \ldots . A_{\alpha_{q_{n-1}}})}{\partial_{\alpha_{q_1}}}.$$

De noodige en voldoende voorwaarde hiertoe is:

$$Z = 0.$$

Zal X zijn een ${}^1_0X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide van een scalar φ, dan moeten we hebben:

$$X_\alpha = - \frac{\partial \varphi}{A_\alpha \partial x_\alpha}.$$

De noodige en voldoende voorwaarde hiertoe is:

$$Y = 0.$$

III. De ${}^{1}_{o}X$, die als divergentie een geïsoleerde scalarwaarde in den oorsprong heeft (vgl. Opitz. diss. Göttingen 1881), is gericht volgens den voerstraal, en, als we de ruimteconstante $= 1$ stellen, gelijk aan:

$$\frac{1}{sh^{n-1}\, r}.$$

Zij is de eerste afgeleide van een scalardistribntie

$$\int_{r}^{\infty} \frac{dr}{sh^{n-1}\, r} \equiv w_n(r),$$

en heeft in den oorsprong een geïsoleerde divergentie van k_n (als $k_n r^{n-1}$ het boloppervlak der Euclidische R_n uitdrukt).

IV. Voor twee scalardistributies φ en ψ geldt het theorema van Green (vgl. Opitz. l.c.):

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot dO_{n-1} - \int \varphi \bigtriangledown^2 \psi \cdot d\tau_n = \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot dO_{n-1} - \int \psi \bigtriangledown^2 \varphi \cdot d\tau_n$$

$$\left(= \int S(\bigtriangledown \varphi, \bigtriangledown \psi) \cdot d\tau_n \right).$$

Worden in 't oneindige φ en ψ beide 0, terwijl tevens

$$lim\ \varphi \psi e^{(n-1)r} = 0,$$

dan vallen voor een ${}^{n-1}$bol met oneindigen straal de oppervlakte-integralen weg, en we houden over:

$$\int \varphi \cdot \bigtriangledown^2 \psi \cdot d\tau_n = \int \psi \cdot \bigtriangledown^2 \varphi \cdot d\tau_n,$$

geïntegreerd over de geheele ruimte.

Nemen we hierin voor φ een willekeurige potentiaalfunctie en voor $\psi : w_n(r)$, waarin r voorstelt den afstand tot een willekeurig gekozen punt P — deze functies voldoen samen aan de voorwaarden der laatste formule — dan hebben we:

$$k_n \varphi_P = \int w_n(r) \cdot \bigtriangledown^2 \varphi \cdot d\tau_n.$$

Postuleeren we dus voor de vectordistributies die we beschouwen, de *veldeigenschap* (die juist als voor R_3 gedefinieerd blijft), dan hebben we, als we $w_n(r) \equiv F_1(r)$ stellen, voor een willekeurige ${}^{1}_{0}X$:

$${}^{1}_{0}X = \overline{\backslash 1 /} \int \frac{\overline{\backslash 2 /}\ {}^{1}_{0}X}{k_n} F_1(r)\, d\tau; \qquad \ldots\ldots\ (I)$$

waaruit we (zie bij A § VI) afleiden, dat er geen vectorveld bestaat,

dat in 't eindige nergens rotatie en nergens divergentie heeft; zoodat een vectorveld eenduidig is bepaald door haar rotatie en haar divergentie.

V. Een vectorveld is dus een willekeurige integraal van:

1°. Velden E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. velden E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit in de punten van een $^{n-2}$bolletje en loodrecht op dat $^{n-2}$bolletje gelijkmatig gedistribueerde planivectoren.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

VI. Om het veld E_1 aan te geven, nemen we een sferisch coördinatenstelsel [1]), en het dubbelpunt in den oorsprong langs de eerste as van het stelsel. Het veld E_1 is dan de afgeleide van een potentiaal:

$$\frac{\cos \varphi}{sh^{n-1} r}.$$

De krachtlijnen van dit veld loopen in het meridiaanvlak. Het kan beschouwd worden als som van twee fictieve „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $w_n(r)$, waaraan echter feitelijk nog complementair agens in 't oneindige moet worden toegekend.

VII. Het veld E_2 van een wervel-$^{n-2}$bolletje volgens de ruimte, loodrecht op de as van het zooeven beschouwde dubbelpunt, is buiten den oorsprong met het veld E_1 identiek. Elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met een lijnintegraal k_n langs zichzelf. We gaan voor dit veld E_2 een planivectorpotentiaal H zoeken, die ligt in het meridiaanvlak, en alleen afhangt van r en φ. Het blijkt eenvoudig, dat deze H dan is een $\overset{2}{_1}X$.

Zij ε een $(n-2)$-dimensionaal element in de $n-2$ coördinaten, die er buiten r en φ zijn, dan definieert dat voor elke r en φ een element op het oppervlak van een $^{n-2}$-bol, groot $dh = c\varepsilon\, sh^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi$, en voor de geheele R_n wat we kunnen noemen een „meridiaanzone".

[1]) Hieronder verstaan we in R_n een stelsel, dat met behulp van een rechthoekig assenstelsel met genummerde assen een punt bepaald door 1e. r, zijn afstand tot den oorsprong 2e. φ, den hoek van den voerstraal met X_1, 3e. den hoek van de projectie van den voerstraal op de coördinaatruimte $X_2 \ldots X_n$ met X_2, 4e. den hoek van de projectie der laatste projectie op de coördinaatruimte $X_3 \ldots X_n$ met X_3; enz. Het vlak door de X_1-richting en den voerstraal noemen we het *meridiaanvlak*.

We hebben dan voor den krachtstroom Σ, die binnen een meridiaanzone tusschen de as van het stelsel en een punt P met coördinaten r en φ doorgaat, als ds voorstelt een willekeurig lijnelement door P in het meridiaanvlak onder een hoek F met de krachtrichting:

$$d\Sigma = dh \,.\, X\, ds \sin F,$$

terwijl we gemakkelijk als noodige en voldoende voorwaarde voor H vinden:

$$d\,(Hdh) = dh \,.\, ds \,.\, X \sin F;$$

we hebben voor H dus maar te nemen: $\dfrac{\Sigma}{dh}$.

Om Σ te vinden, integreeren we den krachtstroom binnen de meridiaanzone, die gaat door het $^{n-1}$boloppervlak door P, tusschen de as van het stelsel en P. Daar voor de krachtontbondene loodrecht op dat boloppervlak komt: $(n-1)\cos\varphi \dfrac{ch\, r}{sh^{\,n}r}$, vinden we:

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} (n-1)\cos\varphi \frac{ch\, r}{sh^{\,n}r} \,.\, sh\, r\, d\varphi \,.\, c\varepsilon\, sh^{\,n-2}r \sin^{n-2}\varphi = c\varepsilon \sin^{n-1}\varphi \coth r.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \frac{ch\, r}{sh^{\,n-1}r} \sin\varphi.$$

VIII. Zijn dus gegeven in verschillende punten een eenheidslijnvector L en een eenheids-$^{n-2}$vector W, en brengen we langs hun verbindingslijn een lijnvector $\dfrac{ch\, r}{sh^{\,n-1}r}$, dan is het volumeproduct ψ van L, W en den vector langs de verbindingslijn de $^{n-2}$vectorpotentiaal volgens W, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidsmoment volgens L.

Van $\psi(L, W)$ weten we, dat zij bij integratie van W langs een gesloten gebogen R_{n-2} Q voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens L door Q heen, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens L en een magnetische $^{n-1}$schaal met eenheidssterkte, begrensd door Q, m. a. w. de kracht volgens L door een magnetische $^{n-1}$schaal begrensd door Q, m. a. w. de kracht volgens L door een wervelstelsel, gelijkmatig gedistribueerd over Q en loodrecht op Q. We kunnen dus $\psi(L, W)$ beschouwen als de kracht volgens L door een eenheidswervel, loodrecht op W.

Waarmee gevonden is voor de kracht van een vlakken wervel met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\frac{ch\, r}{sh^{\,n-1}r} \sin\varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerende wervelelement en loodrecht op het „meridiaanvlak", als we daaronder thans verstaan het projecteerende vlak op het wervelelement; terwijl φ hier is de hoek van den voerstraal met de R_{n-2}, loodrecht op het wervelelement.

IX. Voor het zoo ingevoerde fictieve veld van een wervelelement in den oorsprong (dat intusschen overal in de ruimte werveling heeft) gaan we een planivectorpotentiaal zoeken, die overal „evenwijdig" aan het wervelelement gericht is, en waarvan de scalarwaarde U een functie van r alleen is.

Denken we een punt bepaald door zijn azimuth evenwijdig aan het wervelelement, en dan verder in de R^{n-1} van constant azimuth door een sferisch coördinatenstelsel, waarvan we de eerste as kiezen in het „meridiaanvlak" (zie boven bij § VIII), en in het vlak van het wervelelement, de tweede in het meridiaanvlak loodrecht op de eerste, en de verdere willekeurig; verstaan we intusschen onder φ hier den hoek van den voerstraal met de R_{n-2}, loodrecht op het wervelelement; zij verder ε een $(n-3)$-dimensionaal element in de $n-3$ laatste coördinaten, dan definieert dit voor elke r en φ een element op het oppervlak van een $^{n-3}$bol, groot:

$$dk = c\varepsilon\, sh^{\,n-3} r\, cos^{\,n-3}\varphi.$$

We beschouwen dan een elementairrechthoekje in het meridiaanvlak, begrensd door voerstralen uit den oorsprong en cirkels om den oorsprong, en een R_{n-1}-element, bestaande uit de in elk punt van dit elementairrechthoekje opgerichte elementen dk. Op dit R_{n-1}-element de herleiding van $(n-2)$-voudige integraal langs de begrenzing tot $(n-1)$-voudige integraal over den inhoud volgens de definitie van tweede afgeleide toepassend, vinden we:

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\{U\cos\varphi\,.\,dr\,.\,c\varepsilon\, sh^{\,n-3} r\cos^{\,n-3}\varphi\}\,d\varphi -$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\{U\sin\varphi\,.\,sh\,r\,d\varphi\,.\,c\varepsilon\, sh^{\,n-3} r\cos^{\,n-3}\varphi\}\,dr =$$

$$= c\varepsilon\, sh^{\,n-3} r\cos^{\,n-3}\varphi\,.\,sh\,r\,d\varphi\,.\,dr\,.\,\frac{ch\,r}{sh^{\,n-1} r}\sin\varphi.$$

$$(n-2)\,U - \frac{dU}{dr}\,sh\,r - (n-2)\,U\,ch\,r = \frac{ch\,r}{sh^{\,n-2} r}\,.$$

$$\frac{dU}{dr} + (n-2)\,th\,\tfrac{1}{2}r\,.\,U = -\frac{ch\,r}{sh^{\,n-1} r}\,.$$

De oplossing dezer vergelijking is:

$$U = -\frac{1}{2^{n-3}} \cdot ch^{-2(n-2)\frac{1}{2}r} \cdot \int coth^{n-3\frac{1}{2}r} \cdot d\,\tfrac{1}{2}r + \frac{1}{(n-2)sh^{n-2}r}.$$

We vinden dus als planivectorpotentiaal V van een vlakke wervel:

$$\frac{1}{(n-2)sh^{n-2}r} - \frac{1}{2^{n-3}\,ch^{2(n-2)\frac{1}{2}r}} \int coth^{n-3\frac{1}{2}r} \cdot d\,\tfrac{1}{2}r \equiv F_2(r),$$

gericht evenwijdig aan dien vlakken wervel.

Noemen we nu E den $^{n-2}$vector, loodrecht op den vlakken wervel, waarvan we het veld onderzocht hebben, en zetten we de vectorpotentiaal V ook uit als $^{n-2}$vector; brengen we dan in een willekeurig punt der ruimte een lijnvector G aan, dan heeft de vector V de eigenschap, dat hij, in G geïntegreerd langs een kleine gebogen gesloten R_{n-2} in een R_{n-1} loodrecht op G, aangeeft de kracht volgens G, veroorzaakt door het stroomelement E, of ook de vectorpotentiaal volgens E, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidssterkte volgens G.

Noemen we nu van twee eenheids-$^{n-2}$vectoren E en F de potentiaal $\chi(E, F)$ de symmetrische functie $F_2(r)\cos\varphi$, waar r den afstand der aangrijpingspunten van beide vectoren, en φ hun hoek na evenwijdige overbrenging naar eenzelfde punt hunner verbindingslijn voorstelt, dan weten we dat deze functie χ, bij integreering van b.v. E over een gesloten gebogen R_{n-2}, die we e noemen, geeft niet alleen de negatieve energie van een magnetische $^{n-1}$schaal met eenheidssterkte, begrensd door e, in het veld van een eenheidswervel loodrecht op F, maar ook de ontbondene langs F van de vectorpotentiaal, veroorzaakt door een wervelstelsel om e met eenheidssterkte.

Hieruit volgt dan weer voor de vectorpotentiaal V van een wervelelement, dat zij bij integreering van het wervelelement tot een wervelstelsel om een gesloten gebogen gebogen R_{n-2} wordt de volgens § VII bepaalde vectorpotentiaal van dien wervel-R_{n-2}; zoodat de vectorpotentiaal van een willekeurige $\frac{1}{2}X$ wordt verkregen als integraal van de vectoren V der wervelelementen, m. a. w.:

$$\tfrac{1}{2}X = \overline{\backslash 2/} \int \frac{\overline{\backslash 1/}\,\tfrac{1}{2}X}{k_n} F_2(r)\,d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

waarin voor elk punt de vectorelementen der integraal eerst evenwijdig worden overgebracht naar dat punt, en daar gesommeerd.

X. Beschouwen we dus een willekeurig krachtveld als teweeg-

gebracht door zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels), dan kunnen we ons dat zoo voorstellen, dat beide afgeleiden zich door de ruimte voortplanten volgens een in het oneindige verdwijnende functie van den afstand, en daardoor de potentiaal van het veld doen ontstaan.

Immers het veld X is de totale afleiding van de potentiaal:

$$\int \frac{\overline{\nabla}^2 X}{k_n} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overline{\nabla}^1 X}{k_n} F_2(r)\, d\tau.$$

De demping van de scalarpotentiaal is de sterkere; deze toch wordt op groote afstanden van de orde $e^{-(n-1)r}$; de vectorpotentiaal slechts van de orde $re^{-(n-2)r}$.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen biedt een mededeeling aan van den Heer A. Pannekoek: *„De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype."*

(Mede aangeboden door den Heer E. F. van de Sande Bakhuijzen).

Het onderzoek van de spectra der sterren, waarbij bleek, dat zij met weinige uitzonderingen, zich in een kontinue reeks laten rangschikken, heeft tot de algemeene opvatting geleid, dat zij verschillende ontwikkelingsstadia voorstellen, die elke ster achtereenvolgens doorloopt. Vogels verdeeling in drie typen wordt als een natuurlijk stelsel beschouwd, omdat deze typen het heetste en vroegste, het verder ontwikkelde, en het meest afgekoelde stadium voorstellen. Voor de onderverdeelingen geldt dit echter niet meer; het verschillend uiterlijk der lijnen, dat hierbij als maatstaf dient, beantwoordt niet aan verschillende graden in de genoemde ontwikkelingsstadia. Uitgesproken kunstmatig in veel hooger mate is de klassificatie met letters, die Pickering in zijn Draper Catalogue aannam; zij werd geboden door de practische behoefte, de duizenden met het objectiefprisma opgenomen sterspectra te klassificeeren. Na zuivering van de invloeden, die de onduidelijkheid der spectra door geringe dispersie en helderheid op deze verdeeling uitoefende, komt toch de natuurlijke verwantschap der spectra te voorschijn, en dan heeft deze klassificatie boven die van Vogel dit wezenlijk voordeel, dat het 2de type nog onderverdeeld wordt. De natuurlijke groepen, die wij kunnen onderscheiden, zijn nu: klasse A, de hoofdmassa der witte sterren (type Sirius), I*a* bij Vogel; klasse B, kleiner getal van deze door de heliumlijnen onderscheiden Orionsterren, I*b* bij Vogel. In de kontinue reeks behooren de laatste vóór het eerste type te

staan en worden daarom ook 0de type genoemd. Klasse F vormt den overgang naar het tweede type (Procyon); klasse G is het type van de zon en Capella (hiervan zijn de E sterren de onduidelijke representanten); klasse K omvat de roodere sterren van het 2de type, die naar het derde naderen, zooals Arcturus (hier rekent Pickering de H en I bij, als onduidelijke representanten). Het 3de type heet in de Draper Catalogue klasse M.

De continuiteit der sterspectra komt nog beter uit in de verdeeling die Miss A. Maury gegeven heeft. (Annals Harv. Coll. Obs. Bd. 28). Hier is de hoofdmassa der sterspectra in 20 aansluitende klassen gerangschikt, waartusschen nog overgangen aangenomen worden. Klasse I—IV zijn de Orionsterren, VI—VIII het eerste type, IX—XI de overgang naar het 2de type, XIII—XIV het zuivere 2de type als de zon, XV beantwoordt aan de roodere Arcturussterren, XVII—XX vormen het derde type. Bedenkt men nu hierbij dat van klasse I tot III een groep lijnen uitsterft, n.l. de waterstoflijnen der andere reeksen, die voor de Wolf-Rayetsterren of zoogenaamde 5de type sterren (by Vogel II*b*) karakteristiek zijn, zoo ligt het voor de hand, de reeks naar voren met deze sterren te verlengen, zooals door Miss Cannon bij het onderzoek der zuidelijke spectra (H. C. O. Ann. Bd. 28) ook gedaan is [1]).

Een gedeelte van al deze sterren vertoont een afwijkende relatieve intensiteit der metaallijnen; Vogel en Scheiner merkten dit reeds vroeger by α Cygni en α Persei op (Public. Potsdam Bd. 7, 2de deel). Maury vond in nagenoeg alle klassen van III tot XIII vertegenwoordigers van deze groep, waaruit zij een paralelle reeks vormde, met III*c*—XIII*c* aangeduid, waartegenover de hoofdmassa dan a-sterren heeten.

Naar de meest gangbare opvattingen doorloopt een ster nu achter-

---

[1]) De karakteristieke lijnen der Wolf-Rayetsterren zijn, blijkens de resultaten van Campbell (Astronomy and Astrophysics XIII, blz. 448) in twee groepen te onderscheiden, en naar de relatieve intensiteit dezer twee groepen zijn deze sterren in een voortloopende reeks te ordenen. De eene groep wordt door de eerste bijreeks en de eerste lijn van de hoofdreeks van waterstof gevormd: Hβ' 5414, Hγ' 4542, Hδ' 4201, hoofdlijn 4686); zij is het, die in de klasse I—III van Maury als donkere lijnen voorkomt en uitsterft, en naar de andere zijde (klasse 0*e* tot 0*b* Cannon) meer en meer, tegelijk met de gewone H lijnen, tot emissielijnen omkeert. De andere groep, die van hier af t. o. v. de waterstoflijnen steeds sterker wordt, bestaat uit breede banden, van onbekenden corsprong, wier middens, naar Cannon's metingen op γ Velorum de golflengten 5807, 5692, 5594, 5470, 4654, 4443 hebben. De helderste band is 4654; haar relatieve intensiteit t. o. v. de H lijn 4689 neemt in de reeks van sterren: 4, 47, 5, 48, 42 (nrs. van Campbell) voortdurend toe.

eenvolgens al deze aaneensluitende ontwikkelingsvormen. Zij begint dan als een uiterst ijle gasmassa, die door inkrimping in temperatuur stijgt, een maximum van temperatuur bereikt, en vervolgens onder verdere inkrimping weer in temperatuur afneemt. Vóór het temperatuurmaximum bereikt wordt, vindt een maximum van lichtuitstraling plaats; voorbij het temperatuurmaximum neemt door samenwerking van beide oorzaken, temperatuurdaling en verkleining van volume, de lichtkracht snel af. Dat de 1ste type sterren heeter zijn, dan de 2de, staat, blijkens de wittere kleur, wel vast; of het temperatuurmaximum hier, of bij de Orionsterren ligt is echter onzeker.

De hier vermelde ontwikkelingsgang van een ijle gasmassa tot een dicht en koud lichaam, met eerst stijgende en later weer dalende temperatuur, is in overeenstemmiug met de physische wetten. Dat echter met de phasen van deze ontwikkeling de verschillende spectraaltypen overeenstemmen, is slechts een hypothese, een meer of minder waarschijnlijk vermoeden; want een werkelijke overgang van een ster van het eene naar het andere type is nog niet waargenomen. Indirect laat zich dat vermoeden op de proef stellen door een onderzoek van de lichtkracht der sterren. Bij de geschetste ontwikkeling moet de lichtkracht van eenzelfde ster eerst stijgen, daarna afnemen; de gemiddelde schijnbare helderheid der sterren, op denzelfden afstand tot ons zonnestelsel gereduceerd, moet dus op die wijze met de spectraalklasse wisselen, dat zij daar, waar de grootste lichtkracht heerscht, een maximum heeft en in volgende stadia der ontwikkeling weer afneemt.

§ 2. Bij dergelijke onderzoekingen is het gebruik van direct gemeten parallaxen als maat voor den afstand door hun gering aantal in 't algemeen uitgesloten. Een andere maatstaf vindt men in de eigen beweging der sterren, waarbij als onderstelling aangenomen wordt, dat de werkelijke lineaire snelheid voor verschillende spectraalklassen dezelfde is. Deze methode werd in 1892 door W. H. S. Monck toegepast [1]) op de Bradley-sterren in den Draper Catalogue. Hij vond de eigen beweging van de B.-sterren 't kleinst, dan volgden die van de A.-sterren; veel grooter is de geniddelde E. B. van de F.-sterren [2]) welke ook die van de G. H. en K-sterren, evenals die der M.-sterren aanmerkelijk overtreft. Hij besloot hieruit, dat deze F.-sterren (de tot het 1ste type naderende sterren van het 2de type) ons het naastbij

[1]) Astronomy and Astrophysics XI. pag. 874.

[2]) Hij noemt deze ten onrechte aldoor „Capellan stars" omdat in den Dr. Cat. Capella F. genoemd wordt, hoewel zij eigenlijk bij de zon en de G.-sterren behoort.

zijn, en dus ook geringer uitstralingsvermogen hebben dan de gelere en roodere sterren van het tweede type. „Researches on binary stars seem to establish that this is not due to smaller average mass and it would therefore appear, that these stars are of the dullest or least light-giving class — more so not only than the Arcturian stars but than those of the type of Antares or Betelgeux" (pg. 878). Deze uitkomst is niet in overeenstemming met de gangbare meening, dat uit de F.-sterren zich door contractie en afkoeling achtereenvolgens G. K. en M.-sterren ontwikkelen.

Zij wordt echter bevestigd door een pas verschenen onderzoek van EJNAR HERTZSPRUNG: Zur Strahlung der Sterne[1]), waarin de klasseverdeeling der spectra van MAURY gevolgd wordt. Deze vindt voor de gemiddelde stergrootte, op een eigen beweging van 0″,01 gereduceerd, de waarden in onderstaande tabel, waarachter gevoegd zijn de daarmee overeenkomende E. B. die met een stergrootte 4.0 correspondeeren.

Spectrum		Magn. voor	E. B. voor
Maury	Draper C.	E. B. 0″ 01	Magn. 4.0
			″
II—IV	B	4.37	0.012
V—VI	B—A	7.25	0.045
VII—VIII	A	8.05	0.065
IX—XI	F	9.06	0.103
XII—XIII	F—G	11.23	0.279
XIII—XIV[2])	G	7 93	0.061
XV	K	9.38	0.119
XV—XVI	K—M	7.77	0.057
XVII—XVIII	M	8.28	0.072

Hier blijkt ook de E.B. voor gr. 4,0 het grootst, dus de lichtkracht het kleinst te zijn voor de klassen XII en XIII, die den overgang van F tot G vormen; voor de latere ontwikkelingsstadia neemt de lichtkracht weer toe.

§ 3. Een betere maat voor den gemiddelden afstand van een groep sterren dan de E. B. is de parallactische verschuiving. De publicatie

[1]) Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie Bd. III. S. 429.

[2]) Cursief gedrukte Romeinsche cijfers duiden bij MAURY den overgang naar de volgende klasse met een hooger nummer aan.

van n°. 9 van de „Publications of the astronomical Laboratory at Groningen", waar voor alle Bradley sterren de componenten τ en v van de E. B. met de verdere hulpgrootheden berekend zijn, maakte het gemakkelijk, dit onderzoek uit te voeren. Zijn τ en v de componenten der E. B. loodrecht op, en in de richting naar het antapex, en is λ de sphaerische afstand ster-apex, dan is voor een groep van sterren

$$q = \frac{\Sigma\, v \sin \lambda}{\Sigma \sin^2 \lambda}$$

de parallactische verschuiving, d. i. de snelheid van het zonnestelsel, gedeeld door een gemiddelden afstand der groep. Het gemiddelde van de andere componente $\frac{1}{n} \Sigma\, \tau$ is bij toevallige verdeeling der richtingen gelijk aan de helft van de gemiddelde lineaire snelheid, gedeeld door den afstand.

De verschillende groepen hebben nu nog een verschillende gemiddelde grootte. Daar het hier om conclusies omtrent de lichtkracht te doen is, en grootte en E. B. beide van den afstand afhankelijk zijn, werd de berekening ook uitgevoerd na reductie op grootte 4.0; d. w. z. elke ster werd vervangen gedacht door een, die in snelheid en lichtkracht aan de werkelijke volkomen gelijk is, maar op zulk een afstand geplaatst is, dat haar schijnbare grootte 4.0 is. Noemt men de verhouding, waarin de E. B. daarbij vergroot wordt

$$p = 10^{0.2\,(m-4)}$$

dan wordt dus

$$q_{4.0} = \frac{\Sigma\, pv \sin \lambda}{\Sigma \sin^2 \lambda} \quad \text{en} \quad \tau_{4.0} = \frac{\Sigma\, p\tau}{n}.$$

Bij deze berekening werden de klassen van Maury als basis genomen. Uitgesloten werd 61 Cygni, omdat deze ver buiten de maat van alle andere valt, terwijl in plaats van de groep van den Grooten Beer ($\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$) maar één ster ($\varepsilon$) genomen is. In de volgende tabel (zie p. 99) zijn de uitkomsten van beide berekeningen samengesteld.

In beide reeksen van uitkomsten treedt het door Monck en Hertzsprung gevonden verschijnsel duidelijk op. Wij hebben echter niet deze getallen $\tau_{4.0}$ en $q_{4.0}$ gebruikt, maar ze eerst nog gewijzigd, omdat eerst na afloop dezer berekening de opmerking van Hertzsprung ons ter kennis kwam, dat de bovenvermelde c-sterren zich geheel afzonderlijk gedragen; hun E. B. en parallaxe zijn zooveel kleiner dan die der a-sterren van dezelfde klassen, dat ze als een geheel aparte groep met veel grooter lichtkracht en afstand moeten beschouwd

Spectrum Maury	Spectrum Dr. Cat.	Typische ster	n	Gem. m	Gem. τ	q	$\tau_{4.0}$	$q_{4.0}$
					"	"	"	"
I—III	B	ε Orionis	33	3.57	0.007	0.018	0.007	0.013[5]
IV—V	B—A	γ Orionis	48	4.31	0 011	0 035	0.014	0.036
VI—VIII	A	Sirius	93	3.92	0.040	0.054	0.038	0.061
IX—XII	F	Procyon	94	4.14	0.089	0.153	0.095	0.136
XIII—XIV	G	Capella	69	4.08	0.141	0.157	0.160	0.199
XV	K	Arcturus	101	3.90	0.123	0.119	0.120	0.096
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	3.85	0.049	0.068	0.050	0.061

worden [1]). De berekening is dus herhaald na uitsluiting der *c* en *ac*-sterren.

De uitkomsten zijn in de volgende tabel (p. 100) neergeschreven voor alle klassen van MAURY afzonderlijk; daarbij is klasse XV in drieën gesplitst: XV *A* zijn die, welke met α Boötis, XV *C* die welke met de roodere α Cassiopeiae overeenstemmen, terwijl in XV *B* al de overige verzameld zijn, die niet met zekerheid tot een der beide groepen te brengen zijn.

De waarden voor $\tau_{4.0}$ en $q_{4.0}$ verschillen zeer weinig van die der vorige tabel. Uitgaande van de waarde voor de snelheid van het zonnestelsel $= 4.2$ zonsafstanden, leveren de q's, bij deeling door 4.2 de gemiddelde parallaxe van sterren van verschillende spectraalklasse voor de grootte 4.0 ($\pi_{4.0}$). Omgekeerd vindt men uit de q's ook de relatieve lichtkracht van deze stertypen, waarvoor hier het getal genomen is, dat uitdrukt hoeveel keer de helderheid die van de grootte 4.0 overtreft, als ze op een afstand gesteld wordt, waarvoor $q = 0''.10$ is, dus de parallaxe $0''.024$. Ten slotte bevat de laatste kolom $2\tau/q$ de verhouding tusschen de gemiddelde lineaire snelheden van de stergroep en ons zonnestelsel.

[1]) Bij zijn samenstelling van parallaxen vraagt HERTZSPRUNG of misschien de heldere Zuidelijke ster α Carinae (Canopus) ook tot de *c*-sterren behoort; buiten de onmeetbaar kleine parallaxe en de kleine E. B. heeft hij er echter geen aanwijzing voor. In de bewerking van de zuidelijke spectra heeft Miss CANNON op het onderscheid tusschen α en *c*-sterren niet gelet. Toch kan deze vraag bevestigend beantwoord worden; op de beide spectrogrammen van deze ster, die aan haar werk toegevoegd zijn, vindt men zeer duidelijk de lijn 4053.8 die bij Capella en Sirius ontbreekt, en een typische lijn voor de *c*-sterren is. Hieruit blijkt, dat ι Carinae inderdaad een *c*-ster is.

Klasse	n	$\tau_{c\,4.0}$	$q_{4.0}$	$2\tau/q$
		"	"	
I	5	0.009	0.022	0.8
II	13	005	009	1.1
III	14	006	015	0.8
IV	18	014	023	1.2
IV	16	016	044	0.7
V	11	009	042	0.4
VI	16	030	068	0 9
VII	30	040	086	0 9
VIII	41	043	055	1.6
IX	25	050	064	1.6
X	16	070	171	0.8
XI	22	103	061	3.3
XII	23	170	282	1 2
XIII	18	297	346	1.7
XIV	21	192	305	1.3
XIV	20	077	025	6.2
XV *A*	26	234	148	3.2
XV *B*	35	105	070	3.0
XV *C*	40	059	087	1 4
XVI	19	049	071	1.4
XVII	19	049	032	3.1
XVIII	16	050	075	1.3
XIX—XX	7	057	078	1.5

In de volgende tabel (p. 101) zijn deze waarden, op dezelfde wijze als vroeger, saamgetrokken:

Spectrum Maury	Dr. Cat.	Typische ster	n	$\tau_{4.0}$	$q_{4.0}$	$\pi_{4.0}$	L voor $q=0''.10$	$2\tau/q$
				"	"	"		
I—III	B	ε Orionis	32	0.005⁵	0 014	0.0033	51	0.8
IV—V	B—A	γ Orionis	45	0.013	0.036	0.0086	7.7	0.7
VI—VIII	A	Sirius	87	0.040	0.063	0.015	2.5	1.3
IX—XII	F	Procyon	86	0.101	0.141	0.034	0.50	1.4
XIII—XIV	G	Capella	59	0.182	0.224	0.053	0.20	1.6
XV	K	Arcturus	101	0.120	0.096	0.023	1.1	2.5
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	0.050	0.061	0.015	2.7	1.6

§ 4. Conclusies uit deze tabel. De getallen uit de laatste kolom zijn niet constant, maar vertoonen een verloop. *De gemiddelde lineaire snelheid is dus niet voor alle stersoorten constant, maar neemt toe, naarmate men in de spectrumreeks bij verdere ontwikkelingsstadia komt.* (Of de daling voor het 3de type, klasse M, reëel is, moeten wij voorloopig in het midden laten). Dat de lineaire snelheid der Orionsterren klein is, was reeds bekend en blijkt ook uit de radiale snelheden. Terwijl Campbell voor de snelheid van het zonnestelsel 19.9 KM. vond, en voor de gemiddelde snelheid van alle sterren 34 KM., vonden Frost en Adams uit de door hen gemeten radiale snelheden van 20 Orionsterren, na correctie voor zonsbeweging als gemiddelde 7.0 KM. [1]), dus ware gemiddelde snelheid in de ruimte 14 KM., waaruit de verhouding 0.7 voor $2\tau/q$ volgt. De Orionsterren zijn dus de bijzonder langzaam loopende, de Arcturussterren (klasse XV) de snelst loopende sterren.

§ 5. Beschouwt men nu de waarden van $q_{4.0}$ of de daaruit afgeleide van $\pi_{4.0}$ of $L_{0.10}$, dan blijkt, dat bij voortschrijden in de ontwikkelingsreeks van de vroegste Orionsterren tot het Capella- en zonstype G de lichtkracht voortdurend afneemt. Dat de q voor het tweede type in zijn geheel grooter is, dan voor het eerste (incl. de Orionsterren), was reeds lang bekend; Kapteyn heeft indertijd uit het geheele Bradley-Draper materiaal afgeleid, dat door elkaar de 2de type sterren (F G K) 2,7 keer zoo dichtbij, en dus 7 keer zoo lichtzwak zijn, als de eerste-type sterren (A en B). Deze uitkomst is geheel in overeenstemming met de gewone ontwikkelingsleer, volgens welke uit 1ste type sterren door inkrimping en afkoeling het 2de type moet ontstaan.

[1]) Publications Yerkes Observatory. Vol. II. pag. 105.

Let men nu op de onderafdeelingen, dan blijken allereerst de Orionsterren de A-sterren in lichtkracht sterk te overtreffen, en in de Orionsterren zelf overtreffen die, welke het vroegste stadium innemen, de latere nog weer sterk. Vergeleken met het zonnetype G hebben de Siriussterren 12 keer, de overgang naar de Orionsterren 38 keer, het type van ε Orionis zelfs 250 keer zooveel lichtkracht. Deze uitkomst laat zich ook goed vereenigen met de onderstelling dat eenzelfde ster achtereenvolgens de toestanden van klasse I tot XIV doorloopt; men moet dan aannemen, dat de dichtheid des te geringer is, naarmate men in een lagere klasse komt. Of de temperatuur der Orionsterren hooger is, dan die der Siriussterren, of lager, kan hierdoor niet uitgemaakt worden; ook in het laatste geval kan de grootere ijlheid, dus het grooter oppervlak de werking van geringer lichtuitstralend vermogen meer dan opheffen. Spectraalphotometrische metingen moeten dit uitmaken.

Daar de Wolf-Rayetsterren aan klasse I aansluiten, is een onderzoek van hun eigen beweging, door KAPTEYN in uitzicht gesteld, van bijzonder belang.

Komt men nu echter in de reeks voorbij de G sterren, het zonstype, dan neemt de lichtkracht weer toe. De hier verkregen waarden voor q bevestigen in dit opzicht de uitkomsten van MONCK en HERTZSPRUNG.

Er is tegen het getuigenis der q's slechts één tegenwerping te maken, n.l. dat mogelijk deze klassen K en M met de zon een gemeenschappelijke eigen beweging hebben, waardoor de q geen goede maat voor de afstand is. Mag dit ook a priori onwaarschijnlijk zijn, men kan het bovendien nog op de proef stellen door een materiaal, dat, anders voor dit soort onderzoekingen te gebrekkig, juist op dit punt waardevol uitsluitsel kan geven, n.l. door de direct gemeten parallaxen. HERTZSPRUNG geeft middelwaarden van de op grootte 0,0 gereduceerde gemeten parallaxen, waarnaast wij hier de waarden gezet hebben, voor eenigszins andere groepen uit onze $\pi_{4.0}$ afgeleid:

	Waargen. $\pi_{0.0}$		Uit q berek. $\pi_{0.0}$
II—IV	0″.0255	(6)	
IV—VI	0 .106	(5)	
VII—VIII	0 .153	(10)	
IX—XI	0 .226[1])	(6)	
XII—XIII	0 .442	(2)	
XIV	0 .567	(5)	
XV	0 .151	(8)	
XVI	0 .171	(3)	
XVII—XVIII	0 .115	(3)	
			I—III 0″.021
			IV—V 0 .054
			VI—VIII 0 .094
			IX—XII 0 .21
			XIII—XIV 0 .33
			XV 0 .14
			XVI—XX 0 .096

[1]) α Carinae uitgesloten.

Over 't geheel zijn de getallen van HERTZSPRUNG wat grooter, wat daaruit licht te verklaren is, dat een aantal parallaxen, op grond van groote E. B. gemeten, boven het gemiddelde zullen zijn. In elk geval blijkt hier voldoende, dat ook de direct gemeten parallaxen de stijging van de lichtkracht voorbij klasse XIV duidelijk aanwijzen, en dat dus voor het aannemen van een gemeenschappelijke beweging met de zon voor de verdere groepen niet de minste grond bestaat.

Het is dus niet te betwijfelen, dat de K en M sterren grooter lichtkracht hebben dan de F en G sterren. MONCK leidt daaruit af, dat zij een grooter lichtuitstralend vermogen hebben, daar uit de dubbelsterren een over het geheel gelijke massa volgt.

Dat dit laatste uit de dubbelsterren niet kan afgeleid worden, zal hieronder blijken. Bovendien is MONCK's conclusie omtrent het grooter lichtuitstralend vermogen der K en M sterren niet aan te nemen. Dit vermogen hangt bij gloeiende lichamen af van de temperatuur der uitstralende lagen en van de atmospherische absorpties. Bij de onverzwakte straling gaat een grooter uitstraling gepaard met blauwer licht, (want het maximum der uitstraling wordt naar kleiner golflengten verschoven), omdat beide een gevolg van hooger temperatuur zijn. De algemeene absorptie door een atmospheer is ook het grootst voor kleinere goflengten, zoodat een percentsgewijs geringere overblijvende straling met een roodere kleur gepaard gaat. Er is daarom niet aan te twijfelen, dat een roodere kleur in elk geval met een geringer lichtuitstraling per eenheid van oppervlak correspondeert.

Dan blijft er slechts één verklaringswijze over: *de K en M sterren (de roodere* 2de *type sterren als Arcturus en het* 3de *type) bezitten door elkaar aanmerkelijk grooter oppervlak en volume, dan de overige* 2de *type sterren van de klassen F en G.* Deze uitkomst is in strijd met de gangbare voorstelling van de ontwikkeling der sterren, volgens welke uit de geelwitte F en G sterren door verdere *inkrimping* en afkoeling de roodere K en dan de M sterren ontstaan.

§ 6. Vraagt men nu naar de nadere gesteldheid dezer sterren, dan lijkt het niet zeer aannemelijk, dat zij een bijzonder kleine dichtheid hebben; de lage temperatuur, de sterk absorbeerende dampen wijzen op een sterk gecondenseerd stadium. Eer laten deze omstandigheden een grooter dichtheid verwachten (t. o. v. de F en G sterren) dan een kleiner. Uit de grooter volumina volgt dan, *dat de K en M sterren aanmerkelijk grooter massa's hebben, dan de F en G's.* Deze uitkomst is nog merkwaardiger in verband met het boven gevondene omtrent hun grooter gemiddelde snelheid. Wanneer de sterren van ons sterrestelsel in dien zin een groep vormen, dat

hun snelheden binnen de groep bepaald worden door hun onderlinge aantrekkingen, dan mag men verwachten dat dooreen genomen de snelheden des te grooter zijn, naarmate de massa's kleiner zijn. Voor de Orionsterren met kleine snelheid ontstaat hieruit geen moeilijkheid; want dezelfde omstandigheden, die ons veroorloven hun evengroote massa toe te schrijven als de A, F en G sterren, veroorloven ons ook, hun een grooter massa toe te kennen. De K sterren, die zoowel een grooter massa, als een grooter snelheid hebben, worden echter door deze stelling tot een afzonderlijke groep gestempeld, die door welke reden dan ook, *oorspronkelijk* met grooter snelheden moet toegerust zijn. Arcturus, met haar onmeetbaar kleine parallaxe en groote E B, is door haar buitensporig groote lineaire snelheid en buiten mate groote lichtkracht dus in het overdrevene een type voor deze geheele klasse, waarvan zij de helderste vertegenwoordigster is. Het zou daarom de moeite waard zijn, het systematische in de beweging der K sterren, die tot nog toe zonder onderscheid met de F en G sterren als 2de type samengenomen werden, afzonderlijk te onderzoeken.

Mocht echter deze uitkomst omtrent de grootere massa der K en M sterren niet bevestigd worden, dan blijft als eenige andere mogelijkheid de onderstelling, *dat de dichtheid dezer sterren uiterst gering is.* In dit geval zou hun massa dezelfde kunnen zijn, als van andere sterren, en kunnen zij ontwikkelingsstadia van dezelfde lichamen voorstellen. Waar deze dan echter in de ontwikkelingsreeks thuis behooren, blijft hierbij een raadsel. Er is een regelmatige continuiteit in de opeenvolging van F—G—K—M; al naar men de ontwikkeling in de eene of in de andere richting onderstelt, gaat bij den overgang G—K afkoeling met uitzetting, of verhitting met inkrimping gepaard. Men kan het raadselachtige, dat in deze onderstelling ligt ook aldus uitdrukken; terwijl in de natuurlijke ontwikkeling der hemellichamen, zooals die naar onze opvattingen plaats vindt, wel de temperatuur een maximum heeft, maar de dichtheid doorloopend moet toenemen, zouden de hier verkregen cijfers naar deze interpretatie op een maximum van dichtheid in de spectrumklassen F en G wijzen.

In Vol. XI van Astronomy and Astrophysics heeft Maunder reeds opmerkzaam gemaakt op verschillende omstandigheden, die er op wijzen, dat het spectraaltype niet zoozeer een aanduiding is van verschillend ontwikkelingsstadium als wel van verschillende samenstelling "There seems to me but one way of reconciling all these different circumstances viz: to suppose that spectrum type does not primarely or usually denote epoch of stellar life, but rather a fundamental

difference of chemical constitution" [1]). Onder deze feiten is b.v. een van de belangrijkste deze, dat de verschillende Plejadensterren, die in helderheid, en door den gelijken afstand dus ook in werkelijke grootte, zeer uiteenloopen, toch allen precies hetzelfde spectrum hebben. De hier gevonden uitkomst is een bevestiging van zijn onderstelling.

Men kan geneigd zijn, eenig verband te zoeken tusschen deze K en M-sterren, en de *c*-sterren, die volgens HERTZSPRUNG ook een veel grooter lichtkracht, dus óf geringer dichtheid óf grooter massa hebben, dan de overeenkomstige *a*-sterren; temeer daar deze *c*-sterren niet verder dan klasse XIII reiken. Toch schijnt ons dit onwaarschijnlijk; de K-sterren zijn talrijk, vormen 20 % van alle sterren, terwijl de *c*-sterren zeldzaam zijn. Bovendien is het spectrum van alle K-sterren in de relative intensiteit van de metaallijnen volkomen identiek met de *a*-sterren van vorige klassen, zooals de zon en Capella. Voorloopig moet dus onbeslist blijven, in welke andere spectra wij andere levensphasen van de K, en in welke van de *c*-sterren moeten zoeken. De *c*-sterren liggen op een paar na alle in of vlak bij den melkweg: een eigenschap, die zij met de Wolf-Rayetsterren en ook met het 4de type van SECCHI (Vogel III*b*) gemeen hebben, met welke zij echter in spectrum geen uit gemeenschappelijke lijnen blijkende verwantschap hebben.

§ 7. Men kan nog trachten, de hier gevonden gesteldheid der Arcturus- en der 3de type sterren door andere gegevens op de proef te stellen, met name door die, welke de dubbelsterren ons verschaffen. De optische dubbelsterren kunnen echter omtrent de massa der sterren op zich zelf niets leeren, gelijk uit de volgende overweging blijkt (o.a. ook in NEWCOMB „De Sterren" te vinden). Denkt men een dubbelster n-keer zoo dichtbij geplaatst, terwijl alle afmetingen n-keer zoo klein worden, doch dichtheid en uitstralingsvermogen dezelfde blijven. Dan neemt de massa in de verhouding n^3 af, de baanafmeting a in de verhouding n, dus de omloopstijd blijft gelijk; de lichtkracht wordt n^2-keer zoo klein, dus de schijnbare helderheid blijft gelijk evenals de schijnbare afmetingen van de loopbaan, m. a. w, zij schijnt ons volkomen identiek met vroeger. De massa is dus niet onafhankelijk van den afstand te vinden. Noemt men a de angulaire halve groote as, P de omloopstijd, δ de dichtheid, λ het lichtuitstralend vermogen, π de parallaxe en ϱ den straal van het sterlichaam, dan is $\pi^3 M = \frac{a^3}{P^2}$; de massa M is een getallenconstante $\times \varrho^3 \delta$, de schijnbare

[1]) Stars of the first and second types of spectrum. blz. 150.

helderheid H een constante $\times \pi^2 \varrho^2 \lambda$. Elimineert men hieruit parallaxe en straal, dan wordt

$$H^3 \frac{P^4}{a^6} = c \frac{\lambda^3}{\delta^2}.$$

Uit de bekende grootheden, baanelementen en helderheid vindt men dus een betrekking tusschen de physische grootheden dichtheid en uitstralingsvermogen, onafhankelijk van de mathematische dimensies. Deze betrekking is reeds herhaaldelijk afgeleid. MAUNDER geeft in het straks geciteerde stuk waarden voor de dichtheid $\delta = c \left(\frac{\lambda}{H}\right)^{3/2} \frac{a^3}{P^2}$ in de onderstelling van gelijke λ; hij vond voor de Siriussterren (1ste type) 0,0211, voor de zonnesterren (alle van 't 2de type) 0,3026, dus 14 keer zoo groot gemiddeld; evengoed kan men zeggen, dat bij gelijke dichtheid het stralingsvermogen der Siriussterren 6 keer zoo groot is; de juiste uitdrukking zou zijn, dat het quotient λ^3/δ^2 bij de Siriussterren 200 keer zoo groot is als bij de zonnesterren.

In anderen vorm is dezelfde berekening door HERTZSPRUNG uitgevoerd, met behulp van AITKEN's lijst van dubbelster-elementen [1]). Hij zet deze uitdrukking met behulp van $-2{,}5 \log H = m$ om in grootteklassen; stelt men in den logarithmische vorm

$$3 \log H + 4 \log P - 6 \log a = const. + 3 \log \lambda - 2 \log \delta$$

$$m - {}^{10}/_3 \log P + 5 \log a = m_r$$

dan is $m_r = const. - 2{,}5 \log \lambda + {}^5/_3 \log \delta$.

Groepeert men de waarden van m_r naar het spectrum volgens den Draper Catalogue (voor de Zuidelijke sterren naar CANNON; α Centauri werd naar de helderste componente G genomen), dan vindt men als middelwaarden

Klasse	A	-2.92 (9 sterren -4.60 tot -1.09)
,,	F	-1.32 (19 ,, -3.61 ,, $+0.14$)
,,	G en E	-0.49 (11 ,, -1.60 ,, $+1{,}28$)

De 3 sterren van het type K (met H) geven -4.88 (γ-Leonis), -1.05 en $+0{,}87$, dus zoo sterk uiteenloopend, dat er geen resultaat van waarde uit te halen is. Op de buitengewoon hooge waarde voor λ^3/δ^2 die γ Leonis geeft, is reeds meermalen met verwondering de aandacht gevestigd. Terwijl bij de andere klassen de uitersten van m_r bij een grooter aantal sterren 3.5 grkl. uiteenloopen, wijkt γ Leonis bijna 5 klassen van het midden der beide anderen af, d. w. z. dat haar lichtuitstralend vermogen honderd keer zoo groot, of haar dichtheid duizendmaal zoo klein is, als bij deze andere. Voor de

[1]) Lick Observatory Bulletin Nr. 84.

klassen A en F vinden wij λ^3/σ^2 640 resp. 8 keer zoo groot als voor klasse G; conclusies omtrent klasse K, als geheel, waar het hier vooral om te doen is, zijn er niet uit te trekken. Mogelijk, dat een onderzoek van dubbelsterren met onzeker bekende baanbeweging (waarbij dan hulponderstellingen noodig zijn) meer resultaten kan opleveren.

Over de massa zelf kunnen daarentegen de spectroscopische dubbelsterren iets leeren. De waarnemingselementen $a \sin i$ en P geven hier onmiddellijk $M \sin^3 i$; daar niet aan te nemen is, dat tusschen spectraaltype en helling van de loopbaan t. o. v. de gezichtslijn eenig verband bestaat, mag men 't gemiddelde van $\sin^3 i$ voor alle groepen gelijk nemen. Bij de sterren, waarvan slechts één componente zichtbaar is, bevat de waarnemingsgrootheid nog een onbekend element, nl. de verhouding β van de massa der onzichtbare tot die der zichtbare ster. Is hier a de halve groote as van de baan van de zichtbare ster om het gemeenschappelijk zwaartepunt, dan is

$$\frac{a^3 \sin^3 i}{P^2} = M \frac{\beta^3}{(1+\beta)^2} \sin^3 i$$

Het is natuurlijk niet vaststaand, dat β door elkaar bij alle spectraalklassen hetzelfde is; is dit niet het geval, dan kunnen de M's zich nog eenigszins anders gedragen, dan de hier berekende waarden van $\frac{a^3 \sin^3 i}{P^2}$.

Ongelukkigerwijze zijn onder het groote aantal spectroskopische dubbelsterren, dat tot nog toe ontdekt is (in Lick Observatory Bulletin N°. 79 worden er 147 opgeteld) nog slechts van zeer weinig de baanelementen bekend. Deze geven, naar de spectra gerangschikt

Groep II—IV (B) Oriontype		Groep VI—VIII (A) Siriustype	
o Persei	0.61	β Aurigae	0.56
η Orionis	2.51	ζ Ursae	(3.41) [1]
δ Orionis	0.60	Algol	0.72
β Lyrae	7.85	α Androm.	0.36 [2]
α Virginis	0.33	α_2 Gemin.	0.002
V Puppis	34.2		

[1]) Bij ζ Ursae is voor a de h.gr.as der relatieve baan genomen; dus naar verhouding is dit getal een onbekend aantal malen te groot.

[2]) Aangenomen periode 100 dagen, baansnelheid 32.5 K.M.

Groep XII—XIV *a* (F—G)		Groep XII—XIV *ac*	
Zonstype		*a* Ursae min.	0.00001
a Aurigae	0.185	ζ Geminorum	0.0023
χ Draconis	0.120	η Aquilae	0.0029
(W Sagittarii	0.005)	δ Cephei	0.0031
(X Sagittarii	0.001)		
ι Pegasi	0.117	Groep XV (K)	
η Pegasi	0.234	β Herculis	0.061

De K sterren vinden hier maar één vertegenwoordiger, en daardoor levert ons ook dit materiaal niets, dat dienen kan, de verkregen uitkomsten omtrent dit stertype op de proef te stellen. Toch biedt deze tabel aanleiding tot eenige opmerkelijke conclusies. Ondanks het kleine aantal blijken hier de Orionsterren de andere duidelijk in massa te overtreffen, terwijl de Siriussterren ook wat grooter massa dan de zonnesterren schijnen te hebben. Bijzonder opvallend is echter de geringe massa der tot *a* naderende *c*-sterren. *De c-sterren vereenigen dus in zich een zeer groote lichtkracht en een zeer kleine massa, dus moet hun dichtheid buitengewoon gering zijn.* Wanneer het meer dan toeval is, dat de drie regelmatig veranderlijke sterren van korte periode, die bij MAURY voorkomen, juist alle *c* kenmerken hebben, en er dus een wezenlijk verband tusschen deze spectraaleigenaardigheid en de veranderlijkheid bestaat, is er reden, ook W en X Sagittarii, die eveneens kleine waarden opleveren, bij die groep te rekenen; zooals reeds opgemerkt werd, is bij de Zuidelijke sterren niet op het onderscheid tusschen *a* en *c* sterren gelet. [1])

Men mag verwachten, dat binnen enkele jaren onze kennis van de loopbanen der spectroskopische dubbelsterren zeer zal toegenomen zijn. Dan zal het mogelijk zijn, conclusies als de hier gevondene uit een veel grooter materiaal af te leiden, en ook over de gemiddelde massa der K sterren tot eenige zekerheid te komen. Wat het laatste betreft, blijkt uit onze uitkomsten in elk geval de noodzakelijkheid, bij onderzoekingen over sterverdeeling en sterbeweging het 2de type niet als één geheel te beschouwen, maar altijd de F en G sterren afzonderlijk te houden van de roodere K sterren.

---

[1]) In dit verband mag tevens vermeld worden, dat schrijver dezes in 1891 een veranderlijkheid van α Ursae minoris in eene periode van iets minder dan 4 dagen meende te vinden. De geringe amplitudo en de groote invloed, die vooropgevatte meeningen bij helderheidsschattingen naar ARGELANDERS methode bij een korte periode van haast een vol aantal dagen uitoefenen, maakte het onmogelijk tot zekerheid in positieven of negatieven zin te komen. CAMPBELLS ontdekking, dat zij een spectroskopische dubbelster met een periode van 3^d 23^u 14^m is, doet vermoeden, dat het niet geheel een illusie is geweest.

Natuurkunde. — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt aan: Mededeeling N°. 94*f* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: *„Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof.*

(Aangeboden in de zitting van 28 Mei 1906).

§ 1. *Inleiding.* Reeds aan het slot van Med. N°. 14 van Dec. '94, over de uitkomsten, die ik verkregen had door bij de cascade methode regeneratoren toe te passen, in 't bijzonder over het verkrijgen van een permanent bad van vloeibare zuurstof ten dienste van metingen bij de laagste toenmaals waargenomen temperaturen, sprak ik de hoop uit ook een dergelijken cyclus, als voor de zuurstof was ingericht, met waterstof tot stand te kunnen brengen. Een eenvoudige voortzetting van de cascademethode kon dit niet zijn. Men kan met behulp van vloeibare zuurstof of stikstof, ook wanneer zij in het luchtledige verdampen, de kritische temperatuur van waterstof niet bereiken; om deze vloeibaar te maken moest dus partij getrokken worden van afkoeling door adiabatische uitzetting.

In Med. N°. 23 van Jan. '96 deed ik eenige mededeelingen omtrent hetgeen over het vloeibaar maken van waterstof langs dezen weg kon worden afgeleid uit de wet der overeenstemmende toestanden van VAN DER WAALS. Het was mij gebleken dat een toestel voor het vloeibaar maken van waterstof uitgaande van — 210° ongeveer kon worden geconstrueerd naar het model van een toestel, die geschikt mocht worden bevonden om zuurstof uitgaande van de gewone temperaturen en zonder verdere afkoelingsmiddelen vloeibaar te maken. Mijne pogingen om een toestel voor isentropische afkoeling te verkrijgen door de af- en toevoerbuis van een met samengeperst gas te voeden kleinen expansiemotor, tot een regenerator te vereenigen waren echter mislukt. Derhalve vestigde ik verder mijn aandacht op de juist toen (1896) bekend geworden toepassing van het JOULE-KELVIN-proces (LINDE's toestel voor het vloeibaar maken van lucht, en DEWAR's sproeistraal van waterstof voor 't bevriezen van zuurstof).

Terwijl LINDE's proces, omdat deze er in geslaagd was met zijn toestel vloeibare lucht statisch te verkrijgen, het meest beloofde, was het toch duidelijk, dat van deze methode alleen het beginsel kon worden gevolgd. Aan het afkoelen van een toestel van de afmetingen van den eerste van LINDE (gewicht 1300 K.G.) met behulp van vloeibare lucht (zuurstof), die in 't luchtledige moest verdampen, kon niet worden gedacht. En dit moest toch volgens het bovenstaande het uitgangspunt zijn.

Veeleer lag het voor de hand, door de in een vacuumglas geborgen spiraal, die DEWAR voor zijn sproeistraal van waterstof ter bevriezing van zuurstof gebruikte, te vergrooten, een toestel te verkrijgen, met welken men lucht kon vloeibaar maken, en die dan ook weer kon dienen als voorbeeld voor een toestel om de waterstof vloeibaar te maken. Inderdaad is het een inrichting van dezen aard geweest, met welke DEWAR in 1898 voor het eerst waterstof statisch vloeibaar maakte. Omtrent de toestellen, die DEWAR blijkbaar in staat stellen groote hoeveelheden vloeibare waterstof te verzamelen, is mij verder echter niets bekend geworden.

Bij de inrichting der Leidsche circulatie van waterstof is uitgegaan van DEWAR's denkbeeld om de regeneratorspiraal in een vacuumglas te plaatsen (1896), en wat de regeneratorspiraal zelve betreft, HAMPSON's toestel voor het vloeibaar maken van lucht (1896) gevolgd, omdat het gebleken is, dat de verhoudingen van deze spiraal bijzonder gunstig gekozen zijn en zij door geringe afmetingen en gering gewicht bij uitstek geschikt is om volgens de boven aangehaalde stelling als model te dienen voor een regeneratorspiraal om waterstof van ongeveer — 205° bij ontspanning van hooger tot gewonen druk vloeibaar te maken. Volgens dit model hebben ook de andere natuurkundigen, die zich na DEWAR met vloeibare waterstof hebben beziggehouden, — TRAVERS 1900 en 1904, OLSZEWSKI 1902, 1904 en 1905 (de laatste meer om met geringe hulpmiddelen en vlug kleine hoeveelheden te verkrijgen) — hunne toestellen gebouwd.

De Leidsche waterstofliquefactor voor continu gebruik bevat genoeg eigenaardigs om als onafhankelijke constructie naast de toestellen van TRAVERS en OLSZEWSKI, die aan de eischen der Leidsche metingen niet zouden kunnen voldoen, eene zelfstandige plaats in te nemen. Trouwens de stelling, volgens welke deze toestel gebouwd is en uit welke volgt, dat de regeneratorspiraal gevoed met waterstof afgekoeld door vloeibare zuurstof (lucht), die onder een aangegeven lagen druk verdampt, tot het doel moet voeren, is door mij het eerst uitgesproken.

Wat het tot stand brengen betreft van een circulatie om een bad van vloeibare waterstof te onderhouden, dit vraagstuk, — van hetwelk de inrichting van den liquefactor voor continu gebruik (die, met stikstof op de proef gesteld, werkelijk bleek te voldoen) slechts een deel was, — is nog niet door anderen behandeld.

Dat de oplossing ook te Leiden lang op zich deed wachten is bij de hooge eischen, die ik aan dezen cyclus meende te moeten stellen, niet te verwonderen. Ik achtte het toch met het oog op de te verrichten metingen noodig om in den onder VIII dezer Mededeelingen van Methoden en Hulpmiddelen van het Cryogeen Laboratorium beschreven

cryostaat een bad van 1.5 Liter inhoud af te schenken en dit tot op 0.°01 op gelijkmatige en standvastige temperatuur te houden. De eischen waren dus vrij wat hooger dan die ik aan het bad van vloeibare zuurstof indertijd had gesteld. Er was niet aan te denken deze nieuwe eischen te vervullen voor beschikt kon worden over eene (reeds in Med. N°. 23, Jan. '96 genoemde) vacuumpomp (zie Med. N°. 83, Febr. '03), geschikt om snel groote hoevelheden vloeibare lucht bij een druk van een paar centimeter te verdampen en compressoren voor continu bedrijf met uiterst zuivere waterstof verkregen waren. Met het eerst genoemde werktuig en de in § 3 beschreven compressoren geeft de in § 2 beschreven liquefactor 3 à 4 Liters vloeibare waterstof per uur. Zoo kon dan ook in deze ziting (28 Mei '06) 4 Liter te Leiden den vorigen dag bereiden vloeibare waterstof worden meegebracht om daarmede verschillende proeven te doen.

De verkregen inrichting bleek om met den bovengenoemden cryostaat te werken, ruim voldoende. Nadat het gelukt was met behulp ervan eenige metingen in vloeibare waterstof, kokende onder gewonen en onder verlaagden druk, te verrichten, sprong echter het vacuumglas van den cryostaat en bleven de meettoestellen daarbij slechts door een toeval gespaard. Daarom is toen nog een gewijzigde cryostaat gebouwd, die in XII beschreven wordt, en die behalve, dat hij de veiligheid der meettoestellen waarborgt, nog het voordeel heeft minder vloeibare waterstof te verbruiken dan de onder VIII (Med. 94^d, Juni '05) beschreven cryostaat. Deze nieuwe cryostaat voldoet volkomen aan de gestelde eischen. Merkwaardig is het zeker dat men, als de metingen in gang, zijn door niets bespeurt, dat gewerkt wordt met een bad van niet minder dan 1.5 liter vloeibare waterstof, van welke de temperatuur op 0°,01 standvastig wordt gehouden.

Aan den heer G. J. Flim, amanuensis bij het Cryogeen laboratorium, onder wiens leiding de in het volgende beschreven liquefactor en cryostaat alsmede verdere hulptoestellen in de werkplaats van het laboratorium naar mijn aanwijzing gebouwd zijn, betuig ik gaarne mijn dank voor zijne intelligente hulp.

§ 2. *De waterstofliquefactor voor continu gebruik.*

a. De toestel verwezenlijkt het oorspronkelijk ontwerp [1]) nog

[1]) Een verbetering zou nog zijn de regeneratorspiraal in verschillende opvolgende spiralen, elk met een eigen ontspanningskraan in de volgende overgaande, te verdeelen, waarbij de drukkingen naar de temperaturen geregeld worden. Zie de theorie van de afkoeling door het Joule-Kelvin-proces en het vloeibaar maken met behulp van het Linde-proces door van der Waals in de Zitting van Jan. 1900 gegeven.

niet geheel. Dit laatste wordt schematisch voorgesteld door Pl. I fig. 1, welke nauwelijks nadere toelichting behoeft. De samengeperste waterstof doorloopt achtereenvolgens de regeneratorspiralen $D_4, D_3, D_2, D_1, C, B, A$, van welke B zich gedeeltelijk bevindt in een bad van, door P toegevoerde, vloeibare lucht, die onder zeer lagen druk verdampt, en D_4, D_2, C en A door de bij de kraan M zich ontspannende waterstof en D_1 en D_3 door de dampen uit het luchtbad in F omspoeld worden. Daar echter kan worden beschikt over meer vloeibare lucht dan noodig is om de toegevoerde waterstof voldoende af te koelen, en de vacuumpomp (zie Med. N°. 83, Febr. '03) grooter vermogen heeft dan noodig is, om de verdampende lucht [1]) onder lagen druk weg te zuigen, ook wanneer de regeneratorwerking der spiralen D_1, D_2, D_3 en D_4 wordt opgeofferd, is eenvoudigheidshalve de dubbele voorkoelregenerator DI, welke een belangrijke besparing aan vloeibare lucht zal geven, nog niet aangebracht, en bestaat de toestel enkel uit één voorkoelregenerator C, den refrigerator F met koelspiraal B en den hoofdregenerator A in het vacuumglas E met verzamelglas L, dat geplaatst is in de kast V, die met de kast U een gesloten geheel vormt.

b. De hoofdregenerator, Pl. I fig. 2, bestaat uit 4 naast elkaar gewonden en daarna in elkaar geschoven windingen koperen buis van 2.4 m.M. inwendige en 3,8 m.M. uitwendige diameter A_1, A_2, A_3 en A_4, (aantal lagen 81; lengte van elke buis 20 M.,) die evenals in den ethyleenregenerator (Med. N°. 14 Dec. '94 en beschrijving van MATHIAS [2]), fig. 1 F) en den chloormethylregenerator (Med. N°. 87, Juni '03 Pl. I) van het midden van den cylinder naar den omtrek en weder van den omtrek naar het midden om den kraandrager M_4 gewonden zijn, en samen met flanel omwoeld in het vacuumglas E_0 (binnen- en buitenwand zijn met E_{01} en E_{02} aangegeven) passen, waaruit de vloeibare waterstof bij E_1 in het verzamelglas L_0 loopt. De vier windingen vereenigen zich bij M_{00} tot één toevoerkanaal, dat evenals bij de kraan T in fig. 3, van de beschrijving van MATHIAS l. c., afgesloten wordt door de spilpunt M_{11} bewogen door een handvat M_{21}. De pakking M_3 sluit den buisvormigen kraandrager M_4 aan het boveneinde, waar zij niet aan afkoeling blootstaat, luchtdicht af (verg. bovengenoemde beschrijving van MATHIAS). De waterstof ontwijkt zijdelings als bij de ethyleenkraan L fig. 2 in de beschrijving van MATHIAS l.c. door zes openingen M_{01} en wordt verhinderd op te stijgen of rond te loopen door de schermpjes M_{02} en M_{03}.

[1]) Bij gebruik van zuurstof zou men partij kunnen trekken van afkoeling tot lagere temperatuur, die dan echter in twee trappen zou moeten geschieden (verg § 4*b*).

[2]) Le laboratoire cryogène de Leyde, Rev. Gen. d. Sc. Avril 1896.

c. De nieuwzilveren refrigeratorbak F_1 hangt in de nieuwzilveren omhullingskast U_1 en is daarvan met flanel U_{64} gescheiden. Een drijver F_{31} wijst den stand van de vloeibare lucht aan, waarvan de toevoer door de kraan P_{01} met spil P_{11} en pakking P_3, geheel als de bovengenoemde kraan, behalve dat de glazen kraandraagbuis door een nieuwzilveren P_4 is vervangen, geregeld wordt.

De verdampte lucht wordt door een stevige koperen buis F_2 weggezogen (zie § 4*b*). De 2 afvoerbuizen B_{12} en B_{22} van de spiraal B_{11} en B_{21} (ieder 23 windingen, diameter buis inwendig 3,6 mM., uitwendig 5,8 mM. elk lang 6 M.) zijn aan den bodem gesoldeerd. De beide toevoerbuizen B_{10} en B_{20} zijn in het nieuwzilveren deksel gesoldeerd, waarop verder de glazen buis F_4 met den wijzer F_{32} van den kurken drijver F_{31} is vastgelakt (verg. Stikstof Med. N°. 83, Febr. '03 IV, Pl. VII.)

d. De voorkoelregeneratorspiraal C_1, C_2, C_3 en C_4 is evenals A viervoudig gewonden en met flanel omwoeld in den cylinder van de nieuwzilveren kast U_2 opgesloten. De vier windingen (inwendige diam. 2.4 mM., uitwendige diam. 3.8 mM., aantal lagen 81 lengte van elke buis 20 M.) ontspringen in het soldeerstuk C_{01} uit de buis C_{00}, gesoldeerd in het deksel van U_2, en vereenigen zich in de twee buizen C_7a en C_7b, die de waterstof naar den refrigerator voeren. De spil van deze spiraal is een van boven gesloten dunwandige nieuwzilveren buis C_6.

De afgeblazen waterstof wordt afgevoerd door de buis U_5.

e. Wat de vloeibare waterstof betreft, deze wordt opgevangen in een nieuwzilveren bakje L_1, passend in het vacuumglas L_0, dat door tusschenkomst van een houten blokje V_7, rust op den met hout V_{65} gevoerden bodem van de van binnen met papier V_{64} en kapok V_{63} bekleede en geïsoleerde kast V_1. Het gevaar van springen van het vacuumglas is door tusschenkomst van L_1 geringer dan wanneer de waterstof direct uit E_1 in het glas L_{02} kon vallen. Ook wordt door dit bekertje de snelle verdamping voorkomen in het geval, dat het glas mocht springen. (verg. § 1).

De stand van de vloeibare waterstof wordt aangewezen door een drijver L_{200}, die met een zijden koordje L_{21} over katrolletjes L_{22} en L_{23} in evenwicht wordt gehouden door een ijzeren gewichtje L_{24}, bewegende in een glazen buis V_{31} dat ook van buiten af door een magneet kan worden op en neer gehaald. De drijver is een doos L_{00} van zeer dun nieuwzilver, het haakje L_{201} is uit een aan beide zijden open capillaire buis gebogen en in het deksel gesoldeerd. Het glas V_{31} sluit met caoutchouc op het cylindertje V_{32}, dat door een dunwandig nieuwzilveren buisje V_{30} met de kast verbonden is.

De waterstof wordt afgetapt door het nieuwzilveren hevelbuisje N_{61}, dat zich voortzet in het dubbelwandige buisje N_{51} N_{501}, leidende naar het aftapkraantje N_{01}. Als bij de aethyleenkraan (beschr. van MATHIAS l. c. fig. 2) bevindt zich ook hier de pakking N_3 en de schroefdraad in het niet afgekoelde gedeelte. De uit een nieuwzilveren buisje vervaardigde stift N_1 loopt door het nieuwzilveren kraandraagbuisje N_4. Het afvoerbuisje N_0 zoowel als het afvoerkraantje N_1 worden omspoeld door een deel van de koude waterstofdampen, die men voor dit doel tusschen den dubbelen wand van het buisje door N_{504} en langs K_{pa}^{π} laat ontwijken. De buitenwand N_{501}, N_{502} van het dubbelwandige buisje is door wol geïsoleerd van de zijbuis V_{21} aan de kast V_{20}.

Het glas L is gedekt door een vilten deksel L_3, beneden met een blaadje nikkelpapier voorzien om straling naar de vloeibare waterstof te voorkomen. Deze deksel klemt op het ondereinde E_2 van E en steunt op het buisje N_{501} en het katrolhulsje L_{22}.

f. Te beschrijven blijven nu nog de verschillende veiligheidsinrichtingen om te voorkomen, dat de toestel springt, wanneer de kraan M plotseling te veel gas doorlaat, gelijk het geval kan zijn wanneer de opening verstopt is door bevroren verontreinigingen in het gas, of wanneer een der buizen, door dezelfde of door een andere oorzaak bezwijkt.

In de eerste plaats dient als zoodanig de onder kwik uitmondende wijde glazen buis W_1. De hoeveelheid gas welke op eens ontwijkt, en de hevigheid waarmee het kwik weggeslingerd wordt, is soms zoo groot, dat het noodig was een kast W_{30} met verschillende schermen W_{31}, alle van gevernist bordpapier, aan te brengen, om het kwik op te vangen en weder terug te laten vloeien in het glas W_2 (waar het in voldoende hoeveelheid aanwezig moet zijn om bij het luchtledig pompen de buis te kunnen vullen).

Stijgt de druk in het verzamelglas hooger dan die, op welke de veiligheidsbuis berekend is, dan bezwijkt de dunwandige caoutchoucbuis V_{42}, die om den geperforeerden cylinderwand van messing V_{41} (daarvan door een dun blaadje zijdepapier gescheiden) getrokken is. De veiligheidsinrichting is door een wijde nieuwzilveren buis V_{40} aan de kast V_1 verbonden.

Verontreiniging van de waterstof in den liquefactor door diffusie van lucht wordt vermeden doordat de caoutchouccylinder V_{432} gespannen over de ringen V_{431} en V_{430} door de kraan V_{44}, na ledigpompen, waarbij de cylinderwand zich tegen den gummiwand aanlegt, met waterstof onder overdruk gevuld wordt.

Een inrichting van geheel dezelfde constructie beveiligt de kast

U_1, waarin zich de hoofdregenerator, en de kast U_2, waarin zich de voorkoelregenerator C bevindt.

Wat betreft de beveiliging tegen spanningen, die door het verdampen van lucht kunnen ontstaan, zoo behoefde de refrigeratorruimte F alleen door de onder kwik uitmondende buis Y beveiligd te worden.

g. Bij de bescherming van de verschillende deelen van den toestel tegen warmtetoevoer van buiten is er voor gezorgd, dat die oppervlakken, welke in temperatuur kunnen dalen beneden het kookpunt van lucht en niet voldoende beschermd worden door geleiding van minder afgekoelde deelen, niet met lucht doch alleen met waterstof in aanraking komen. Zoo is de refrigeratorbak F omhuld door de waterstof, welke de kasten U en V vult, en bevindt zich ook waterstof in de ruimte tusschen het vacuumglas L en den wand van de kast V en strekt zich een zijarm V_{20} en V_{21} van de kast V uit, om het dubbelwandige kraantoevoerbuisje N_{51}, N_{501} en de dubbelwandige kraan N_4, N_{501} met waterstof te omhullen.

De nieuwzilveren kast V, is evenals de nieuwzilveren kast U, van welke het vacuumglas L door lagen papier V_{64} en de refrigeratorbak F door een laag flanel geïsoleerd is, tegen warmtegeleiding van buiten verder beschut door afzonderlijke omhullingen met kapok V_{81}, aangestampt binnen een cartonnen omhulsel V_{82}, hetwelk dichtgeplakt is. De lucht binnen deze afgesloten ruimte staat, ten einde het neerslaan van waterdamp te voorkomen, evenals bij den ethyleen- en chloormethylregenerator, (zie boven onder *b*) met de buitenlucht in verband door middel van een met stukjes natriumhydraat gevuld droogbuisje, *t.dr.*

De luchtdichte verbinding van de kast U met de kast V wordt verkregen door den caoutchoucring *Ua*, die op het glas en op de versterkte randen U_{50} en V_{50} der nieuwzilveren kasten sluit. Caoutchouc kan in grootere afmetingen alleen tot sluiting gebruikt worden, wanneer het niet wordt afgekoeld. In dit geval is de geleiding langs den nieuwzilveren, van het vacuumglas nog door lagen papier geïsoleerden, wand zoo gering, dat de ringvormige versterkte randen op de gewone temperatuur blijven en sluiting door een stevigen gespannen caoutchoucring mogelijk is. Volkomen is die sluiting, wanneer het caoutchouc enkel op het glas gedrukt wordt, niet; de geheele verbinding is derhalve omgeven met een atmosfeer van nagenoeg zuivere waterstof, welke men verkrijgt en onderhoudt door den caoutchoucring *Uc*, die op U_1 en V_1 afsluit en die door het kraantje *Ud* met waterstof onder overdruk gevuld wordt. Wegens de geringe warmtegeleiding van het nieuwzilver is ook bij de verbindingen van V_{42} en U_{42} evenals bij de kraanpakkingen M_3 en N_3 afkoeling niet te vreezen.

h. De kast V wordt met U tot een stevig geheel vereenigd door de 3 stangen Ub met schroefverbindingen U_{51} en V_{51}. Het vacuumglas E_0 steunt, gevat door den caoutchoucring Ua met een houten ring E_1 en een nieuwzilveren cylinder U_{31} tegen den refrigeratorbak F.

Het geheel is bestand tegen het luchtledig pompen, dat noodig is om den toestel met zuivere waterstof te vullen. Nadat de kast U, waarvan de deelen U_1 en U_2 onderling door steunbalkjes verbonden zijn, en de kast V elk op zichzelf gemonteerd zijn, wordt het vacuumglas E op zijn plaats geschoven en de kast V aan U gekoppeld. De geheele liquefactor hangt met een paar stangen aan den zolder en wordt in 't bijzonder gesteund door de stevige luchtafvoerbuis F_2 en de waterstofafvoerbuis U_5.

Op Pl. II is de circulatie schematisch, wat betreft de toestellen in de juiste verhouding van afmetingen, wat betreft de verbindingen enkel schematisch voorgesteld. De liquefactor is door de letters $\mathfrak{Liq}$ aangegeven. Door Kc wordt de samengeperste waterstof toegelaten, door Khd of Khc de afgeblazen waterstof afgevoerd.

i. Voordat men met den toestel gaat werken wordt deze door middel van luchtledig pompen en toelaten van zuivere waterstof langs Kc, bij geopende kraan M, gevuld met zuivere waterstof, in de droogflesschen $\mathfrak{D}a$ en $\mathfrak{D}b$ bevrijd van sporen vocht, die zij mocht hebben opgenomen.

§ 3. *De compressoren en gasklokken.*

a. De waterstof wordt op hoogen druk gebracht met behulp van twee compressoren, in elk van welke de samenpersing in twee stappen plaats vindt.

Terwijl andere natuurkundigen gebruik maken van snelloopende compressoren met waterinjectie, van denzelfden aard als die, welke, door mij indertijd (zie Med. N°. 14 van Dec. '94 § 10 en N°. 51, Sept. '99 § 3) voor het werken met zuivere gassen werden ingericht, heb ik voor de waterstofcirculatie langzaam loopende compressoren (zie Pl. II ♂ met 110 en ♀ met 80 omwentelingen per min.) gebruikt, die met olie gesmeerd worden. Om continu met waterstof te kunnen werken is de hoogste graad van zuiverheid van het gas noodig. Want de bij het gas gemengde lucht zet zich in de regeneratorspiraal af en zal, wanneer zij zich daar gedeeltelijk verzameld heeft, bij de onvermijdelijke wisselingen van temperatuur in verschillende deelen van de spiraal, nu eens smelten dan weer bevriezen, zoodat zelfs kleine hoeveelheden, in aanmerking genomen het naar beneden vloeien, noodzakelijk verstopping teweeg moeten brengen. Zulke kleine hoeveelheden lucht, zouden allicht worden afgegeven

door de groote hoeveelheid injectiewater, die voor bovengenoemde compressoren met waterinjectie noodig is, of indringen in de toestellen, noodig om hetzelfde injectiewater herhaaldelijk te kunnen gebruiken. En eindelijk is de kans op het verliezen van gas bij deze compressoren geringer en de bediening veel gemakkelijker. De compressoren zijn door de maatschappij BURCKHARDT te Bazel met groote zorg vervaardigd.

In den eersten compressor (♁ Pl. II verplaatsing 20 M³ per uur.) wordt in den eersten cylinder (dubbelwerkend met schuif) het gas van 1 op 5 en in den tweeden cylinder (plunger en kleppen) van 5 op 25 atmosfeer gebracht; in den tweeden compressor ♀ (plunger en kleppen) in den eersten cylinder van 25 op 50 en in den tweeden van 50 op 250 atmosfeer. Na elke samenpersing wordt het gas door een koelspiraal geleid. Aan de twee eerste koelspiralen (die van ♁ Pl. II) is een olieafscheider verbonden.

Veiligheidskleppen voeren van elk reservoir naar den aanvoer terug; verder zijn de pakkingen met oliekommen (Med. N°. 14 '94 en Med. N°. 83, Pl. VIII) afgedicht. De waterstof, die uit de pakking bij ♀ mocht ontsnappen, wordt opgevangen.

b. De hoogedrukcompressor perst de waterstof door twee stalen, met stukjes natriumhydraat gevulde droogbuizen ☊*a* en ☊*b* (zie § 2, *i.* en Pl. II) van welke de eerste tevens als windketel bij de regeneratorspiraal dient. Daar bij alle bewerkingen het gas (zie *c*) oorspronkelijk nagenoeg droog is en slechts in aanraking komt met olie, behoeft slechts van tijd tot tijd door kraan *Ke* een kleine hoeveelheid geconcentreerde natronoplossing afgetapt te worden.

c. De compressoren zuigen bij gewoon bedrijf het gas uit gasklokken. Dreven deze op water, zoo zoude bij de groote hoeveelheden verplaatst gas, die telkens weder met water in aanraking worden gebracht, verder het afscheiden van den onvermijdelijk meegevoerden waterdamp bij het samenpersen tot groote bezwaren aanleiding geven. Daarom zijn voor dit doel in gebruik genomen twee verzinkte gasklokken, *Gaz a* en *Gaz b* Pl. II met vertinde naden (inhoud van elk 1 M.³) drijvende op olie, welke vroeger (zie Med. N°. 14 Dec. '94) voor het opvangen van aethyleen werden ingericht. [1]) De kraan *Kpa* (*Kpb*) bevindt zich onder olie; ook de verbinding van de glazen buis, door welke de

[1]) De teekening geeft de constructie, die gevolgd is om olie te besparen, wel voldoende aan. De klokken kunnen buiten geplaatst worden, en zijn daarom door een kap van gegalvaniseerd ijzer en gordijnen van geteerd zeildoek, die rondom dichtgetrokken kunnen worden, beschermd. Indertijd was het van het grootste belang het aethyleen in de gasklokken zuiver en droog te kunnen bewaren. Thans is het zuiveren van aethyleen door uitvriezen in vloeibare lucht (zie Med. N°. 94*e* IX § 1) een zeer eenvoudige bewerking geworden er zijn reservoirs zonder naad om het gas te bewaren in alle afmetingen te verkrijgen.

olie van den gashouder tot boven de kraan zichtbaar kan worden opgezogen, met het kraanstuk is door olie bedekt. Verder is de caoutchouc afvoerbuis en de verbinding met de roodkoperen zuigbuis, door eene tweede slang, gevuld met glycerine, omgeven. Van de kraan af kan de geleiding luchtledig gezogen worden; om te verhinderen, dat hierbij de buis samengedrukt wordt, is in de buis een stalen spiraal aangebracht. Een olieafsluitdrijver *Kph* (*Kpi*) voorkomt, dat de olie in de toestellen wordt overgezogen.

Behalve deze gasklokken zijn, om iets minder zuivere waterstof op te vangen, nog twee gasklokken, van 5 M³. elk, volgens hetzelfde systeem om vloeistof te besparen als de verzinkte gasklokken gebouwd, zorgvuldig geklonken en dichtgekookt en drijvende op eene oplossing van chloorcalcium, beschikbaar. De oliegashouders dienen enkel om zeer zuivere waterstof te bewaren en dit alleen gedurende het bedrijf.

De zuivere waterstof wordt den overigen tijd bewaard in de bekende stalen flesschen op Pl. II afgebeeld bij *Wa*. Men laat deze, wanneer men waterstof wil vloeibaar maken in de gasklok afblazen door *Kg* (*Khe*, *Kpe* en *Kpb* bijv. naar *Gaz. b*), nadat deze, (die met H_2 gevuld gestaan heeft) eerst opzettelijk met zuivere waterstof is omgespoeld. Zoodra het bedrijf geeindigd is, wordt de waterstof langs *Kpf* en *Kpc* met behulp van ☿ en ☽ teruggepompt door *Ka* en *Kf* in de bussen *Wa*.

De gasklokken kunnen ieder afzonderlijk of samen met de pompen of met den liquefactor verbonden worden. Het eerste komt vooral te pas bij het werken met den cryostaat (zie XII) en bij het zuiveren van waterstof (zie XIV).

§ 4. *De afkoeling door vloeibare lucht.*

a. De vloeibare lucht wordt in den refrigeratorbak *F* (Pl. I) die door *Ks* (Pl. II) aan de vacuumpomp ♃ gekoppeld is, gezogen door het buisje *Pb* dat gekoppeld is aan het hevelbuisje van een vacuumflesch *Va* met vloeibare lucht.

Deze heeft men, door den straal van vloeibare lucht uit den toestel (Pl. IV, fig. 2) waarin deze bereid wordt (zie XIII) in het open glas (zie nevenstaande fig. 1) op te vangen, gevuld en, met een losse vilten stop *m* (fig. 1) gedekt, bewaard. Om de vloeibare lucht in de toestellen waarin men haar wenscht te gebruiken, over te hevelen wordt de stop vervangen door een kapje *h* (fig. 1) met drie buisjes; één, *d*, dat bestemd is om met een klein handpompje den druk in de flesch te verhoogen, één, *c*, waaraan een kwikmanometertje wordt verbonden, en één, *b*, dat tot op den bodem reikt en waardoor het vloeibaar gas kan worden afgevoerd. (Wordt de flesch voor andere

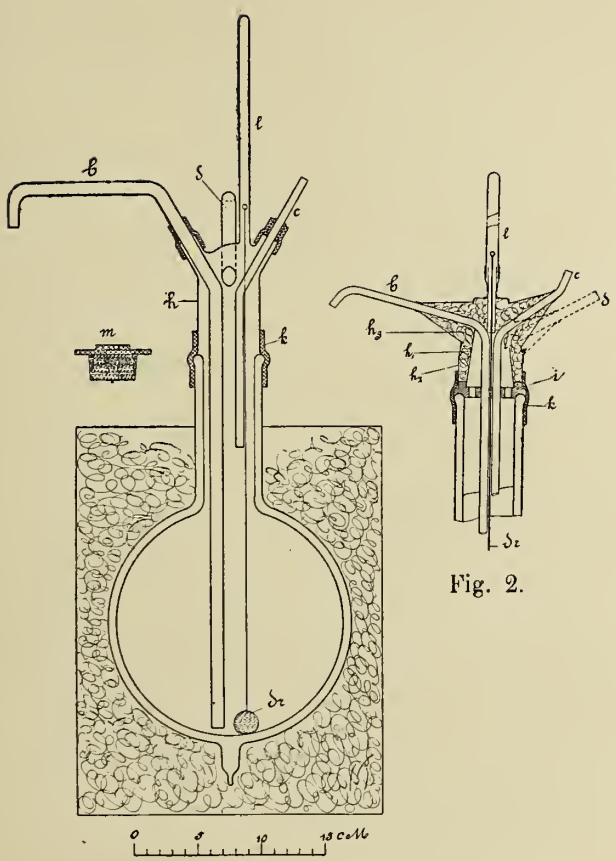


Fig. 2.

Fig. 1

vloeibare gassen gebruikt, zoo dient *d* voor afvoer van de dampen en *c* voor inlaat van het vloeibare gas). Een van de beide eerste buisjes reikt tot in den hals. Het kan ook gebruikt worden om vloeibare lucht uit een grooteren voorraad in de flesch over te brengen. Aan het kapje is een gesloten glazen buis *b* bevestigd waarin de wijzer van een kurken drijver *dr* den stand van de vloeistof aangeeft.

De kapjes, als in fig. 1 aangegeven, werden vroeger van glas geblazen en de drie buisjes met caoutchouc er in bevestigd. Later is het kapje h_1 echter, als in fig. 2 afgebeeld, met de drie buisjes en met een dubbelen wand h_2 van zeer dun nieuwzilver tot een geheel samengesoldeerd, dat men met een caoutchouc ring *k* op de flesch bevestigt. De ruimte tusschen de wanden is met kapok h_3 opgevuld en het geheel steunt op den hals der flesch met behulp van een houten blokje *i*. Het kapje wordt als het op de flesch geplaatst is, nog met wol omwoeld.

Met het oog op het transport is het vacuumglas geplaatst in een cartonnen doos met houtwol.

Is het hevelbuisje niet in gebruik dan wordt het gesloten met een eindje caoutchoucslang, waarin een stopje. Om over te hevelen verwijdert men dit stopje en verbindt het toevoerbuisje *Pb* (Pl. I) met een eindje caoutchoucslang aan het hevelbuisje *b* (fig. 2). Ten einde afbreken van het door de koude broos geworden caoutchouc te voorkomen, worden de nieuwzilveren buisjes zoodanig ingericht, dat ze in elkaar passen, en het caoutchouc dus niet zoo sterk aan spanning wordt blootgesteld.

De toevoer van vloeibare lucht in den refrigeratorbak wordt verder geregeld met de kraan *P*. Pl. I. Wijst de drijver aan dat de flesch nagenoeg leeggezogen is, dan vervangt men deze door een andere.

De kraan *Ks* wordt geregeld naar de aflezing op de stijgbuis *Y*.

b. Men laat de lucht onder een druk van 15 mm verdampen, hetgeen mogelijk is doordat als vacuumpomp een BURCKHARDT-WEISS-pomp ℱ Pl. II gebruikt wordt.

De vacuumpomp is dezelfde, die gebruikt wordt bij het meten met den cryostaat van baden bij — 217° (zie Med. No. 94^d van Juni '05.), en is met het oog op dit doel volgens Med. No. 83 V. Febr. '03 ingericht. De letters bij ℱ op pl. II, hebben dezelfde beteekenis als in laatstgenoemde Med. Pl. VIII. Aan deze vacuumpomp ℱ van 360 M^3 verplaatsing per uur wordt ook nu weder als vermeld in Med. No. 94^d VIII Juni '05 gezogen door een kleine vacuumpomp van 20 M^3 verplaatsing per uur [1]). (op Pl. II. met ℛ aangeduid.)

§ 5. *In werking brengen van den liquefactor.*

a. Is de toestel volgens § 2 gevuld met zuivere waterstof en in den refrigerator onder lagen druk verdampende lucht gebracht, zoo laat men de waterstof, die door ℭ en ℌ Pl. II. langs *Kc* aangevoerd wordt, gemakshalve bij wijdgeopende kraan *M* Pl. I. eenigen tijd doorstroomen ten einde den geheelen toestel voor te koelen. Daarna regelt men de kraan *M* zoodat de druk in de regeneratorspiraal langzaam oploopt. Bij 100 atm. kan de toestel zeer goed vloeibare waterstof leveren, zelfs is wel bij 70 atm. gewerkt. Gewoolijk echter wordt de druk tusschen 180 en 200 atm. gehouden, daar het rendement dan eenige malen grooter is [2]). De liquefactor levert dan circa 4 Liter vloeibare waterstof per uur. Een gedeelte van de waterstof laat men langs *Kha* Pl. I fig. 2 en Pl. II ontsnappen om de hevelbuis N_{51} Pl. I en de kraan *N* voor te koelen.

Zoodra zich vloeibare waterstof af gaat scheiden bemerkt men dat men de kraan *M* verder moet dicht draaien om den druk binnen dezelfde grenzen te houden.

[1]) Wil men bij gebruik van O_2 (zie § 2 noot 2) tot een druk van een paar mM. afdalen, zoo zou vooraf moeten gaan een afkoeling in den tweeden refrigerator als *F* met O_2 onder lagen druk verdampende aan ℛ bijv.

[2]) v. D. WAALS heeft den weg aangegeven om dit te berekenen (zie noot [1]) bij § 2.

Verzamelt zich vloeibare waterstof in L dan vertoont zich ijzel op het buisje N_{503} Pl. I fig. 2 bij de kraan N.

b. De gasvormige waterstof ontwijkt langs *Khd* (Pl. II.) naar ⊖ en naar één of naar beide gashouders. Scheidt zich vloeibare waterstof af, dan neemt de compressor ⊖, behalve de uit den liquefactor ontwijkende waterstof, ook langs *Kpa* en *Kpb* uit de gashouders waterstof op. Men voert dan uit $\mathfrak{R}ha$ Pl. II langs *Kg* nieuwe zuivere waterstof toe.

c. De drijver (L_{200} Pl. I) begint eerst aan te wijzen wanneer reeds een vrij aanzienlijke hoeveelheid vloeibare waterstof zich heeft verzameld.

§ 6. *Afhevelen van vloeibare waterstof en demonstreeren van vloeibare en vaste waterstof.*

a. Wijst de drijver L_{200} Pl. I aan, dat het glas tot boven toe gevuld is (dit is gewoonlijk een uur na het in werking brengen van den liquefactor het geval), zoo wordt de waterstof afgeheveld in de vacuumglazen *Hydr a*, *Hydr b* enz., Pl. II, die achter elkaar aangekoppeld worden om telkens na vulling van één een plaats op te schuiven, zoodat ze achtereenvolgens door den kouden waterstofdamp doorloopen worden en ze afgekoeld zijn voor men ze vult.

Zij zijn met kapjes van dezelfde soort als de flesschen voor het overhevelen van vloeibare lucht, fig. 1 en 2 voorzien. Pl. III vertoont op grooter schaal 2 achter elkaar gekoppelde flesschen, benevens een derde die reeds gevuld is, alles als op Pl. II, in zij- en bovenaanzicht. De verdampte waterstof ontwijkt langs d'_3 en langs d''_3 en verder langs K_0 zie Pl. II naar den gashouder. De letters der figuren hebben dezelfde beteekenis als bij fig. 2; voor de verklaring kan ook op de beschrijving van die fig. in § 4 verwezen worden.

De warmtegeleiding in het dunne nieuwzilver is zoo gering dat de nieuwzilveren buisjes in de kapjes h_2 gesoldeerd kunnen worden en dat zij verder voldoende beschermd worden door een dubbelen wand h_{11} van nieuwzilver met een tusschenlaag van kapok, welke men dan nog flink met wol omhult.

Een enkele maal komt het wel voor dat de caoutchoucring k' bij de sterke afkoeling barst, in 't algemeen echter heeft het gebruik van caoutchouc geen last opgeleverd, en is dus eene, trouwens voor de hand liggende, doch iets minder eenvoudige constructie, waarbij de afkoeling van het caoutchouc ter plaatse waar het sluiten moet, ontgaan wordt, nog niet uitgevoerd.

b. Wil men den straal van vloeibare waterstof, die uit het kraantje N, Pl. I stroomt, zien, zoo verbindt men aan het buisje N_0 en de caoutchoucslang d_3 in plaats van de verzilverde kolven van Pl. II

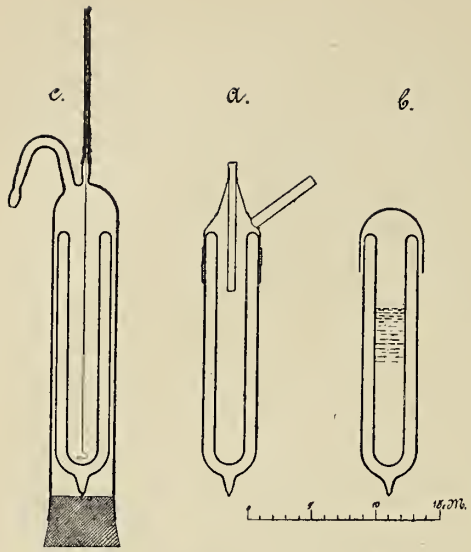


Fig. 3

en Pl. III een doorzichtig vacuumcylindertje fig. 3*a* door een caoutchoucring gesloten met een nieuwzilveren kapje met inlaatbuisje. Na het openen van het kraantje beslaat de caoutchoucafvoerbuis d_3 met ijzel en wordt zij glashard; spoedig daarna ziet men de eerste spheroidale druppels op den bodem van het glaasje rondspatten, waarna de licht bewegelijke vloeistof het glaasje vult. Plaatst men een glazen kapje als in fig. 3*b* er boven, zoo kan men het glaasje aan de open lucht laten staan zonder dat deze er in neerslaat en het verdampen bespoedigt. Op de beschreven wijze heb ik ook wel niet-verzilverde vacuumflesschen van 1 Liter inhoud gevuld, waarin de vloeibare waterstof evenals in het zooevengenoemde glaasje levendig kookt. De verdamping is natuurlijk veel geringer en het opstijgen der belletjes houdt op wanneer men het vacuumglas of de vacuumflesch in vloeibare lucht plaatst.

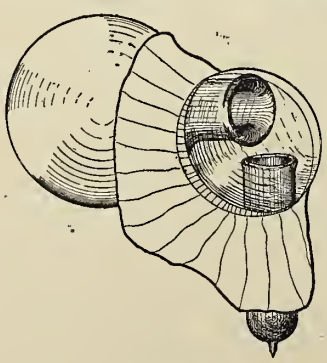


Fig. 4

Om het afschenken van waterstof uit het eene open vat in het andere te vertoonen, gebruik ik een glazen kap met een rand van dun caoutchoucblad er omgebonden (zie bijgaande fig. 4). Men brengt de flesch waaruit, en het glas waarin men wil schenken, het laatste na het met vloeibare lucht volgeschonken en snel omgekeerd te hebben (doet men dit niet snel dan komt er binnen in een blauwe aanslag van H_2O uit de lucht) onder de kap, die zich met waterstof vult en dus verder helder blijft, en neemt met het caoutchouc om de hals van de flesch en om het glas elk in een hand. Men kan dan door de kap het overschenken zien. De ontwijkende waterstof stijgt onder nevelvorming in de lucht naar boven.

Om nu het half volgeschonken glaasje helder te houden dekt men het onder de afschenkkap met een glazen kapje, waarna men het van onder de afschenkkap kan wegnemen.

c. Het is zeer leerrijk te zien, wat er gebeurt, wanneer men dit kapje

vervolgens wegneemt en het glaasje een weinig schuin houdt. Boven den spiegel der vloeibare waterstof vormen zich dan dikke sneeuwwolken van vaste lucht, de zeer kleine vaste deeltjes vallen door de uiterst lichte waterstof (spec. gew. $^1/_{14}$) op den bodem, waar zij zich verzamelen tot een wit poeder, dat bij het schudden van de waterstof zich gedraagt als een zwaar zand in water zou doen. Is de waterstof verdampt dan smelt dat zand spoedig weder tot vloeibare lucht [1]).

d. Vaste waterstof demonstreert men gemakkelijk door het zooeven genoemde glaasje fig. 3*a* te brengen onder een klokje als fig. 3*c* waarin een metaaldraad op en neer kan bewogen worden (b.v. door deze te bevestigen in een caoutchoucbuisje) en het klokje aan de luchtpomp te verbinden. Spoedig vormt zich dan een stijfselachtig wit koekje, dat men met het draadje op en neer kan bewegen.

e. Om een vacuumflesch als op Pl. III te vullen begint men met deze af te koelen door omspoelen met vloeibare lucht. De verbinding bij N_0 Pl. I fig. 2 en Pl. III wordt eenvoudig bewerkstelligd door een eindje caoutchoucslang N_{81} om de in elkaar passende nieuwzilveren buisjes N_0 en C_0 te schuiven, waarom men flanel C_2 zwachtelt. Daar omheen woelt men dan losse wol. Zijn eenige flesschen aangekoppeld zoo vult men deze door het buisje b_0 van *Hydr. a*, met behulp van herhaald luchtledig pompen, met zuivere waterstof en evenzoo wordt gezorgd dat elke nieuwe aan te koppelen flesch met zuivere waterstof gevuld is, en bij het aankoppelen geen lucht in de toestellen kan dringen.

Is een flesch naar aanwijzing van den drijver L_{200} (Pl. I, fig. 2) gevuld zoo koppelt men deze af, doch laat, zoolang de vloeibare waterstof in dit glas bewaard wordt, de verdampende waterstof in den gashouder ontwijken, zooals op Pl. III voor *Hydr. c* is voorgesteld. Het afkoppelen bij N_0 geschiedt eenvoudig door dat men na verwijdering van den flanellen zwachtel C_2 het eindje caoutchoucslang N_{81} (ongevulcaniseerd) met de vingers (of met een daarvoor ingericht tangetje) verwarmt tot het weder week geworden is en men het van buisje N_0 afschuiven kan.

§ 7. *Overbrenging naar den cryostaat, sluiting van den kringloop.*

a. Dergelijk met vloeibare waterstof gevulden vacuumglazen worden (zie *Hydr. d* op pl. II) overgebracht naar het lokaal, waar de cryostaat

[1]) Dit alles werdt in de Zitting van 28 Mei vertoont. Om het geringe specifieke gewicht van waterstof aan te toonen bracht ik een zeer dunwandig glazen bolletje dat slechts zeer weinig in ether onderzinkt (als een massieve glazen bol in kwik) aan een dun draadje in het glaasje met vloeibare waterstof, waarin het als een massieve glazen bol in water valt en op den bodem tikt.

$\mathfrak{C}$ opgesteld is, en hier overgeheveld. Te dien einde koppelt men het buisje b''_1 van Pl. III al weder door een eindje caoutchoucslang, omhuld met flanel en wol, aan het toevoerbuisje a_1 van den cryostaat en het buisje d_0 aan een toevoerbuis van zuivere waterstof onder druk die van $\mathfrak{R}hc$ pl. II langs *Kwa* wordt aangevoerd. Bij al dergelijke aan- en afkoppelingen zorgt men, dat er steeds overdruk in de te koppelen buizen is, dat de afgekoppelde buizen terstond gesloten worden door dichte stoppen en dat de toestellen vooraf, na luchtledig gepompt te zijn met zuivere waterstof worden gevuld. Men laat de vloeibare waterstof eerst in den cryostaat $\mathfrak{C}r$ nadat deze vooraf — bij andere aankoppeling (zie de stippelijn op Pl. II) — afgekoeld is met behulp van zuivere waterstof, die men uit $\mathfrak{R}hc$ door een, in vloeibare lucht gelegde koelslang *Refr*, heeft geleid. Deze refrigerator is van een dergelijke constructie als de stikstofcondensator Pl. VII van Med. N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03). In plaats van *Nliq* is hier te lezen H_2 en in plaats van *Ox liq*, *Aër liq*, welke uit de vacuumflesch $\mathfrak{A}c$, wordt overgeheveld (verg. § 6).

Bij het overhevelen van de vloeibare waterstof in $\mathfrak{C}r$ wordt de snelheid van overstroomen geregeld naar een kwikmanometertje, dat aan het buisje *c* op het kapje *h* Pl. III bevestigd is.

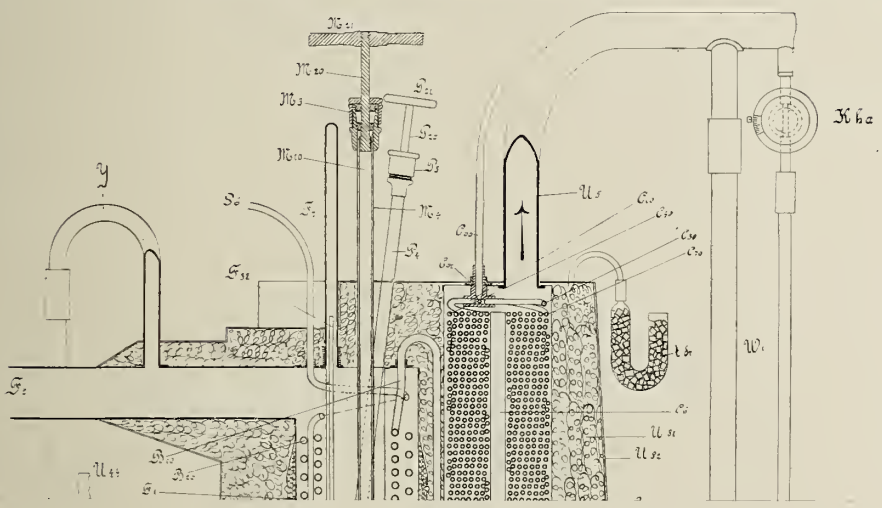
b. Uit den cryostaat ontwijkt de verdampte waterstof langs U_{37} naar den compressor $\mathfrak{S}$ Pl. II, die ook als vacuumpomp kan dienen en dan veiligheidshalve door $\mathfrak{H}$ en *Kf* bij de gestippelde aankoppeling *Kf* het mogelijkerwijze iets verontreinigde gas in de afzonderlijke bus $\mathfrak{R}hd$ opbergt, of ook langs Y_{32} en *Kpe* of *Kpd* naar de gashouders *Gaz a* of *Gaz b*.

XI. *Het zuiveren van waterstof voor den cyclus.*

a. Hierover is reeds in Med. n°. 94*d* IX gehandeld. Ten einde steeds gemakkelijk zuivere waterstof te kunnen verkrijgen, om onvermijdelijke verliezen goed te maken, en om verder bevrijd te worden van de vrees voor verlies van zuivere waterstof, die anders allicht van het ondernemen van sommige proeven af zou schrikken, is een blijvende inrichting voor de zuivering, volgens het beginsel van IX gemaakt. De zuiveringstoestel is op Pl. IV afgebeeld en op Pl. II bij $\mathfrak{Z}$ terug te vinden.

De onzuivere waterstof uit $\mathfrak{R}hb$ wordt door *Kn* langs een droogbuis toegelaten in een regeneratorslang (zie Pl. IV), bestaande uit twee concentrische in elkaar gesloten buizen, waarvan de buitenste *a* voor aanvoer, de binnenste *b* voor afvoer dient. Buiten den toestel zijn *a* en *b* gescheiden a_0 en b_0, binnen den toestel zet van *c* af, *a* zich voort als a_1 en vervolgens als de spiraal a_2 om te eindigen boven

H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen labcratorium, X. Het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof. Pl. I.



$\mathfrak{C}$ opgesteld is, en hier overgeheveld. Te dien einde koppelt men het buisje b''_1 van Pl. III al weder door een eindje caoutchoucslang, omhuld met flanel en wol, aan het toevoerbuisje a_1 van den cryostaat en het buisje d_0 aan een toevoerbuis van zuivere waterstof onder druk die van $\mathfrak{R}hc$ pl. II langs *Kwa* wordt aangevoerd. Bij al dergelijke aan- en afkoppelingen zorgt men, dat er steeds overdruk in de te koppelen buizen is, dat de afgekoppelde buizen terstond gesloten worden door dichte stoppen en dat de toestellen vooraf, na luchtledig gepompt te zijn met zuivere waterstof worden gevuld. Men laat de vloeibare waterstof eerst in den cryostaat $\mathfrak{C}r$ nadat deze vooraf — bij andere aankoppeling (zie de stippelijn op Pl. II) — afgekoeld is met behulp van zuivere waterstof, die men uit $\mathfrak{R}hc$ door een, in vloeibare lucht gelegde koelslang *Refr*, heeft geleid. Deze refrigerator is van een dergelijke constructie als de stikstofcondensator Pl. VII van Med. N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03). In plaats van *Nliq* is hier te lezen H_2 en in plaats van *Ox liq*, *Aër liq*, welke uit de vacuumflesch $\mathfrak{A}c$, wordt overgeheveld (verg. § 6).

Bij het overhevelen van de vloeibare waterstof in $\mathfrak{C}r$ wordt de snelheid van overstroomen geregeld naar een kwikmanometertje, dat aan het buisje *c* op het kapje *h* Pl. III bevestigd is.

b. Uit den cryostaat ontwijkt de verdampte waterstof langs U_{37} naar den compressor $\mathfrak{S}$ Pl. II, die ook als vacuumpomp kan dienen en dan veiligheidshalve door $\mathfrak{H}$ en *Kf* bij de gestippelde aankoppeling *Kf* het mogelijkerwijze iets verontreinigde gas in de afzonderlijke bus $\mathfrak{R}hd$ opbergt, of ook langs Y_{32} en *Kpe* of *Kpd* naar de gashouders *Gaz a* of *Gaz b*.

XI. *Het zuiveren van waterstof voor den cyclus.*

a. Hierover is reeds in Med. n°. 94*d* IX gehandeld. Ten einde steeds gemakkelijk zuivere waterstof te kunnen verkrijgen, om onvermijdelijke verliezen goed te maken, en om verder bevrijd te worden van de vrees voor verlies van zuivere waterstof, die anders allicht van het ondernemen van sommige proeven af zou schrikken, is een blijvende inrichting voor de zuivering, volgens het beginsel van IX gemaakt. De zuiveringstoestel is op Pl. IV afgebeeld en op Pl. II bij $\mathfrak{Z}$ terug te vinden.

De onzuivere waterstof uit $\mathfrak{R}hb$ wordt door *Kn* langs een droogbuis toegelaten in een regeneratorslang (zie Pl. IV), bestaande uit twee concentrische in elkaar gesloten buizen, waarvan de buitenste *a* voor aanvoer, de binnenste *b* voor afvoer dient. Buiten den toestel zijn *a* en *b* gescheiden a_0 en b_0, binnen den toestel zet van *c* af, *a* zich voort als a_1 en vervolgens als de spiraal a_2 om te eindigen boven

H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium, X. Het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof. Fl I.

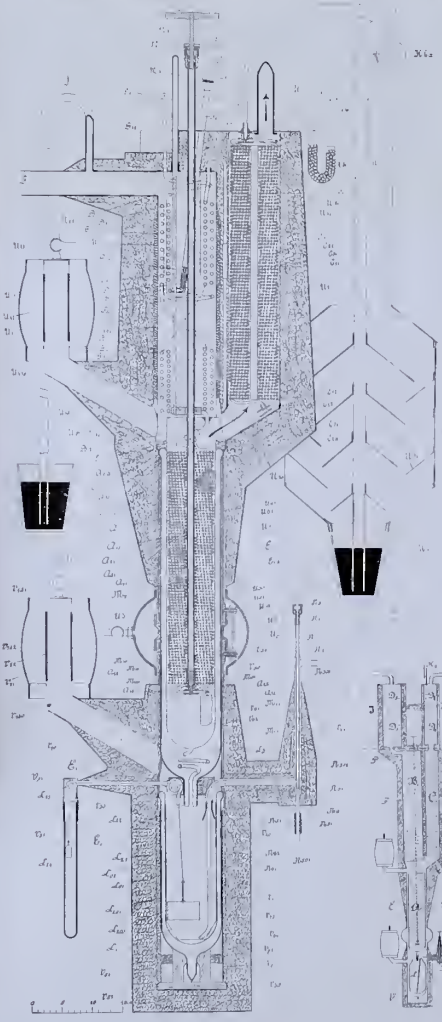


Fig. 1.

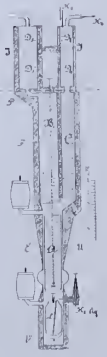
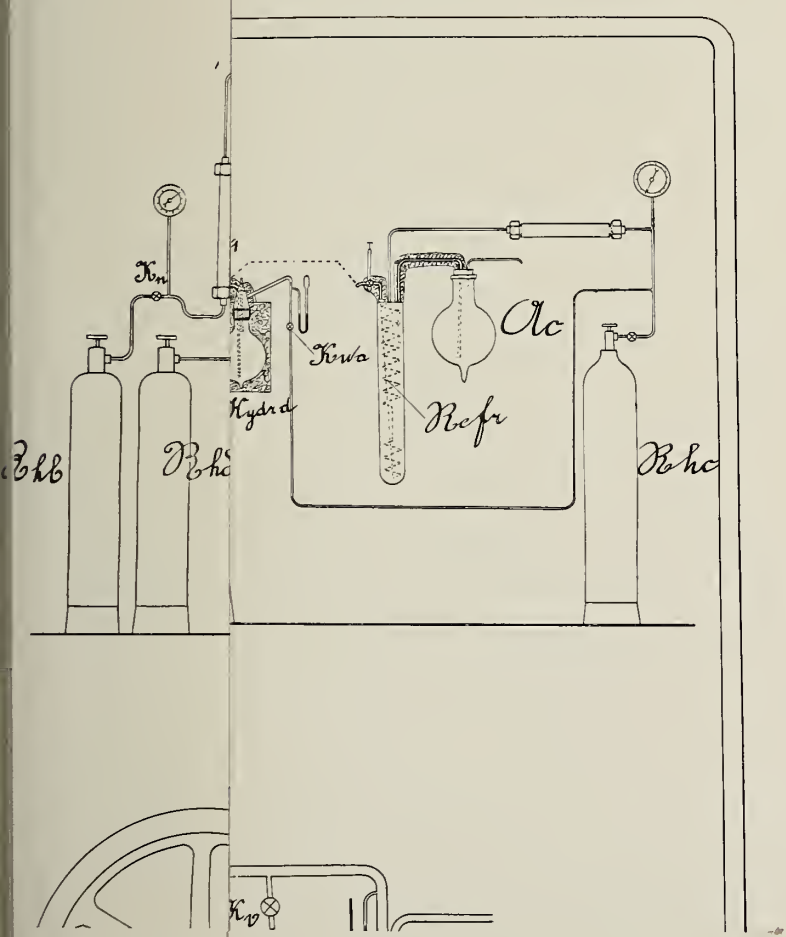
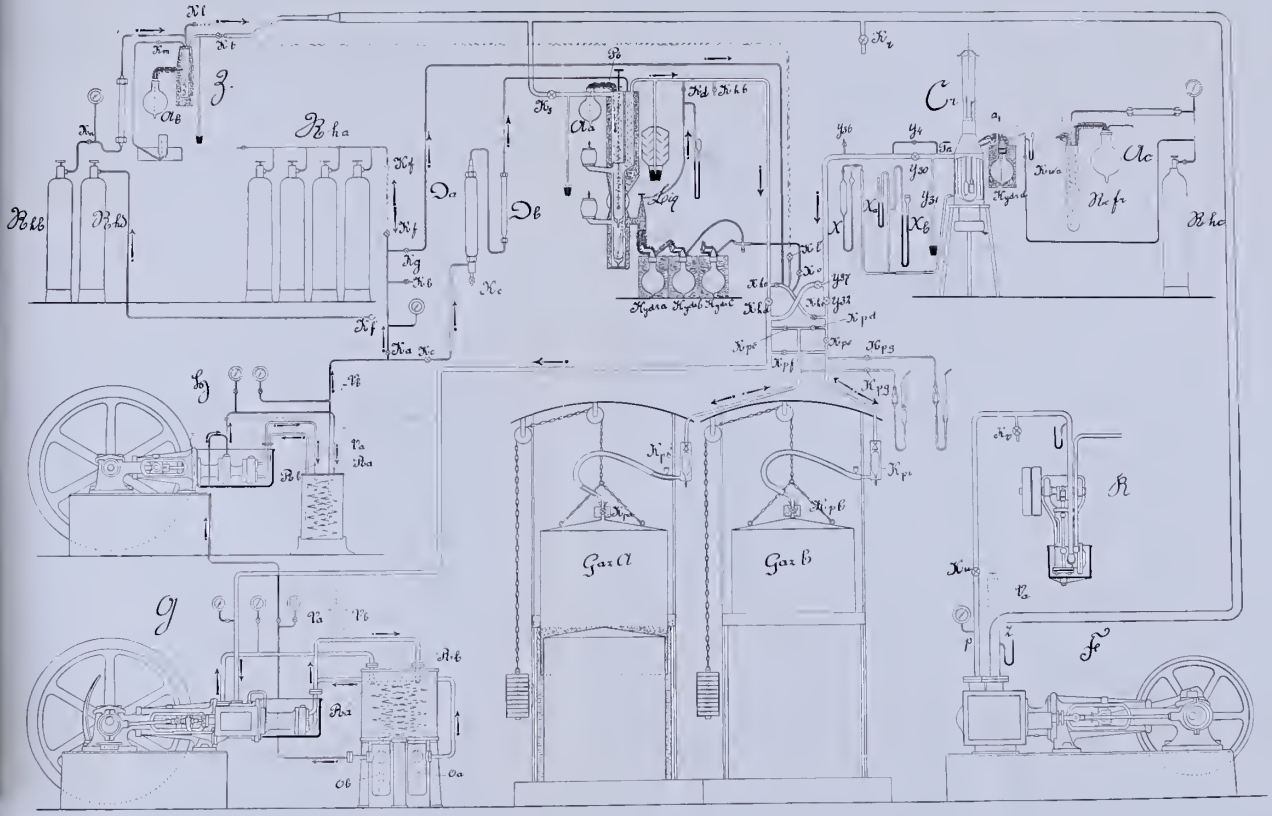


Fig. 2

. KAMERLINGH O
en gelijkmati

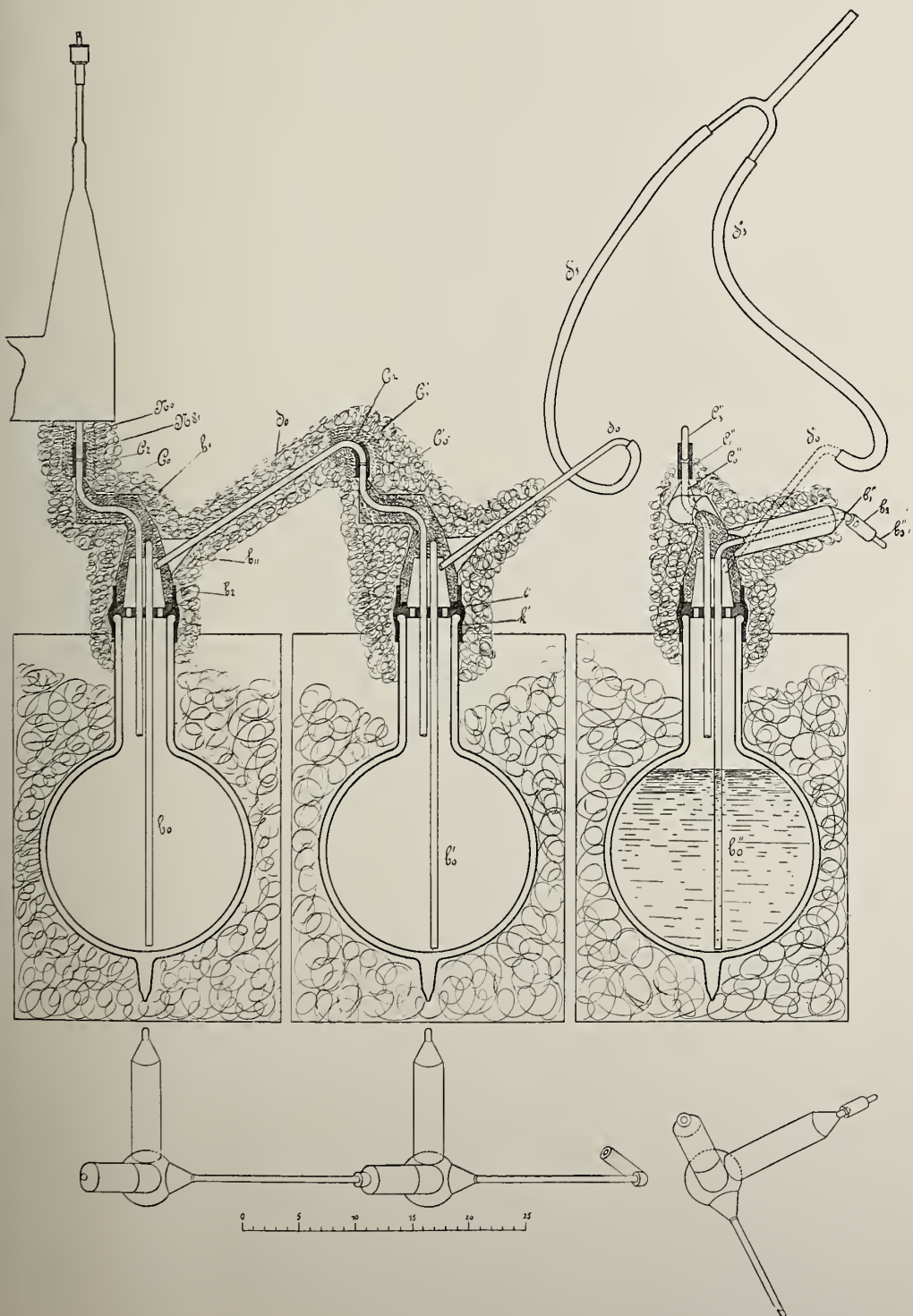
Pl. II.




Gaz a
Gaz b
Liq

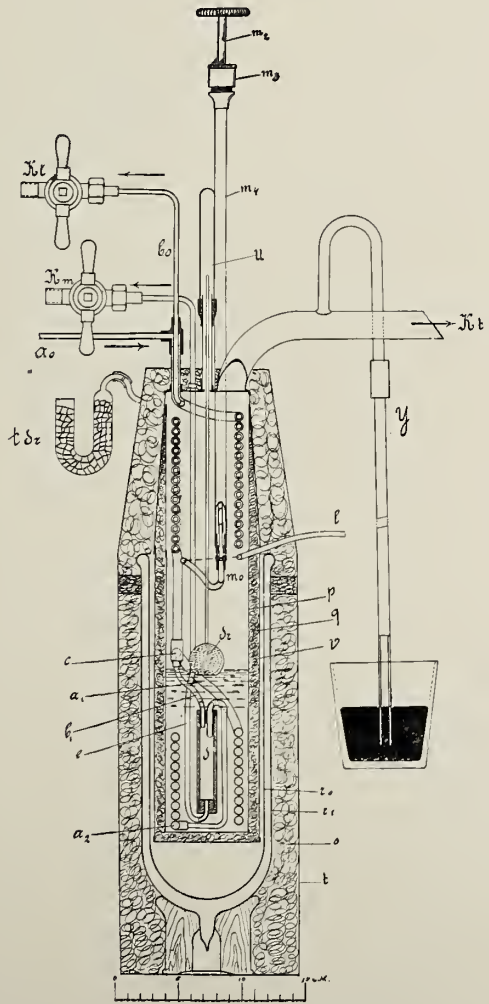
H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. X. Het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof.

Pl. III.



H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. **XI.** Het zuiveren van waterstof voor den cyclus.

Pl. IV.



in het scheifleschje *d*, waaruit het gas door b_1, de als vloeistof afgescheiden verontreinigingen van de waterstof langs *e* en *Km* (verg. Pl. II) ontwijken. De vloeibare lucht, met welke men de koelslang en het scheifleschje afkoelt, wordt langs *l* en het kraantje *m* aangevoerd (en uit het vacuumglas $\mathfrak{A}b$ Pl. II overgezogen); een drijver *dr* wijst den stand van de vloeibare lucht aan. De verdampende lucht wordt door de vacuumpomp $\mathfrak{F}$ (Pl. II) weggezogen langs *Kt*. De refrigeratorbak *p* is tegen warmtetoevoer beschermd door een dubbelen wand *q* van nieuwzilver met kapok-vulling *v*, waarvan het onderste deel gedompeld is in een vacuumglas r_1, terwijl het geheel omhuld is met een laag kapok binnen een dichtgeplakte en geverniste omhulling *t* van bordpapier op dezelfde wijze als bij den waterfstofliquefactor, terwijl de onder kwik uitmondende glazen buis *Y* tevens dient om den druk af te lezen, waaronder de verdamping plaats heeft.

Het kraantje *Km* stelt men zoo, dat men eenige flesschen van bekenden inhoud meer van het afgeblazen gas opvangt, als volgens de analyse door de in het gas aanwezige verontreiniging zou worden gevormd. Op deze wijze brengt men de waterstof tot op een zuiverheid van $^1/_{20}$ %. Zij wordt langs *Kl* naar de gashouders gevoerd door $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{H}$ samengeperst in $\mathfrak{R}hd$.

b. Een tweede zuivering verkrijgt men op de volgende wijze. Heeft men met den liquefactor met zuivere waterstof gewerkt, zoo laat men telkens na afloop der proeven een deel van dit nog niet geheel zuivere gas daarin toe. Na eenigen tijd, gewoonlijk nadat vier Liter vloeibare waterstof gevormd is, verstopt de kraan. Zoodra het noodig wordt deze herhaaldelijk heen en weer te bewegen — door Travers en Olszewski vermeld als voortdurend noodig, door mij echter steeds als een bewijs beschouwd, dat de toestel op het punt is meer en meer in het ongereede te geraken — wordt het werk gestaakt en de kraan *M* (Pl. I) gesloten, waarna $\mathfrak{D}_a$ en $\mathfrak{D}_b$ (Pl. II) langs K_a en K_g naar de gashouders afgeblazen worden en men ook K_c sluit. De vloeibare waterstof laat men na overhevelen verdampen en in den gashouder voor zuivere waterstof overgaan. De verontreiniging vindt men terug, wanneer men bij gesloten *M* en K_c terugkeert tot de gewone temperatuur en het gas analyseert, hetgeen in $\mathfrak{D}$, tot hoogen druk is gekomen. Zoo noodig wordt de gezuiverde waterstof nog een tweede maal aan dit procédé onderworpen.

Door na het werken met den liquefactor met zuivere waterstof telkens nog een tijdlang voorloopig gezuiverde waterstof van $^1/_{20}$ % toe te laten en op het verwijderen van de verontreiniging te letten, verkrijgt en onderhoudt men langzamerhand zonder moeite een voldoende hoeveelheid zuivere waterstof.

XII. *Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°.*

§ 1. *Beginsel.* In § 1 werd medegedeeld dat het weliswaar gelukt was in den cryostaat van Med. N°. 94^a VIII een bad van waterstof af te schenken en daarin te onderhouden, alsmede daarin metingen te verrichten, doch dat het vacuumglas daarna sprong. Het was alleen aan een toeval te wijten, dat de meettoestellen, in welke het werk van geheele serien van waarnemingen opgehoopt was, na verwijdering van de scherven en het gruis van het vacuumglas, nog ongedeerd te voorschijn kwamen. Bij de thans te beschrijven inrichting behoeft men een tegenspoed, als toen een oogenblik dreigde, niet meer te vreezen. Ik heb daarbij het bad tegen warmtetoevoer beschut door den eigen damp. De nieuwe toestel herinnert in vele opzichten aan dien, welken ik gebruikte om een bad van vloeibare zuurstof te verkrijgen, toen de vacuumglazen nog niet bekend waren, ja zelfs is de kookkast van den toenmaligen toestel opgeofferd om den thans beschreven toestel te bouwen.

De voornaamste oorzaak van het springen van vacuumglazen, waarop door mij in verschillende Mededeelingen steeds als een gevaar voor het brengen van kostbare toestellen in vacuumglazen gewezen is, zijn de groote spanningen, die bij de groote temperatuurverschillen van binnen en buitenwand ontstaan en die zich voegen bij de toch reeds aanwezige spanningen tengevolge van het vacuum. Aan den invloed van die spanningen was het bijv. toe te schrijven, dat alleen bij het tusschenlasschen van een metalen veer, de in Med. N°. 85, Juni '03 beschreven vacuumbuizen de afkoeling met vloeibare lucht konden doorstaan. Van tijd tot tijd komt het voor dat een vacuumkolf in gebruik voor vloeibare lucht schijnbaar zonder aanleiding springt en de wijde vacuumcylinders zijn bij dezelfde afkoeling nog minder te vertrouwen dan de kolven. Bij de zooveel sterkere afkoeling met vloeibare waterstof neemt het gevaar van springen nog toe. Door gewoonte wordt men ertoe geneigd een gevaar te vergeten, doch men moet er zich eerder over verwonderen dat een glas als gebruikt voor den cryostaat in Med. N°. 94^a VIII, gevuld met vloeibare waterstof *niet* springt, dan wanneer dit wel het geval is.

In den nieuwen cryostaat Pl. V is de oorzaak van het springen van het vacuumglas zooveel mogelijk weggenomen en wordt zoo het toch mocht bezwijken, voorkomen dat de meettoestellen in het bad daarbij beschadigd zullen worden. De waterstof wordt niet onmiddellijk in het vacuumglas $B'o_2$ gestort, maar in een glazen beker *Ba*, die in het vacuumglas wordt geplaatst (verg. Med. N°. 23, Jan. '96

§ 4 slot) doch daarvan gescheiden door een nieuwzilveren bakje, dat als het ware een voering ervan vormt (verg. X, *L* Pl. I). Verder wordt de verdampte waterstof langs de buitenzijde van het vacuumglas $B'o_1$ geleid. Ten einde ook bij gereduceerden druk te kunnen werken en elke bijmenging van lucht bij de gebruikte zuivere waterstof uit te sluiten, is het geheele bad geplaatst in een stevige cylindrische koperen kast *Ub*, die luchtledig gepompt kan worden.

De thans beschreven cryostaat is in 't bijzonder voor waterstof geschikt, doch vervangt met voordeel de tot nog toe beschrevene, wanneer het ten minste niet noodig is te zien wat binnen het bad geschiedt. Een gewijzigden vorm, die dit op de wijze van den cryostaat met vloeibare zuurstof in Med. N°. 14, Dec. '94 toelaat, hoop ik eerlang te beschrijven.

Men kan in den te beschrijven cryostaat, evenals in den vorigen, zonder iets aan de opstelling van de meettoestellen te veranderen met de laatste alle temperaturen van — 23° tot — 90° met chloormethyl, van — 103° tot — 160° met aethyleen, van — 183° tot — 217° met zuurstof en van — 252° tot — 259° met waterstof doorloopen (alleen voor temperaturen tusschen — 160° en — 180° is methaan nog noodig).

§ 2. *Beschrijving.*

a. De nieuwe cryostaat is afgebeeld op Pl. V. De letters zijn, voor zoover de deelen dezelfde beteekenis hebben, dezelfde als die gebruikt zijn bij de beschrijving der andere cryostaten ; gewijzigde deelen zijn door nieuwe accenten en nieuwe deelen door analoge letters aangegeven, zoodat de toelichtingen bij Med. N°. 83, Med. N°. 94^c en Med. N°. 94^d omtrent het verkrijgen van gelijkmatige en standvastige temperaturen, waarop ik voor 't overige verwijs, ook hier onmiddellijk kunnen dienen. Op Pl. II is aangegeven hoe de cryostaat in den waterstofcyclus is opgenomen. Onder X § 7 is beschreven hoe de vloeibare waterstof in den cryostaat wordt gebracht. Men vergelijke verder deze plaat, vooral wat het regelen van de temperatuur betreft met Pl. VI van Med. N°. 83 Febr. '03. In plaats van *Bu Vac* op die laatste plaat, treedt hier (zie Pl. II van de Med. van heden) de compressor ⊛ als vacuumpomp op.

b. De meettoestellen (voorgesteld is als op de plaat bij Med. N°. 94^a VIII, de vergelijking van een thermoelement en een weerstandsthermometer) bevinden zich binnen den beschermenden cylinder ξ_0 van den roertoestel. Deze wordt op zijn plaats gehouden door 4 glazen buisjes ξ_{40} waaromheen komvormige koperen busjes ξ_{41} en ξ_{42} aan het einde van de stangetjes grijpen.

De beker Ba, die het bad van vloeibare waterstof bevat, wordt gedragen door een nieuwzilveren drager Ba_2 in welks cylindervormigen rand, Ba_0 het glas juist past, en wordt daarbij op zijn plaats gehouden door vier in de figuur niet afgebeelde, van Ba_0 uit afdalende en onder den bodem van Ba zich vereenigende, platte, dunne nieuwzilveren trekbandjes. De ring Ba_0 is de voortzetting van den cylinder Ba_2, waaraan hij door zes versterkte draagribben Ba_1 verbonden is. Aan het boveneinde is hij versterkt met een messingrand Ba_3 met verdikt gedeelte, tegen hetwelk de bovenrand Ua van de kast U aangedrukt wordt. Op Ba_3 rust verder het deksel N_{01} waarin de stop wordt geplaatst, welke de meettoestellen draagt. Sluiting wordt verkregen door den caoutchoucband (zie verder Med. N°. 83, 94^c en 94^d).

c. In de kast U hangt het vacuumglas B'_0 waarvan de binnenwand B'_{01} beschermd wordt door het dunne nieuwzilverbakje Bb, aan trekbandjes L'_6 en steunende op het houten blokje L'_1. Het cartonnen omhulsel B_4 dwingt de verdampte waterstof, die tusschen de draagbalkjes Ba_1 uittreedt, over het cartonnen scherm B'_{030}, met steunnokjes B'_{031} den door de pijltjes aangegeven weg te volgen om bij T_{12} te ontwijken. De kast is gevoerd met vilt, bedekt met nikkelpapier (verg. med. N°. 14 Dec. '94 en med. N°. 51 Sept. '99).

d. Het opsluiten van vloeibare waterstof binnen een gesloten ruimte, van welke de wanden voor een groot deel op een veel hoogere temperatuur dan de kritische van waterstof zijn, maakt bijzondere veiligheidsmaatregelen noodig. Dat dit geen noodelooze voorzorg is, bleek, toen bij het onverwachts springen van het vacuumglas (zie X § 1) van meer dan 1,5 Liter vloeibare waterstof binnen een paar seconden niets meer te zien was. Dit verdwijnen staat toch gelijk met het plotseling vormen van eenige honderden liters gas, die de kast zouden doen ontploffen indien niet een ruime gelegenheid aan het gas werd aangeboden, om zoodra de druk even boven den atmosferischen stijgt, te ontsnappen.

Dit gevaar wordt bij den nieuwen cryostaat op dezelfde wijze ontgaan als waarop ik het indertijd, toen ik voor het eerst een bad van vloeibare zuurstof in een gesloten toestel wilde afschenken, (zie Med, N°. 14 van Dec. '94) vermeed.

De bodem van de kast U is tot een veiligheidsdop van zeer groote afmeting gemaakt; hij sluit als deksel W_2 van geperforeerd koper met versterkte ribben in de met den rand W versterkte cylindervormige kast Ub. Hierover is aan de buitenzijde (als in de veiligheidsbuizen bij den waterstofliquefactor) een dun caoutchouc blad W_1 — van het koper gescheiden door een blaadje papier, — gespannen, hetwelk bij den geringsten overdruk opzwelt en springt, terwijl verder het

geheele vacuumglas of stukken daarvan, zoo zij uit de kast mochten worden gestooten, het deksel W_2 zonder weerstand voor zich uitdrijven. Daar de luchtdichte sluiting van het caoutchoucblad W_1 op den ring W niet te vertrouwen zou zijn en diffusie door aanraking van het caoutchoucblad met lucht moet worden voorkomen wordt het gebracht in een omgeving van waterstof, door den caoutchouccylinder Wa gespannen op den steunring Ub_4 en het hulpdeksel Wb langs Wc met dit gas te vullen.

De touwen Wd dienen om het hulpdeksel Wb met een bepaalde kracht tegen het veiligheidsblad te drukken nl. zooveel als de overdruk bedraagt, die men om een of andere reden in de kast wil toelaten. Om te zorgen dat het caoutchouc niet afgekoeld wordt, waardoor de inrichting niet aan de bedoeling zou beantwoorden, is de kast naar beneden cylindervormig verlengd met Ub_2 en dit deel tusschen den rand Ub_4 en het hoofddeel van de kast om de afkoeling van den benedenrand te voorkomen van nieuw zilver gemaakt. Het geheele benedenste deel is met lagen vilt en wol opgevuld terwijl nog een roodkoperen flens Ub_3 dient om, door warmtegeleiding van buiten af, den benedenwand tegen afkoeling te beschermen.

e. De waterstof wordt toegevoerd door het nieuwzilveren buisje a, waarop de hevelbuis van een vacuumglas (X § 7) met een eindje caoutchoucslang a'_2 (dat anders met een tap a_4 is gesloten, verg. X § 4 *a*) wordt bevestigd. Het nieuwzilveren buisje wordt gestoken door een nieuwzilveren zijstuk Ud, dat op de kast vastgesoldeerd en met kapok, tegen gehouden door een papieren buisje Ue, opgevuld is en aan 't eind een steunkurkje Uf draagt. Wanneer het vacuumglas B_0 met de kast U om den beker Ba wordt gebracht, trekt men het buisje a_1 een weinig terug. Is de kast op haar plaats bevestigd dan schuift men het vooruit tot een nokje op a_1 stuit in een uitholling in Ud, zoodat het uiteinde ervan uitsteekt binnen den beker Ba en de waterstof hierin uit kan stroomen. Met het caoutchoucbuisje a_2 verkrijgt men sluiting op a_1 en Ud.

§ 3. *Opmerkingen over het meten met den cryostaat.*

In X § 7 is reeds medegedeeld hoe de voorloopige afkoeling verkregen wordt. In een der proeven werd daarvoor bijv. verbruikt 3 Liter vloeibare lucht en was de temperatuur verlaagd tot —110°. Er werd toen zeer voorzichtig waterstof in den cryostaat overgeheveld, onder voortdurend werken van den roerder; eene hoeveelheid van 5 Liter was voldoende om het bad van 1,5 Liter te verkrijgen. Er verdampte toen verder circa 0,2 Liter per uur. Bij het reduceeren van den druk tot circa 60 mm. verdampte ± 0,2 Liter, daarna bleef de verdamping

weder ongeveer dezelfde. De temperatuur kon op de in vroegere mededeelingen beschreven wijze tot op 0°.01 constant gehouden worden. De verkregen temperatuurkrommen waren niet minder regelmatig dan die op Pl. III van Med N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03).

Wordt de druk tot op 54 mm. gereduceerd dan wordt het tikken van de kleppen van den roerder van dofferen klank, daar dan vaste waterstof zich af gaat zetten.

XIII. *Bereiding van vloeibare lucht met het Cascadeproces.*

§ 1. *Doeltreffendheid van de regeneratieve cascade methode.* Er bestond tot nog toe geen aanleiding om in een der Mededeelingen uitvoeriger te handelen over de bereiding van vloeibare lucht door het Leidsche cascade-proces. Bij de beschrijving van de bereiding van vloeibare zuurstof (in Med. N°. 24 Dec. '94) werd ook vermeld, dat in 't bijzonder de aethyleenrefrigerator met zorg was geconstrueerd, en dat daarin het beginsel lag, naar hetwelk verschillende cycli, in de *regeneratieve cascade* werkende, kunnen worden uitgevoerd.

Toen de nieuwe chloormethylcirculatie (zie Med. N°. 87, Juli '03) voltooid en de gebrekkige chloormethylrefrigerator door een, volgens het model van de aethyleenkookflesch met toepassing van de opgedane ervaring geconstrueerden, vervangen was, kon men een veel grootere hoeveelheid vloeibare zuurstof, (gemakkelijk 10 Liter per uur) met dezelfde aethyleenkookflesch bereiden. Deze hoeveelheid zal nog aanzienlijker worden, wanneer ook de regenerator in de aethyleenkookflesch, zooveel wordt vergroot als nu weder volgens de ervaring met den nieuwen chloormethylregenerator wenschelijk is gebleken en wanneer de zuigbuis van de aethyleenkookflesch door een wijdere dan oorspronkelijk gebruikt kon worden, vervangen zal zijn. Het tusschenschakelen van een stikstofoxydule- en van een methaancyclus, waaraan in '94 in de eerste plaats gedacht werd, is op den achtergrond getreden toen het ook uit anderen hoofde (verg. XII § 1 slot) wenschelijk bleek vacuumpompen van grooter verplaatsend vermogen aan te schaffen ('96) en de inrichting daarvan voor het werken met zuivere gassen (beschreven in Med. N°. 83, Febr. '03) ze geschikt had gemaakt voor inlassching in den aethyleen- en den chloormethylcyclus (terwijl voor de cryostaten met deze cycli kon worden volstaan). Er konden grootere hoeveelheden zuurstof dientengevolge verwerkt worden, waarvoor (als in '94 reeds aangegeven) een Brotherhoodcompressor in gebruik kwam (zie de beschrijving van de inrichting voor het werken met zuiver gas in Med. N°. 51 § 3, Sept. '99). Een afbeelding van de cascademethode in dit stadium is gevoegd

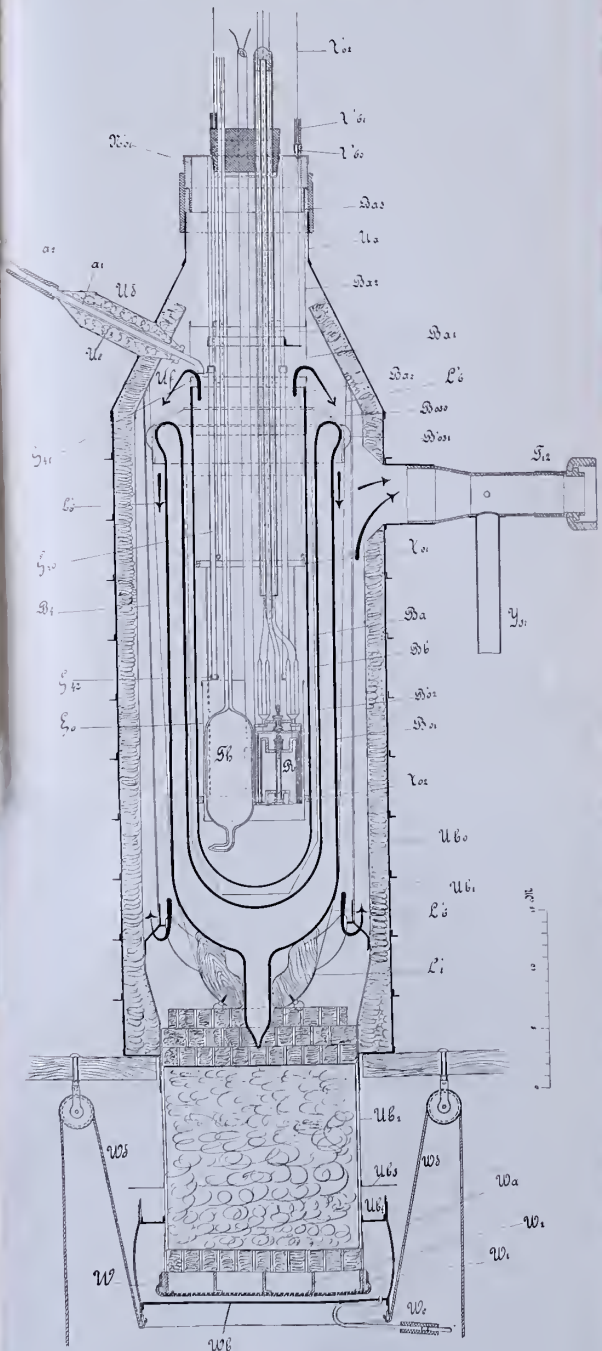
weder ongeveer dezelfde. De temperatuur kon op de in vroegere mededeelingen beschreven wijze tot op 0°.01 constant gehouden worden. De verkregen temperatuurkrommen waren niet minder regelmatig dan die op Pl. III van Med N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03).

Wordt de druk tot op 54 mm. gereduceerd dan wordt het tikken van de kleppen van den roerder van dofferen klank, daar dan vaste waterstof zich af gaat zetten.

XIII. *Bereiding van vloeibare lucht met het Cascadeproces.*

§ 1. *Doeltreffendheid van de regeneratieve cascade methode.* Er bestond tot nog toe geen aanleiding om in een der Mededeelingen uitvoeriger te handelen over de bereiding van vloeibare lucht door het Leidsche cascade-proces. Bij de beschrijving van de bereiding van vloeibare zuurstof (in Med. N°. 24 Dec. '94) werd ook vermeld, dat in 't bijzonder de aethyleenrefrigerator met zorg was geconstrueerd, en dat daarin het beginsel lag, naar hetwelk verschillende cycli, in de *regeneratieve cascade* werkende, kunnen worden uitgevoerd.

Toen de nieuwe chloormethylcirculatie (zie Med. N°. 87, Juli '03) voltooid en de gebrekkige chloormethylrefrigerator door een, volgens het model van de aethyleenkookflesch met toepassing van de opgedane ervaring geconstrueerden, vervangen was, kon men een veel grootere hoeveelheid vloeibare zuurstof, (gemakkelijk 10 Liter per uur) met dezelfde aethyleenkookflesch bereiden. Deze hoeveelheid zal nog aanzienlijker worden, wanneer ook de regenerator in de aethyleenkookflesch, zooveel wordt vergroot als nu weder volgens de ervaring met den nieuwen chloormethylregenerator wenschelijk is gebleken en wanneer de zuigbuis van de aethyleenkookflesch door een wijdere dan oorspronkelijk gebruikt kon worden, vervangen zal zijn. Het tusschenschakelen van een stikstofoxydule- en van een methaancyclus, waaraan in '94 in de eerste plaats gedacht werd, is op den achtergrond getreden toen het ook uit anderen hoofde (verg. XII § 1 slot) wenschelijk bleek vacuumpompen van grooter verplaatsend vermogen aan te schaffen ('96) en de inrichting daarvan voor het werken met zuivere gassen (beschreven in Med. N°. 83, Febr. '03) ze geschikt had gemaakt voor inlassching in den aethyleen- en den chloormethylcyclus (terwijl voor de cryostaten met deze cycli kon worden volstaan). Er konden grootere hoeveelheden zuurstof dientengevolge verwerkt worden, waarvoor (als in '94 reeds aangegeven) een Brotherhood-compressor in gebruik kwam (zie de beschrijving van de inrichting voor het werken met zuiver gas in Med. N°. 51 § 3, Sept. '99). Een afbeelding van de cascademethode in dit stadium is gevoegd



bij een beschrijving van het cryogeen laboratorium door H. H. Francis Hyndman in „Engineering" 4 Mrt. '04) gegeven.

In die afbeelding is aangegeven hoe van den zuurstofcyclus gebruik gemaakt wordt om de circulatie in den stikstofcyclus, beschreven in Med. N°. 83, Febr. 1903 te onderhouden. Op dezelfde wijze als stikstof wordt ook lucht met den zuurstofcyclus vloeibaar gemaakt. Bij het aftappen stroomt de vloeibare lucht met een flinken straal uit het buisje; per uur wordt circa 9 liter vloeibare lucht opgevangen, zoodat op een dag gemakkelijk een halve hectoliter kan worden bereid.

Vloeibare lucht heeft in 't oog vallende voordeelen boven vloeibare zuurstof, wanneer het er op aankomt groote voorraden te bewaren of om, met in het cryogeen laboratorium vloeibaar gemaakt gas, toestellen in andere localiteiten af te koelen. Alleen waar het op standvastige temperaturen aankomt zal men voor afkoeling aan zuivere zuurstof of stikstof de voorkeur geven en ook dan kan de vloeibare lucht middelaar zijn, want men behoeft de genoemde gassen slechts door een koelslang gedompeld in vloeibare lucht te leiden om bijna evenveel ervan vloeibaar te maken als er lucht verdampt. Geleidelijk heeft dan ook de permanente voorraad van vloeibare lucht, die in het Natuurkundig Laboratorium onderhouden wordt, grooter omvang verkregen, zoodat al sedert jaren geregeld naar binnen- en buitenland op aanvraag onmiddellijk verzonden wordt.

§ 2. *De luchtliquefactor.* De toestel voor de bereiding van vloeibare lucht met behulp van vloeibare zuurstof is in beginsel dezelfde als die, welke voor stikstof dient, doch van grootere afmetingen. (Zie Pl. IV).

Dezelfde letters wijzen overeenkomstige deelen van den (Med. N°. 83, pl. VII) afgebeelden toestel voor 't vloeibaar maken van stikstof aan. Om lucht vloeibaar te maken wordt gewone atmosferische lucht, na door een oplossing van Natriumhydraat van CO_2 te zijn bevrijd, tot op 10 atmosfeeren gecomprimeerd in de spiraal $RgRf$ Pl. VI fig. 1. Deze spiraal ontspruit uit de buis Rg_{00} in het soldeerstuk Rg_{01} en heeft vier takken Rg_1, Rg_2, Rg_3 en Rg_4. Elk dezer buizen heeft een diameter inwendig van 3,5 mM. en uitwendig van 5,8 mM. en is lang 22 M. De spiraal is gewonden in 63 lagen evenals de regeneratorspiraal van den waterstofliquefactor (zie X) en is, met flanel bekleed passend geschoven om de nieuwzilveren buis p_0 in de nieuwzilveren kast p. De 4 windingen vereenigen zich onderaan in eenzelfde soldeerstuk tot de spiraal Rf, lang 8 M., die in een bad van vloeibare zuurstof wordt gedompeld en waaruit de vloeibare lucht door Rf_3 in den opvangtoestel (zie fig. 2) stroomt. Deze bevindt zich naast den hoofdtoestel

(zie fig. 2) en bevat het opvangglas r_0, waarin de vloeibare lucht wordt afgescheiden en waaruit zij wordt afgetapt door het hevelbuisje. Het opvangglas is met een drijver *dr* voorzien. Bij het werken ziet men dezen vrij snel regelmatig stijgen.

§ 3. *Verdere verbetering.* Er zoude aan de regeneratieve cascade nog allerlei te verbeteren zijn voor het beginsel ervan ten volle verwezenlijkt is en deze of gene verbetering, in een der cycli aangebracht, ook overal in de andere terugggevonden wordt, en het rendement tot een maximum is opgevoerd; doch dit is meer van technischen aard. De beschikbare tijd wordt liever aan andere vraagstukken gewijd, daar de regeneratieve cascade voldoende vloeibare lucht geeft. Voldoende, maar niet te veel, daar voor het werken met vloeibare waterstof (zie X) naast andere onderzoekingen op cryogeen gebied het van groot belang is te beschikken over zulke betrekkelijk overvloedige voorraden vloeibare lucht als de Leidsche cascade levert.

XIV. *Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere.*

Het lag voor de hand om de zuivere waterstof ten behoeve van de vulling van thermometers en piëzometers[1]) te verkrijgen door vloeibare waterstof onder verlaagden druk over te laten distilleeren[2]) en de op deze wijze verkregen zeer zuivere vloeistof weder te laten verdampen. Daartoe is het volgende toestelletje (Fig. 4) ingericht.

Het vacuumglaasje A wordt aan den liquefactor zie Pl. I en III bij N_0 of aan een voorraadflesch verbonden, luchtledig gepompt en als aan-

[1]) In Med. N°. 94*e* (Juni '05) werd aangegeven, dat eene zuivering door samenpersing gepaard aan afkoeling voor waterstof nog nadat deze in den ontwikkelingstoestel (Med. N°. 27, Mei '96 en Med. N°. 60, Juni 1900) over P_2O_5 geleid was van nut kon zijn. Ik had daarbij vooral opnemen van waterdamp op het oog daar bij eene goede uitvoering het gas, ten minste tot merkbare dampspanning, niet anders dan H_2O en SO_4H_2 kan bevatten. Hoe volledig de bevrijding van waterdamp op deze wijze kan zijn, blijkt uit een berekening van Dr. W. H. Keesom, waarbij gebruik gemaakt is van de formule van Scheel Verh. D. ph. G. 7. p 391. 1905 en waaruit voor de spanning van waterdamp (boven ijs) volgt 10^{-19} mM., zoodat water volledig wordt achtergehouden als het gas lang genoeg in den toestel blijft. Hetzelfde geldt van alle stoffen met hooger kookpunt dan water (SO_3 dampen, vetdampen enz.). Ook om deze stoffen tegen te houden is de bewerking wenschelijk. Wat nu een alleen door water verontreinigd gas betreft, zoo zal daarin, wanneer het in een stroom van 3 Liter per uur door eene buis van 2 cM. diameter en lang 8 cM. over P_2O_5 wordt gevoerd, niet meer dan 1 mGr. per 40000 Liter overblijven (Morley, Amer. Journ. of Sc. 3 Ser. 34 o. 149, 1887). Deze hoeveelheid van 1 mGr. is waarschijnlijk slechts voor een klein deel water (Morley. Journ. d. ch. phys. 3. p. 241 1905). Volstrekt noodig zou dus de aangegeven bewerking, althans wat waterdamp betreft, niet zijn wanneer men zeker was van voldoende aanraking met het P_2O_5. Zij neemt echter de onzekerheid weg, die daaromtrent blijft bestaan.

[2]) Dit is eene voor de hand liggende uitwerking van wat Dewar aangeeft. Proc. Chem. Soc. 15, p. 71, 1899.

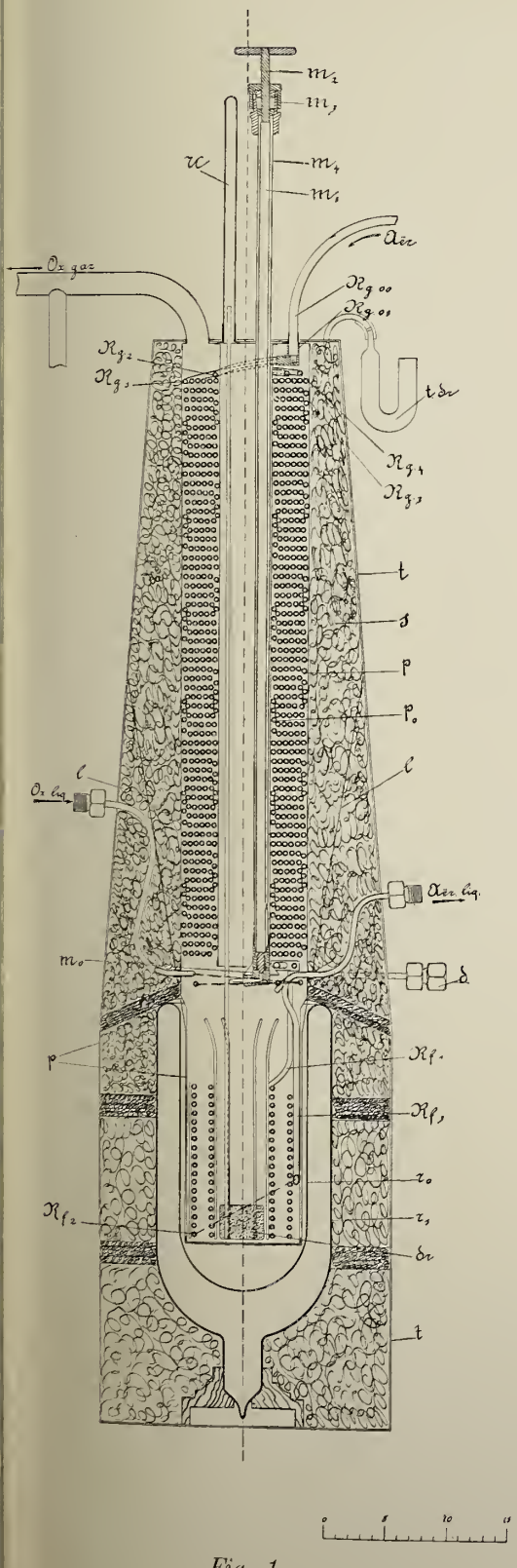


Fig. 1.

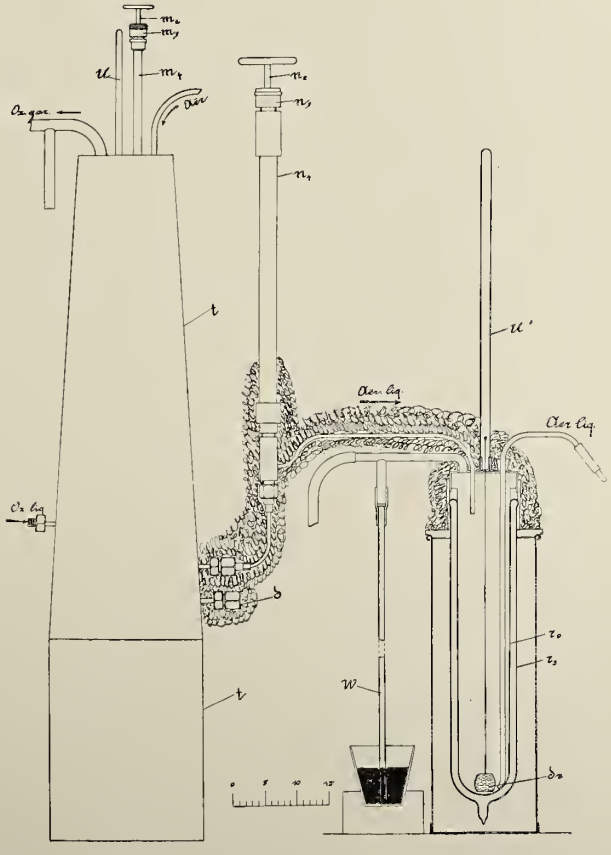


Fig. 2.

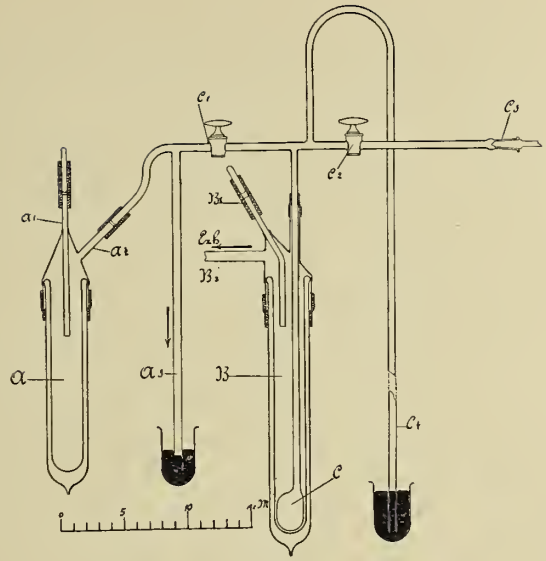


Fig. 4.

gegeven in X § 7 gevuld met vloeibare waterstof. Vervolgens wordt C in het vacuumglaasje B (dat vooraf luchtledig gepompt is) eenige malen van uit A gevuld, en het vacuumglaasje B met B_1 aan den liquefactor verbonden, en evenals A leeggepompt en eveneens met vloeibare waterstof gevuld, en bij B_2 met de gewone luchtpomp verbonden, zoodat de waterstof in B bij 60 m.m. kookt. Men laat dan in het reservoir C waterstof langs c_1 overdistilleeren, sluit c_1 en koppelt het caoutchoucslangetje bij a af en brengt den geheelen toestel over naar de meettoestellen, die men met zuivere waterstof vullen wil, waartoe de toestel bij c_3 met de voor dit doel bestemde kwikluchtpomp verbonden wordt. Ten einde te zorgen dat de waterstof in B slechts langzaam verdampt en die in C dus niet verloren gaat voor men tot het vullen van de toestellen wil overgaan, wordt B in een vacuumglas met vloeibare lucht geplaatst.

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes biedt aan Mededeeling N° 95^a uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. Kamerlingh Onnes en C. A. Crommelin: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer."*

§ 1. *Inleiding.*

De in het volgende medegedeelde metingen vormen een deel van eene reeks, die reeds lang geleden werd ondernomen met het oog op het verkrijgen van zooveel mogelijk onafhankelijke en onderling controleerbare gegevens over de betrouwbaarheid van de bepaling

van lage temperaturen. Daartoe bestond het plan een thermo-element [1]), een goud- en een platina-weerstandsthermometer [2]) elk voor zich met twee gasthermometers en verder onderling te vergelijken, terwijl de afwijking der gasthermometers door een differentiaalthermometer [3]) zou worden bepaald. Oorspronkelijk was naast waterstof, stikstof gekozen, voor de stikstof kwam later helium in de plaats. Van al deze metingen zijn, tengevolge van herhaling bij steeds aangebrachte verbeteringen, nog slechts cijfers medegedeeld, die betrekking hebben op den goud- en den platina-weerstandsthermometer [4]), en ook deze, welke in Med. 95^c door andere vervangen worden, hebben alleen beteekenis, voor zoover zij aantoonen, dat de gevolgde methode tot de gewenschte nauwkeurigheid kan voeren. De door ons, wat bovengenoemd thermo-element betreft, verkregen uitkomsten beantwoorden ook nog niet in alle opzichten aan de gestelde eischen; intusschen scheen het toch wenschelijk ze te publiceeren, daar de temperatuurbepalingen bij verschillende metingen, over welke binnen niet al te langen tijd mededeelingen zullen worden gedaan, met dit thermo-element zijn verricht.

§ 2. *Vergelijkingen door andere waarnemers.*

a. Constantaan-ijzer elementen, zijn alleen door HOLBORN en WIEN [5]) en LADENBURG en KRÜGEL [6]) met den waterstofthermometer vergeleken. De calibratie der beide eerstgenoemde onderzoekers berust op eene vergelijking bij twee punten nl. in vast koolzuur en alcohol (waarvoor —78°.3 opgegeven wordt) en in vloeibare lucht (waarvoor zij —189°.1 vonden). Zij meenen de temperatuur door de formule

$$t = aE + bE^2$$

voor te kunnen stellen, en vermelden, dat bij een controlewaarneming in kokende zuurstof (— 183°.2 bij 760 m.m. kwikdruk) een goede overeenstemming verkregen werd.

LADENBURG en KRÜGEL vinden HOLBORN en WIEN's formule onvoldoende en stellen voor

$$t = aE + bE^2 + cE^3.$$

Zij vergelijken het thermo-element met den waterstofthermometer bij 3 punten, nl. vast koolzuur met alcohol, kokend aethyleen en

---

[1]) Zie Med. N°. 27 en 89. (Versl. Kon. Ac. 30 Mei 1896, 27 Juni 1896 en 28 Nov. 1903).

[2]) Zie Med. N°. 77 en 93. (Idem 22 Febr. 1902 en 25 Juni 1904).

[3]) Zie Med. N°. 94^c. (Idem 27 Mei 1905).

[4]) Zie Med. N°. 93. (Idem 25 Juni 1904).

[5]) Sitz.ber. Ac. Berlin. Bd. 30, pg. 673, 1896, en Wied. Ann. Bd. 59, pg. 213. 1896.

[6]) Chem. Ber. Bd. 32, pg. 1818. 1899.

vloeibare lucht. Ter controle bepalen zij het smeltpunt van ether (— 112°), waarbij zij eene afwijking van 1° vinden. Hiermede stellen zij zich tevreden.

ROTHE [1]) kon slechts tot eene indirecte vergelijking met den waterstofthermometer geraken. Hij vergeleek zijne thermo-elementen constantaan-ijzer bij — 79° met den alcoholthermometer, dien WIEBE en BÖTTCHER [2]) aan den gasthermometer hadden aangesloten en bij — 191° met een platina-weerstandsthermometer, die bij ongeveer dezelfde temperatuur door HOLBORN en DITTENBERGER [3]) in de Phys. Techn. Reichsanstalt met den waterstofthermometer vergeleken was.

De thermostaat was zeer gebrekkig; afwijkingen in de temperatuur van 0°.4 tot 0°.7 kwamen binnen 10 minuten voor. (Verg. wat dit betreft § 7). Daar ROTHE zich tot twee punten bepaalde, moest hij zich met eene quadratische formule tevreden stellen en berekende hij dezelfde formule als HOLBORN en WIEN.

Uit de medegedeelde cijfers voor andere temperaturen is alleen af te leiden, dat de onderlinge verschillen van de afwijkingen der verschillende thermo-elementen constantaan-ijzer en constantaan-koper van hunne quadratische formules een paar tiende graden konden bedragen. Omtrent de aansluiting bij den waterstofthermometer blijkt niets. Op het vraagstuk, waarmede wij ons bezig houden, heeft dit onderzoek verder geen betrekking.

b. Onder de thermo-elementen van andere samenstelling vermelden wij dat van WROBLEWSKI [4]), die zijn nieuw-zilver-koper element bij + 100° (water), — 103° (aethyleen onder atmospherischen druk kokend) en — 131° (aethyleen onder gereduceerden druk kokend) met den waterstofthermometer vergeleek en hieruit eene cubische formule voor t berekende. Hij toetste deze door de kookpunten van zuurstof en stikstof te bepalen, en vond een overeenstemming binnen 0°.1 met den waterstofthermometer. Daar echter WROBLEWSKY voor het kookpunt van zuivere zuurstof bij 750 m.M. druk 181°.5 vond, is aan de door hem vermelde overeenstemming geene waarde te hechten.

Het onderzoek van DEWAR [1]) over het element platina-zilver had voorloopig enkel ten doel na te gaan of dit element geschikt is, voor het meten van temperaturen bij — 250° en daar beneden (waar de gevoeligheid van den weerstandsthermometer belangrijk vermindert), en heeft zich bepaald tot het bewijs, dat dit werkelijk het geval is.

---

[1]) Ztschr. für Instrumentenk. Bd. 22 pg. 14 en 33. 1902.

[2]) „ „ „ Bd. 10 pg. 16. 1890.

[3]) Drude's Ann. Bd. 6 pg. 242. 1901.

[4]) Sitzungsber. Ac. Wien Bd. 91. pg. 667. 1885.

c. Er is dus nog geen onderzoek verricht, hetgeen, gelijk het in deze mededeeling bevatte, de gelegenheid geeft te beoordeelen in hoeverre thermo-elementen voor de nauwkeurige bepaling van lage temperaturen (b.v. tot op $^1/_{20}^\circ$ nauwkeurig), geschikt zijn, alsmede door welke formule en met hoeveel punten van calibratie een willekeurige temperatuur in een aangegeven gebied tot op dit bedrag kan worden bepaald.

§ 3. *Wijzigingen in de thermo-elementen en hulptoestellen.*

Wij vermelden hier eenige wijzigingen en verbeteringen, die in § 1 van Med. N°. 89 nog niet beschreven zijn. De eerste twee (*a.* en *b.*) zijn bij het element waarmede de volgende metingen zijn verricht, ook niet aangebracht, doch zij zijn sedert dien bij andere elementen toegepast, en worden daarom volledigheidshalve vermeld.

a. Let men er op, dat het thermo-element bij verschillende metingen niet altijd onder dezelfde omstandigheden gebruikt wordt, b.v. niet tot op dezelfde diepte in het bad wordt gedompeld enz., en dat, al geschiedt dit ook al, de tijd gedurende welke dit bij gelijkblijvende temperatuur het geval is, niet altijd zoo lang zal zijn, dat in beide gevallen dezelfde verdeeling der temperatuur in de metaaldeelen van het element zal zijn verkregen, dan blijkt het van 't grootste belang er voor te zorgen, dat de temperatuur van de soldeerplaats, die door de electromotorische kracht wordt gegeven, van die van het oppervlak van het koperen beschermingsblokje d.w.z. die van het bad zoo weinig mogelijk en in alle gevallen slechts zeer weinig verschilt.

Fig. 1.

De constructie van de contactplaats, in fig. 1 afgebeeld, biedt daarvoor meer waarborg, dan die op Plaat I van Med. N°. 89. De draden *a* en *b* zijn gesoldeerd op den bodem van kleine holten *c*, die in het beschermingsblokje zijn uitgeboord, en zijn elk door een dunwandig glazen buisje geïsoleerd. Is de constructie van Plaat I Med. N°. 89 niet volgens de bedoeling uitgevoerd (doorzagen van proefstukken bewijst in hoeverre men daarin geslaagd is) en bevindt zich dus de soldeerplaats op eenigen afstand van het bovenvlak van het blokje, zoo kan men gemakkelijk berekenen, dat ten gevolge van de warmtegeleiding langs de draden, wanneer het thermo-element in vloeibare zuurstof gedompeld is, zelfs wel een graad temperatuursverschil tusschen de contactplaats en het blokje kan bestaan.

[1]) Proc. R. S. Bd. 76, pg. 317. 1905.

Bij wijziging in de omstandigheden, waaronder het element wordt gebruikt, zal dit verschil eene andere waarde aannemen en komt er dienovereenkomstig onzekerheid in de bepaling van de temperatuur van het blokje. Allicht zal dan ook eene traagheid in de aanwijzingen van het element worden waargenomen.

Ofschoon deze constructie (fig. 1) (die een blokje van grootere dikte eischt dan die volgens Med. N°. 89, Plaat I) bij het gebruikte element niet is toegepast, behoeven wegens de groote zorg, waarmede dit laatste geconstrueerd is, onzekerheden uit dien hoofde niet gevreesd te worden.

b. Worden temperaturen, lager dan —253° bepaald, zoo zou in plaats van de in § 1 van Med. N°. 89 vermelde vulling met waterstof, eene met helium kunnen treden.

c. De glazen buizen der kwikcommutatoren, beschreven in Med. N°. 27, zijn niet meer in kurken (zie Pl. IV, fig. 4, *k*) maar in paraffine gevat, ten einde een volkomen isolatie te verkrijgen, die blijkens ervaring door den glaswand niet gewaarborgd wordt. De buisjes zijn bij de insmeltplaats der platinadraden c_1 c_2 c_3 en c_4 verder

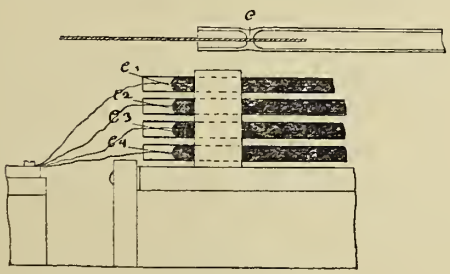


Fig. 2 en 3.

verlengd, (zooals afgebeeld in fig. 2 en 3), ten einde het vroeger dikwijls voorkomende afbreken der platinadraden tegen te gaan.

d. De platinadraden der Westonelementen werden geamalgameerd door koken met kwik, (welke methode sedert door die met den electrischen stroom vervangen is [1]). De elementen zelve hebben zich al de jaren uitstekend gehouden.

e. Niettegenstaande alle voorzorgen beschreven in Med. N°. 89, blijven er toch thermo-electromotorische krachten in de draden over, die bij het groote temperatuursverschil op verschillende punten van eenzelfden draad zonder twijfel een meetbaar bedrag hebben. Wanneer er echter voor gezorgd wordt, dat de omstandigheden, waaronder het element gebruikt wordt wat de temperatuur langs de draden betreft, nagenoeg dezelfde zijn als die bij de calibratie, zal toch aan

[1]) Vgl. JAEGER, Die Normalelemente, pg. 57.

een bepaalde temperatuur van het koperen blokje een bepaalde waarde van de electromotorische krachten beantwoorden. Er wordt niet beoogd de electromotorische kracht van de combinatie der metalen, die bij de soldeerplaats in aanraking met elkaar zijn, nauwkeurig te bepalen, maar enkel, dat een bepaalde electromotorische kracht bij een bepaalde temperatuur van het bad, waarin het element gedompeld wordt, nauwkeurig wordt aangewezen. (Verg. overigens § 5).

Ten einde den invloed der warmtegeleiding langs de draden bij de soldeerplaats nog te verminderen zal bij nieuwe elementen de proef genomen worden met het onderbreken van de glazen buis 2 cM. boven den koperen rand van het koperen blokje door een aan weerszijden aan de glazen buis gesoldeerde kopere buis, 5 cM. lang, die in het bad onder de vloeistof gedompeld blijft.

§ 4. *Voorzorgen bij de metingen van de electromotorische krachten.*

a. De in § 3 van Med. N°. 89 beschreven toestellen en schakelingen zijn geheel opgesteld op paraffine, waarmede ook de omhullende deelen van de toestellen geïsoleerd zijn. Niet van paraffine-isolatie voorzien zijn alleen de draden, die tusschen de verschillende vertrekken loopen en die op porceleinen dragers, van welke de hooge isolatie-weerstand herhaaldelijk is gecontroleerd, gespannen zijn. De ijspotten hangen op porceleinen isolatoren. Alle deelen der opstelling werden natuurlijk, voor zij in gebruik genomen werden, zorgvuldig wat hunne isolatie betreft onderzocht.

b. De noodzakelijkheid van het voortdurend aanstampen van het ijs in de ijspotten, werd reeds in Med. N°. 89 betoogd.

c. De stopcommutatoren zijn van roodkoper. Alle contacten van verschillende metalen in de schakeling zijn zorgvuldig door inpakking in wol of watten, waarvan ze door paraffine geïsoleerd zijn, in kartonnen doozen tegen temperatuursverandering beschermd. Alleen werd dit achterwege gelaten bij de contactplaatsen van de roodkoperen toeleidingsdraden met de messing-klemmen der weerstandsbanken. Om aan de Westonelementen een onveranderlijke temperatuur te waarborgen, is ook voor eene behoorlijke verpakking van deze zorg gedragen. De accumulator is in een houten kist geplaatst.

d. Wat de controle-elementen betreft, werd er op gelet, dat de stoom uit de kooktoestellen (verg. Med. N°. 27, § 8) met een aangenomen standvastige snelheid uitstroomde.

e. Alvorens tot eene meting wordt overgegaan, wordt door kortsluiting in de roodkoperen commutatoren in de geleidingen, die van de thermo-elementen en de Westonbatterij naar de schakeling voeren nagegaan of alle electromotorische krachten in de schakeling zoo

klein en standvastig zijn (niet meer dan eenige microvolts), dat eliminatie door omlegging der verschillende commutatoren volkomen zeker mag geacht worden.

§ 5. *Controle der thermo-elementen.*

Aangetoond werd:

a. dat wanneer alle contactplaatsen in ijs gepakt waren, de electromotorische kracht van het element minder dan één microvolt bedroeg.

b. dat verwisseling der beide contactplaatsen constantaan-staal, zóó, dat nu eens de één, dan weer de andere in den cryostaat geplaatst werd, slechts een zeer gering verschil in electromotorische kracht aanwees. Er wordt echter zorg voor gedragen, dat steeds hetzelfde been in den cryostaat wordt gebracht.

c. dat bij het op- en neerschuiven van de contactplaats in het bad, geen verschil in aanwijzing te bespeuren valt (temperatuursverschil dus zeker $< 0°.02$).

Uit dit alles blijkt, dat de electromotorische krachten, die buiten de contactplaatsen in het element worden opgewekt, uiterst gering zijn.

§ 6. *Correcties en berekeningen van de bepalingen der electromotorische krachten.*

a. R_w R_c R' hebben in het volgende de beteekenis die in Med. N°. 89 § 3 is uiteengezet. E_w, E_c en E' beteekenen de electromotorische krachten resp. van waarnemingselement, controle-element en Westonbatterij. Zijn R_w R_c en R' verkregen zoo volgt:

$$E_w = \frac{R_w}{R_c} E_c \text{ of } E_w = \frac{R_w}{R'} E'.$$

Ter controle dient dan:

$$E_c = \frac{E'}{R'} R_c \ .$$

b. Om R_w te vinden worden op de stoppen der weerstandsbank afgelezen R'_w (in den tak van kleinen weerstand), en R''_w (in den tak van grooten weerstand), welke naast elkaar geschakeld zijn om R_w te vormen.

α. Temperatuurcorrecties behoefden bij geen der weerstandsbanken (ook niet bij die, welke R_c en R' leveren) te worden aangebracht.

β. Bij R'_w moest soms gevoegd worden de overgangsweerstand der stoppen.

γ. Bij R'_w wordt gevoegd de correctie op internationale ohms volgens de calibratietabel der Phys. Techn. Reichsanstalt.

δ. Bij R''_w wordt gevoegd het bedrag, dat noodig zou zijn om de compensatie volledig te maken, welk bedrag uit de uitslagen van den galvanometer bij twee waarden van R''_w (zie tabel I en IV) wordt berekend.

c. Om R_c te vinden handelt men met R'_c en R''_c, die een overeenkomstige beteekenis ten opzichte van R_c, als R'_w en R''_w ten opzichte van R_w hebben, als met R'_w en R''_w wat betreft de correcties α, β, γ en δ. De hieruit verkregen uitkomst R'''_c geldt voor de temperatuur bij welke het water in den kooktoestel kookt bij den gedurende de waarneming daar heerschenden barometerstand B.

ε. R'''_c wordt nu gecorrigeerd tot de waarde, die zij zou hebben bij 760 m.m. kwikdruk op 45° N.B.

d. Om R' te vinden, worden aan den onveranderlijken weerstand R', de boven met γ en δ aangeduidde correcties aangebracht.

e. E', betrekking hebbende op de temperatuur t' van de Westonbatterij, wordt aan de tabel van JAEGER [1]) ontleend.

§ 7. *Overzicht van eene bepaling.* In tabel I zijn opgenomen al de aflezingen, welke voor eene bepaling van de electromotorische kracht dienen, en wel voor die bij — 217° (Zie § 8). Ondersteld wordt, dat gedurende den korten tijd noodig voor de verschillende aflezingen (verg. § 3 van Med. N°. 89) de electromotorische kracht van den accumulator (zie § 4, *c*) constant blijft. Men verzekert zich er verder van, dat de temperatuur in den kooktoestel van het controle-element eene genoegzaam standvastige waarde behouden heeft en dat het gelukt is, [2]) de temperatuur van het bad in den cryostaat tot op 0°.01 standvastig te houden [3]). (zie tabel I).

Op volkomen dezelfde wijze werden op denzelfden waarnemingsdag verkregen de waarden voor de electromotorische krachten vereenigd in Tabel III.

Uit het voorafgaande overzicht kan worden opgemaakt, dat de bepalingen zelfs bij — 217° nog met de gewenschte nauwkeurigheid kunnen worden verricht. Bij — 253° is de gevoeligheid van het element constantaan-staal belangrijk kleiner dan bij — 217°. Het komt ons

---

[1]) JAEGER, Die Normalelemente 1902. pg. 118.

[2]) Vgl. Med. N°. 83, § 5 en Plaat III.

[3]) Bij de aflezing worden ook opgenomen de temperaturen van het vertrek (t_k) en van den galvanometer (t_g); deze zijn van belang wanneer men later, in verband met de gevoeligheid, den weerstand, dien galvanometer en toeleidingsdraden tijdens de waarneming hadden, wenscht te kennen. Wat betreft de vermelding der combinatie $P_3 + Q_2$ bij de controle-elementen kan op Med. N°. 89 § 2 verwezen worden.

TABEL I.

Calibratie van het thermo-element P_1 Contactplaats C in den cryostaat.

6 Juli 1905. Serie XV (zuurstof kokend onder gereduceerden druk) No. 1. Tijd: $3^u55'$—$4^u11'$.

Waarnemingselement.							Controle-element. Combinatie $P_3 + Q_2$.						Westonelementen.					
$R_w = 50+2+1+1.$ $R''_w = 7700.$				$R'_w = 50+2+1+1$ $R''_w = 7200.$			$R'_c = 50+1.$ $R'_c = 3600.$			$R'_c = 50+1.$ $R'_c = 3800.$			$R'_1 = 8000.$			$R'_1 = 8004.$		
Rheostaat. S. en H No. 15938.							Rheostaat S. en H. No. 15689.						Rheostaat No. 17161.					
Galvanometeruitslagen.							Galvanometeruitslagen.						Galvanometeruitslagen.					
Commutatoren.		links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	comm.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts.
elem.	galv.													Galv.						
I	I	64.65	64.65		66.60	65.55		65.45	66.15		64.35	66.50		I	67.00	66.80		65.80	66.90	
I	II		64.81	65.00		65.63	64.85		66.23	65.65		66.54	67.65	II		66 84	66.65		66.96	68.20
II	I	65.50	65.35		67.25	65.70		67.80	66.35		66.65	66.60				66.90			67.00	
II	II		65.42	65.50		65.84	64.75		66.43	63.60		66.72	65.55							
			65.50			66 00			66.50			66.80								

Barometerstand 76.14 cm.
(Aneroïde Kipp. 2652)
$t = 19°.4$ (bijbehoorende thermometer)

$t' = 18°.9.$ (Thermometer No. 138)
$t_k = 19°.0.$ (» » 96)
$t_g = 18°.8.$ (» » 149)

Uit tabel I volgt onmiddellijk

TABEL II.

Correcties en uitkomsten.

Waarnemingselement.	Controle-element.	Westonelementen.
corr. $\beta\ R'_w = +0.001\ \Omega$	corr. $\beta\ R'_c = +0.001\ \Omega$	
corr. $\gamma\ R'_w = +0.0080\ \Omega$	corr. $\gamma\ R'_c = -0.00015\ \Omega$	corr. $\gamma\ R'_1 = -2.4\ \Omega$
corr. $\delta\ R''_w = +179\ \Omega$	corr. $\delta\ R''_c = +149\ \Omega$	corr. $\delta\ R'_1 = +0.654\ \Omega$
	$R'''_c = 50.3163\ \Omega$	
	Barom.st.45°N.B.=76.21cM.	
	corr. $\varepsilon\ R'''_c = -0.0373\ \Omega$	
	Einduitkomsten.	
$R_w = 53.6404\ \Omega$	$Rc = 50.2787\ \Omega$	$R' = 7998.3\ \Omega$
		$t' = 18°.8$
		$E' = 1.0187$ volt.
$E_w = 6.8312$ milliv.	$E_c = 6.4037$ milliv.	
4u 3′		

TABEL III.

	E_w	E_c
	6.8312	6 4037
	6.8308	6.4039
	6.8310	6.4038
Gemiddeld	6.8310	6.4038

echter wel van belang voor, ook van eene zoo lage temperatuur een volledig overzicht der instellingen te geven, om een oordeel mogelijk te maken over 't geen wij daar nog bereikt hebben.

TABEL IV.

Calibratie van het thermo-element P_1, Contactplaats C in den cryostaat.

5 Mei 1906. Serie XXX. (Waterstof, kokend onder atm. druk). No 1. Tijd : $2^u.19'$—$2^u.28'$.

Waarnemingselement.							Controle-element. Combinatie $P_3 + Q_2$.						Westonelementen.					
$R'_w = 50+5+1+0.5+0.1$ $R''_w = 5200$			$R'_w = 50+5+1+0.5+0.1$ $R''_w = 5400$				$R_{c'} = 50+0.5+0.2+0.1+0.1$ $R''_c = 5500$			$R'_c = 50+0.5+0.2+0.1+0.1$ $R''_c = 5300$			$R'_1 = 8000$			$R'_1 = 8004$		
Rheostaat S. en H. No. 15398.							Rheostaat S. en H. No. 15689.						Rheostaat S. en H. No. 17161.					
Galvanometeruitslagen.							Galvanometeruitslagen.						Galvanometeruitslagen.					
Commutatoren.		links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	comm.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts
elem.	galv.													Galv.						
			39.89			40.32			41.08			41.63				43.10			43.55	
I	I	39.15			40.83			38.82			38.45			I	42.90			45.20		
			39.94			40.38			41.22			41.81				43.34			43.66	
I	II			39.87			39.16			39.84			41.50	II			43.84			42.28
			40.05			40.45			41.35			42.02				43.55			43.78	
II	I	39.85			41.50			42.37			41.80									
			40 17			40.65			41.49			42.15								
II	II			39.70			39.18			36.80			38.65							
			40.32			40.90			41.63			42.20								

Barometer 76 77 cm.
(Aneroïde Kipp. No. 2652)
$t = 18°.0$ (bijbehoorende thermometer)

$t' = 18°.7$ (Thermometer No. 138).
$t_k = 19°.6$ (" No. 96).
$t_g = 19°.2$ (" No 149).

TABEL V.

Correcties en uitkomsten.

Waarnemingselement.	Controle-element.	Westonelementen.
corr. β. $R'_w = +0.001\ \Omega$	corr. β. $R'_c = +0.001\ \Omega$	
corr. γ. $R'_w = +0.00537\ \Omega$	corr. γ. $R'_c = +0.0084\ \Omega$	corr. γ. $R'_1 = -2.4\ \Omega$
corr. δ. $R''_w = +20\ \Omega$.	corr. δ. $R''_c = -209\ \Omega$	corr. δ. $R'_1 = +0.8\ \Omega$
	$R'''_c = 50.4133\ \Omega$	
	Barom.st. 45° N.B. = 76.82 cM.	
	corr. ε $R'''_c = -0.1459\ \Omega$	

Einduitkomsten.

$R_w = 55.9981\ \Omega$	$R_c = 50.2644\ \Omega$	$R' = 7998.4\ \Omega$
		$t' = 18°.5$
		$E' = 1.0187$ volt.
$E_w = 7.1321$ milliv.	$E_c = 6.4075$ milliv.	
$2^u 24'$		

§ 8. *De temperaturen.*

a. Het thermo-element werd gebracht in een cryostaat, zooals afgebeeld op de plaat van Med. N°. 94^d, behalve dat daar een piëzometer zich bevindt op de plaats, die bij onze metingen door een waterstofthermometer werd ingenomen. Ten einde eene gelijkmatige verdeeling van de temperatuur in het bad te bevorderen is eene buis van denzelfden vorm en afmeting als het thermo-element symmetrisch daaraan opgesteld. Verg. verder Med. N°. 94^e § 1. Voor wat het verkrijgen van een standvastige en gelijkmatige temperatuur met dezen cryostaat betreft, verwijzen wij naar Med. N°. 94^d en de daar aangehaalde mededeelingen. De temperatuurregeling geschiedde met behulp van een weerstandsthermometer. Voor de beide metingen in vloeibare waterstof werd gebruik gemaakt van den cryostaat, beschreven in Med. N°. 94^f.

b. Met vloeibaar chloormethyl als bad in den cryostaat werden

verkregen de temperaturen — 30°, — 59° en — 88°; met aethyleen — 103°, — 140° en — 159°; met zuurstof — 183°, — 195°, — 205° — 213° en — 217°; met waterstof — 253° en — 259°.

c. De temperaturen zijn gemeten op de schaal van den waterstofthermometer beschreven in Med. N°. 27 en 60. Omtrent de bepalingen met dezen toestel bij lage temperaturen zal eerlang nog eene mededeeling gedaan worden.

§ 9. *Uitkomsten.*

In de volgende tabel VI zijn gegeven, in kolom I het nummer van de meting, in kolom II de datum, in kolom III de temperatuur, direct gemeten met den waterstofthermometer, in kolom IV de electromotorische kracht $-E_w$ in millivolts, in kolom V het aantal waarnemingen, in kolom VI de grootste afwijking in de verschillende bepalingen van E_w, waarvan de bijbehoorende E_w het gemiddelde is, in kolom VII hetzelfde tot graden herleid.

TABEL VI.

CALIBRATIE VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII
20	27 Oct. 05	— 58°.753	2.3995	3	0.0006	0.016
21	30 Oct. 05	— 88.140	3.4825	3	29	81
17	8 Juli 05	— 103.833	4.0229	3	56	168
16	7 Juli 05	— 139.851	5.1469	3	6	21
18	26 Oct. 05	— 139.873	5.1469	4	12	41
19	26 Oct. 05	— 158.831	5.6645	3	15	59
11	27 Juni 05	—[182.692]	6.2297	3	10	46
28	2 Mrt. 06	— 195.178	6.4717	4	28	150
12	29 Juni 05	—[204.535]	6.6382	3	31	186
27	2 Mrt. 06	— 204.694	6.6361	4	26	156
14	30 Juni 05	—[212.832]	6.7683	3	8	56
13	6 Juli 05	— 212.868	6.7668	3	15	106
29	3 Mrt. 06	— 217.411	6.8221	3	14	112
15	6 Juli 05	— 217.416	6.8310	3	4	32
30	5 Mei 06	— 252.93	7.1315	4	17	39
31	5 Mei 06	— 259.24	7.1585	1	—	—

Waarneming n°. 11, 12 en 14 zijn onzeker, omdat de waterstofthermometer hierbij een bijzonder nauwe capillair had, zoodat het evenwicht niet voldoende gewaarborgd was. Volgens andere gelijktijdige waarnemingen (Med. N°. 95*c*, deze zitting), die sedert herhaald werden, is de correctie bij n°. 11 waarschijnlijk — 0°.058.

De gemiddelde afwijking van E_c voor de verschillende dagen, van de middelwaarde, alsook de gemiddelde grootste afwijking van de waarden van E_c op éénzelfden dag gevonden, bedraagt 3 microvolt; een bedrag dat aanwijst dat, bij de waarneming van het controle-element aan het een of ander, wat nog niet opgehelderd is, niet de noodige zorg is besteed, daar het waarnemingselement voor ditzelfde gemiddelde slechts 1,8 microvolt oplevert.

§ 10. *Indirecte bepalingen.*

Om tot de meest geschikte voorstelling van E_w als functie van t te geraken, was het gewenscht niet alleen de in § 9 medegedeelde waarnemingen te gebruiken, maar ook partij te trekken van een groot aantal indirecte metingen, verkregen door gelijktijdige waarneming van het thermo-element en een platina-weerstandsthermometer, welke laatste direct met den waterstofthermometer was vergeleken (zie Med. N°. 95*b*, deze zitting).

Deze getallen zijn in tabel VII samengevat, waar de kolommen

TABEL VII.

INDIRECTE CALIBRATIE VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL

I	II	III	IV	V	VI	VII
22	13 Dec. 05	— 9°.825	1.2523	3	0.0005	0°.012
24	14 Dec. 05	— 58.748	2.3980	4	6	16
23	13 Dec. 05	— 88.161	3 4802	3	6	17
1	23 Jan. 05	— 103.576	4.0100	5	9	27
3	30 Jan. 05	— 182.640	6.2270	4	32	147
5	16 Mrt. 05	— 182.828	6.2340	3	13	60
4	2 Febr. 05	— 195.135	6.4730	3	20	107
6	17 Mrt. 05	— 195.261	6.4814	5	10	53
7	30 Mrt. 05	— 204.895	6.6397	3	55	330
26	26 Jan. 06	— 212 765	6.7637	4	33	233
8	3 April 05	— 212.940	6.7686	4	15	106
25	25 Jan. 06	— 217.832	6.8276	4	29	232

volkomen dezelfde beteekenis hebben als in de vorige tabel, alleen zijn hier de temperaturen uit weerstandsmetingen berekend.

§ 11. *Voorstelling der waarnemingen door eene formule.*

a. Al dadelijk viel in 't oog dat de formule van AVENARIUS:

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2$$

slechts voor een zeer beperkt gebied eene voldoende aansluiting kan geven. Legt men b.v. de parabool door 0°, —140° en —253°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.7448$$
$$b = +\ 0.76117.$$

In dit geval bedraagt de afwijking bij —204° niet minder dan 7° Beperkt men zich tot een kleiner gebied en legt men de parabool door 0°, —88° en —183°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.4501$$
$$b = +\ 0.57008,$$

terwijl bij —140°, de afwijking nog 1°.3 bedraagt.

Eene dergelijke voorstelling is dus geheel onbruikbaar.

b. Met eene kubische formule van den vorm

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3$$

kan natuurlijk een betere aansluiting verkregen worden. Wordt deze kubische parabool b. v. gelegd door 0°, —81°, —159° en —253°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.2069$$
$$b = +\ 0.158$$
$$c = -\ 0.1544$$

en is de afwijking bij —204° 0°.94. Een kubische formule beperkt tot het gebied van 0° tot —183°, gaf bij —148°, een afwijking van 0°.34 [1]). Eene kubische formule voor t, uitgedrukt in E (zie § 2) geeft veel grootere afwijkingen.

c. Een formule, door STANSFIELD [2]) voor temperaturen boven 0° voorgesteld, van den vorm

---

[1]) Bij het ter perse gaan, komen ons de waarnemingen van HUNTER (Journ. of phys. chem. Bd. 10, pg. 319, 1906) onder oogen, die meent met behulp van eene, met de punten —79° en —183° bepaalde kwadratische formule, temperaturen bij —122°, tot op 0°.1 te kunnen bepalen. Hoe dit resultaat met het onze te rijmen is, blijft nog onopgehelderd.

[2]) Phil. Mag. Ser. 5, Bd. 46, pg. 73, 1898.

$$E = aT + b \log T + c,$$

waarin T de absolute temperatuur voorstelt, bleek absoluut onbruikbaar.

d. Er werd beproefd met een vijftermige formule naar machten van t eene betere aansluiting aan de waarnemingen te verkrijgen. Tweeërlei vormen zijn daartoe beproefd:

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^5 + f\left(\frac{t}{100}\right)^7 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

en

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^4 + f\left(\frac{t}{100}\right)^5 \quad . \quad . \quad (B)$$

Er werd begonnen de constanten te bepalen van beide vergelijkingen, zóó, dat de vergelijkingen voldoen aan de temperaturen —59°, —140°, —159°, —183° en — 213°. (*A*) vertoonde nu bij —253° eene afwijking van 113.1 microvolt, (*B*) eene afwijking van 91.8 microvolt. De voorkeur werd nu verder gegeven aan de vergelijking (*B*) en wel werden gezocht eene vergelijking (*B*IV), die zoo goed mogelijk het temperatuurgebied van 0° tot —217° zou voorstellen, twee vergelijkingen (*B*I en *B*III), die bovendien niet al te groote afwijking bij — 253° zouden vertoonen, en, waarvan bij de eene (*B*III) eene groote afwijking bij — 217° werd toegelaten, terwijl bij de tweede (*B*I) de afwijkingen meer gelijkmatig over alle temperaturen verdeeld zijn, en ten slotte eene vergelijking (*B*II), waarin, behalve —253°, ook —259° zou opgenomen zijn.

§ 12. *Berekening van de coëfficienten in de vijftermige formule.* De coëfficienten werden eerst uit 5 zooveel mogelijk gelijkmatig over het waarnemingsgebied verdeelde temperaturen bepaald en daarna naar alle overige verbeterd, echter zonder strenge toepassing van de methode der kleinste kwadraten.

Om deze vereffening te vergemakkelijken is van een door Dr. E. F. v. d. Sande Bakhuyzen aangegeven handelwijze gebruik gemaakt, waarbij in plaats van de 5 onbekende coëfficienten 5 andere lineair van de eerste afhangende onbekende worden ingevoerd [1]). En wel worden als zoodanig gekozen de juiste waarden van E voor de vijf oorspronkelijk gebruikte waarnemingen, of liever de verschillen tusschen deze en hunne in eerste benadering gevonden waarden.

Vijf hulprekeningen doen den invloed kennen van kleine variaties der nieuwe onbekende (10 microvolt) op de voorstelling der andere waarnemingen en met behulp van deze is een benaderde vereffening

[1]) Ook bij de strenge toepassing van de methode der kleinste kwadraten zal deze substitutie waarschijnlijk de rekening vergemakkelijken.

veel gemakkelijker uit te voeren dan door onmiddellijk met de variaties der oorspronkelijke coëfficienten te werken[1]).

Na de berekening der eerste voorloopige formule, werden daarna alle 28 waarnemingen voorgesteld. De zoo gevonden waarden duiden wij aan door R_0. De afwijkingen van de waargenomen waarden van de uit deze eerste formule berekende zijn in tabel VIII in kolom III opgenomen onder $W\text{-}R_0$. De afwijkingen van de temperaturen in de onmiddellijke nabijheid van elkaar werden tot normaalverschillen gemiddeld en zijn opgenomen in kolom IV onder $(W\text{-}R_0)$.

Het waren deze afwijkingen, die als grondslag dienden voor eene volgens de boven uiteengezette beginselen ondernomen vereffening.

Zij gaf de volgende uitkomsten:

laat men $-253°$ en $-259°$ buiten rekening, zoo vindt men als coëfficienten van de vergelijking (B) (zie § 11):

$$\left.\begin{array}{ll} a_4 = +\ 4.32044 & e_4 = +\ 0{,}011197 \\ b_4 = +\ 0{,}388466 & f_4 = -\ 0{,}0044638 \\ c_4 = +\ 0.024019 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (BIV)$$

Laat men alleen $-259°$ buiten rekening, dan vindt men voor de coëfficienten van vergelijking (B) de beide volgende (zie § 11) stellen:

$$\left.\begin{array}{ll} a_3 = 4.33049 & e_3 = 0{,}053261 \\ b_3 = 0.436676 & f_3 = 0{,}003898 \\ c_3 = 0{,}048091 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (BIII)$$

en

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = 4.35603 & e_1 = 0{,}103459 \\ b_1 = 0{,}531588 & f_1 = 0{,}0118632 \\ c_1 = 0{,}157678 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (BI)$$

Neemt men alle temperaturen, ook die van de vloeibare waterstof onder gereduceerden druk kokend, in de vergelijking op, dan vindt men voor de coëfficienten van de vergelijking (B)

$$\left.\begin{array}{ll} a_2 = 4.35905 & e_2 = 0{,}111619 \\ b_2 = 0{,}542848 & f_2 = 0{,}0132130 \\ c_2 = 0{,}172014 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (BII)$$

De afwijkingen die deze verschillende vergelijkingen van de waarnemingen vertoonen vindt men onder $(W - R_1)$, $(W - R_2)$, $(W - R_3)$ en $(W - R_4)$ in de kolommen V, VI, VII en VIII van tabel VIII.

[1]) Wanneer het gebruikte polynoom opvolgende machten van de veranderlijke van de eerste macht af bevat, wordt die invloed bepaald door de interpolatiecoëfficienten van LAGRANGE.

TABEL VIII.

AFWIJKINGEN DER CALIBRATIE-FORMULES VOOR HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
No.	t	$W-R_0$	$(W-R_0)$	$(W-R_1)$	$(W-R_2)$	$(W-R_3)$	$(W-R_4)$
22	— 29°.825	—0.0080	—0.0080	—0 0030	—0 0032	—0.0013	—0.0011
24	— 58.748	— 13	— 6	+ 26	+ 26	+ 16	+ 11
20	— 58.753	0					
21	— 88.140	+ 44	+ 29	+ 31	+ 32	+ 8	+ 7
23	— 88.161	+ 14					
1	—103.576	0	+ 14	+ 4	+ 4	— 16	— 11
17	—103.833	+ 43					
16	—139.851	+ 5	+ 1	— 20	— 20	— 18	+ 4
18	—139.873	— 2					
19	—158.831	0	0	— 20	— 20	— 10	— 5
3	—182.604	+ 31					
11	[—182.750]	+ 26	+ 37	+ 21	+ 23	+ 28	+ 21
5	—182.828	+ 53					
4	—195.135	+ 15					
28	—195.178	— 6	+ 28	+ 13	+ 17	+ 12	+ 4
6	—195.261	+ 76					
12	[—204 535]	+ 34					
27	—204.694	— 17	+ 5	— 10	— 5	— 20	— 20
7	—204 895	— 11					
26	—212.765	+ 21					
14	[—212.832]	+ 58					
13	—212.868	+ 38	+ 40	+ 25	+ 29	+ 8	+ 22
8	—212.940	+ 45					
29	—217.411	— 36					
15	—217.416	+ 52	— 7	— 23	— 19	— 45	— 18[5]
25	—217.832	— 36					
30	—252.93	0	0	— 20	— 40	— 20	+ 280
31	—259.24	+ 87	+ 87	+ 68	+ 37	+ 90	+ 490

In deze tabel is aan de waarneming 11 aangebracht de correctie genoemd bij Tab. VI. Aan waarneming 17 en 7 is het halve gewicht toegekend wegens de groote afwijking van de enkele bepalingen onderling (zie Tab. VI en VII).

§ 13. *Slotsom.* De middelbare fout voor iedere temperatuur is bij:

index coeff.	*microv.*
1	± 2.8
2	± 3.3
3	± 2.2
4	± 1.9

De middelbare fout van de uitkomst van één dag is:

± 2.9 microvolt.

waaruit men vindt, dat de middelbare fout van één temperatuur is, stellende dat gemiddeld twee daguitkomsten tot één temperatuur gemiddeld zijn:

± 2.0 microvolt.

Het schijnt dus wel, dat de voorstelling door de vijftermige formule tot op 2 microvolt voldoende is. (2 microvolt stemt bij — 29° met 0°.05, bij — 217° met 0°.16 overeen). Voor de calibratie tot — 217° zijn dus metingen bij minstens 5 temperaturen noodig.

De voorstelling met insluiting van de temperaturen van de vloeibare waterstof, is veel minder goed; de middelbare fout is ± 3.2 microvolt, overeenkomende met 0°.075 bij — 29° en 0°.74 bij — 252° en — 259°.

Om dus de waterstoftemperaturen in de formule op te nemen, is waarschijnlijk een 6de term noodig.

Voor metingen bij de allerlaagste temperaturen is tronwens het element constantaan-staal weinig geschikt (verg. § 7).

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. Jolles en de Heeren C. Braak en J. Clay voor hunne hulp bij dit onderzoek.

Natuurkunde. — De heer Kamerlingh Onnes biedt aan Med. n°. 95*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. Kamerlingh Onnes en J. Clay: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen* + 16° *en* — 182°."

§ 1. *Inleiding.*

De afwijking van de coëfficiënten a en b in de uitzettingsformule voor de lineaire uitzetting $l = l_0 \left(1 + \left\{a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2\right\}10^{-6}\right)$ en k_1 en k_2 in de formule voor de kubische uitzetting

$$v_t = v_0\left[1 + \left\{k_1\frac{t}{100} + k_2\left(\frac{t}{100}\right)^2\right\}10^{-6}\right]$$

tusschen 0° en — 182° door KAMERLINGH ONNES en HEUSE (zie Med. N°. 85 Juni '03) gevonden, van die welke WIEBE en BÖTTCHER en THIESEN en SCHEEL voor temperaturen boven 0° hebben gevonden, maakten het wenschelijk de sterke aangroeiing van b bij lage temperaturen door nadere metingen buiten twijfel te stellen [1]).

In de eerste plaats hebben wij gebruik gemaakt van nadere bepalingen van de verandering van den weerstand van platinadraden met de temperatuur (zie Med. N°. 95^c dezer zitting) om de in Med. n°. 85 opgegeven temperaturen, welke slechts hadden kunnen dienen voor de berekening van een voorloopige formule door meer juiste te vervangen en met behulp daarvan nieuwe waarden voor a en b te berekenen, die de uitkomsten der metingen beter voorstellen, dan de in Med. N°. 85 opgegevene.

Wij kwamen met de formule

$$W_t = W_0 (1 + 0{,}00390972\, t - 0{,}0_6 9861\, t^2),$$

die voor de soort van platinadraad, in Med. n°. 85 gebruikt, geldt, tot de volgende verbeteringen.

In tabel IV moet gelezen worden — 87°,14 in plaats van — 87°,87
en —181°,42 „ „ „ —182°,99
In tabel V moet gelezen worden — 86°,98 „ „ „ — 87°,71
en —181°,22 „ „ „ —182°,79

Daaruit volgt dan voor

Jenaglas 16^{III}	**a = 781**	**b = 90**	**1903.**
	k_1 = 2343	**k_2 = 272.**	
Thüringerglas (n°. 50)	**a = 920**	**b = 120**	
	k_1 = 2761	**k_2 = 362.**	

In de tweede plaats bleef het onzeker of soms de gemiddelde temperatuur van de einden wel juist die waren, welke volgens de in § 4 meegedeelde methode gevonden waren. Bij uitvoering van de Med. N°. 85 § 4, aangegeven controlebepaling, (zie § 4) bleek dat de methode in dit opzicht niets te wenschen overliet.

Wij hebben verder de uitzetting van dezelfde staaf Jenaglas, gebruik makende van de ervaring bij de vroegere bepalingen verkregen, nog eens gemeten en zijn daarbij tot nagenoeg dezelfde, door

---

[1]) Dat de uitzettingscoëfficiënt bij lage temperaturen geringer wordt is door J. ZAKRZEWSKI (Bull. Krakau 1889) door metingen tot — 103° aangetoond. Dit is in overeenstemming daarmede, dat de uitzetting van de meeste stoffen boven 0° door eene kwadratische formule met positieve waarde van b wordt aangegeven. Ons onderzoek heeft betrekking op de vraag of b zelf nog weder bij lagere temperaturen grooter wordt.

meerdere daaraan bestede zorg, nog meer vertrouwbare uitkomsten gekomen.

Eindelijk was het van belang uit te maken of de sterke toename van b met lage temperatuur ook bij andere vaste stoffen voorkwam en dus als een eigenschap van den vasten toestand van meerdere amorphe stoffen mocht worden beschouwd. Wij hebben daartoe, daar het ook uit anderen hoofde wenschelijk was de uitzetting van platina te kennen, de uitzetting van eene platinastaaf op dezelfde wijze als die van de glasstaaf gemeten. Ook bij platina hebben wij dezelfde sterke toename van b gevonden, wanneer deze voor een zelfde interval, bij lagere temperaturen berekend wordt, zoodat kubische vergelijkingen voor de lengte van beide stoffen moeten worden gebruikt wanneer men ook de uitzetting tot $-182°$ wil voorstellen.

Nadat deze metingen afgeloopen waren heeft SCHEEL (Zeitschr. f. Instr. April 1906 p. 119) ook gevonden, dat de uitzetting van platina van 0° tot $-190°$ kleiner is dan volgt uit de kwadratische formule voor de uitzetting boven 100°. Voor de uitzetting van $+16°$ tot $-190°$ per meter vindt SCHEEL -1641μ, terwijl uit onze metingen zou volgen -1687μ. Hij meent echter dat door een kleine wijziging in de coëfficienten der kwadratische formule zijne waarnemingen in overeenstemming gebracht kunnen worden met die boven 100°. Onze uitkomst wijst echter duidelijk op eene grootere waarde van b beneden 0°.

Dat een kubische formule met negatieven coëfficient van t^3 moet worden aangenomen, kan in overeenstemming geacht worden met de negatieve uitzetting van amorphe kwarts tusschen 16° en $-190°$ door SCHEEL (l. c.) gevonden, in verband met de waarde van a en b in eene kwadratische formule van deze stof tusschen 0° en $+250°$.

Een nader onderzoek van deze vragen zou natuurlijk met nauwkeuriger hulpmiddelen moeten geschieden. Als zoodanig ligt de methode van FIZEAU voor de hand. Reeds voor vele jaren werd door een van ons (K. O.) bij een bezoek te Jena met Prof. PULFRICH het brengen van een dilatometer van ABBE in den Leidschen cryostaat met vloeibare gassen besproken, doch de middelen om den toestel aan te schaffen ontbraken tot nu toe. Het onderzoek volgens deze methode is intusschen door de Reichsanstalt [1]) ter hand genomen. Een cryostaat gelijk de Leidsche, die veroorlooft een temperatuur geruimen tijd op 0,01° constant te houden zou daarbij waarschijnlijk een geschikt hulpmiddel blijken.

---

[1]) HENNING later SCHEEL, Zeitschr. f. Instrk. April 1905, p. 101 en April 1906, p. 118. RANDALL, Phys. Review 20, p. 10, 1905, heeft een dergelijken toestel geconstrueerd.

TRAVERS, SENTER en JAQUEROD [1]) geven als uitzettingscoëfficient van een niet nader bepaalde glassoort tusschen 0° en — 190° 0,0000218 op. Uit den gemiddelden uitzettingscoëfficient van 0° tot 100° meenen wij op te maken dat dit glas overeenkomt met ons Thüringerglas.

De gemiddelde uitzettingscoëfficient tusschen 0° en — 190° voor Thüringerglas in 1903 te Leiden gevonden is 0,00002074.

§ 2. *Meting van den uitzettingscoëfficient van Jenaglas en van platina tusschen* 0° *en* — 182°.

De gebruikte staaf Jenaglas was dezelfde als die van Med. N°. 85.

Aan de uiteinden van de 85 cM. lange platinabuis waren glazen uiteinden gesoldeerd van dezelfde soort als de Jenastaaf. Ter bepaling van de gemiddelde temperatuur der uiteinden waren deze uiteinden met dunnen platinadraad omwikkeld, die aan beide einden in twee platina toeleidingsdraden overging en met eenige lagen papier omwoeld was, om de uitwendige warmtegeleiding zooveel mogelijk te verminderen.

De temperatuur van 't middengedeelte van de Jenastaaf werd eveneens bepaald door dat daar omheen een platinadraad als in Med. N°. 85 gewonden was. De staaf was verder omwikkeld met dun papier, geplakt met vischlijm, en opzettelijk werd voor en na het plakken de weerstand gemeten om de isolatie te controleeren. De temperatuur van het bad werd op 't midden van de hoogte van 't bad bepaald met het thermoëlement constantaan-staal. (zie Med. N°. 95*a*. deze zitting).

Deze temperatuur werd aangenomen als de gemiddelde temperatuur van de platinabuis, die geheel door het vloeibare gas omgeven was en alleen aan de uiteinden met de veel slechter geleidende glasstukken in aanraking was, die gedeeltelijk uit 't bad staken.

De schaal (zie Med. N°. 85) was omwonden met een dikke laag wol waar omheen nog bordpapier met zooveel mogelijk dichtgeplakte naden. De temperatuur van het vertrek werd door kunstmatige verwarming en afkoeling met smeltend ijs zooveel mogelijk standvastig gehouden, zoodat de temperaturen van de schaal slechts weinig veranderen.

Zij werden op drie thermometers onder, midden en boven afgelezen.

De schaal en de punten van de glasstaven werden verlicht door spiegels, die het daglicht of het door papier gereflecteerd en diffuus gemaakte booglicht terugkaatsten.

De vacuumbuis (verg. Med. N°. 85) werd in den loop der metingen

---

[1]) TRAVERS, SENTER and JAQUEROD, Phil. Trans. A 200.

door een nieuwe vervangen. Bij deze was de evacueering beter geslaagd. Dit gaf een groote besparing in 't verbruik van vloeibaar gas. Bij de meting met vloeibare zuurstof was bij de eerste $1^1/_4$ liter per uur noodig terwijl bij de tweede $^1/_4$ liter gebruikt werd. Van N_2O was bij de eerste slechts $^1/_4$ liter per $1^1/_4$ uur verbruikt.

Het bad werd, om onregelmatigheden in de gemiddelde temperatuur zooveel mogelijk te voorkomen, zoo hoog mogelijk gevuld, terwijl voortdurend droge lucht tegen de uitstekende punten werd geblazen. Deze bleven juist vrij van ijs. Bij twee opzettelijk veroorzaakte uiterste gevallen — het bad met zuurstof zoo hoog mogelijk gevuld en de punten met ijs bedekt, en 't bad zoodanig, dat de drijver op zijn laagst stond, d. i. ongeveer 2 cM. beneden den rand, en de punten geheel vrij van ijs — bedroeg het verschil in gemiddelde temperatuur der uiteinden 10°, overeenkomende met 4 micron lengteverschil. Het grootste verschil, dat bij de waarnemingen is voorgekomen, is zeker kleiner geweest en de geheele onzekerheid in lengte uit dien hoofde kan niet meer dan 2 micron geweest zijn.

Ftg. 1.

Bij de benedenuiteinden is 't verschil nog kleiner.

Dit alles geldt voor zuurstof, in stikstofoxydule zijn dergelijke veranderingen in temperatuur-verdeeling geheel te verwaarloozen.

Bij enkele metingen werd waargenomen, dat de lengte der staven wanneer zij na afkoeling teruggekeerd waren tot de gewone temperatuur eerst grooter was dan de oorspronkelijke, doch na twee dagen terugkeerde tot die waarde.

De oorzaak dier afwijkingen is niet opgehelderd. In een geval, toen een bijzonder groote afwijking geconstateerd werd, die niet geheel tot nul terug liep, bleek bij het afwikkelen der punten, dat in het glas een scheurtje gekomen was.

Om na te gaan of hier een thermische nawerking in het spel was werd een thermometerbol (zie figuur 1) met fijne capillair met kwik gevuld. De stand van 't kwik werd eerst bij kamertemperatuur in een waterbad, in een vacuumglas, met een nauwkeurige thermometer vergeleken. Daarna werd de toestel omgekeerd zoodat al 't kwik naar 't andere reservoir *B* liep, in dezen stand gedurende 3 uur in vloeibare lucht afgekoeld en vervolgens weer op kamertemperatuur gebracht en omgedraaid en weder in 't waterbad gebracht. De

afwijking van den stand van 't kwik was van dezelfde orde als de afleesfout van den thermometer, ongeveer 0.003°. Merkbare thermische nawerking vinden wij dus niet.

TABEL I. — JENAGLAS 16 III.

Datum	Tijd	Temp. schaal	L_t	L 16°	W_t	W_o	ϑ	λ
16 Dec.	2h.35	15.7	1026.285	1026 280	40 620		15.9	
1904	3h 50	16 0	.286	.279	40.786		17.0	
	4h.22	16.3	.292	.290	40.845		17.4	
20 Dec	1h.50	15.3	1025.571	1025.559	s. 3.503	5.021		λs = 40.6
	2h.10	15.4	.560	.550	m.25 029	38.28	—86.78	
	2h.30	15.4	.571	.561	i. 6.300	7.191		λ_i=22.1
21 Dec.	3h.15	14 6	1026.308	1026.291	m.40.523		15.1	
	3h.45	14.7	.299	.284			15.1	
	4h.15	14.7	.308	.289	m 40.583		15.6	
22 Dec.	10h 50	15.0	1025.108	1025.091	s. 2.105	5.021		λ_s=30.8
	12h.15	15.0	.112	.095	m. 9.880	38.28	—181.48	
	12h.50	15.0	.115	.098	i 5.005	7.191		λ_i=18.0
23 Dec.	12h.30	15.8	1026.341	1026.341	m.40.606		15.6	
	3h.	15.6	.339	.339			15.2	
	3h.30	15.6	.335	.336	m.40.537		15.2	
11 Jan.	3h.40	15.4	1026.288	1026.278	40.634		15.9	
1905	4h.30	15.5	.291	.280	40.703		16.4	

In tabel II (p. 157) zijn de temperaturen gebruikt die met 't thermoelement gevonden werden. Eene contrôlemeting met het thermoelement geplaatst in dezelfde vacuumbuis zonder staaf gaf voor de temperatuur in stikstofoxydule — 87°,3 in plaats van — 86°,32.

Het gemiddelde van beide bepalingen is voor de berekening gebruikt.

Een bijkomstige aanleiding om ter controle de temperatuur van 't bad met een thermoëlement te meten was 't groote verschil van de

TABEL II. — PLATINA.

Datum	Tijd	Temp. schaal	L_t	L 16°	W_t	W_o	ϑ	λ
16 Dec.	5h 50	16.5	1027.460	1027.461			17.0	
1904		16.4	1027.461	1027.459			17.0	
17 Dec. [1])	1h 45	16.6	1026.620	1026.630				
	9h 45	16.3	1026.618	622				
	10h 5	16.3	613	617				
19 Dec.	8h	14.8	1027.459	1027.442			15.5	
	8h 30	14.8	457	1027.440			15.5	
20 Dec.	3h	15.5	1026.627	1026.630	s 3.475	4.993		$\lambda_s =$ 40.2
	3h 30	15.5	630	633	m		−86.32	
	3h 55	15.4	631	635	i 7.575	8.653		$\lambda_i =$ 31.5
21 Dec.	4h 40	14.7	1027.460	1027.441			15.5	
	5h 10	14.9	459	444			15 5	
	6h	14.8	459	442			15.5	
22 Dec.	10h 40	15.3	1025.963	1025.951	s 2.140	4.993		$\lambda_s =$ 28.9
	11h 10	15.3	1025.973	961	m		−182.6	
	1h 45	14.9	1025.964	947	i 5.649	8.653		$\lambda_i =$ 18.5
23 Dec.	11h 25	15.7	1027.434	1027.436			15 0	
		15.6	440	441			15.0	
		15.7	440	442			15.2	
3 Febr.	2h	15.4	1027.463	1027.459			15 2	
		15.4	459	455			15.2	

gevonden gemiddelde temperatuur met het door RAMSAY en SHIELDS [2]) opgegeven kookpunt van stikstofoxydule —89°.

Bij het ter perse gaan vonden wij door HUNTER [3]) voor die temperatuur — 86°.2 opgegeven.

[1]) Bij deze meting in N_2O is geen temperatuurbepaling met het thermoëlement verkregen. Deze bepalingen is verder niet in de berekening opgenomen. Zij wordt hier vermeld wegens de overeenstemming met de bepaling van 20 Dec., die overigens geheel onder dezelfde omstandigheden geschiedde.

[2]) Journ. Chem. Soc. 63. p. 135. 1893.

[3]) Journ. Phys. Chem. May 1906. p. 356.

§ 3. *Uitkomsten.*

Jenaglas 16 III	**a**	**835**	**b**	**117**	**1905**
	k_1	**2505**	**k_2**	**353**	
Platina	**a**	**905,3**	**b**	**49,4**	
	k_1	**2716**	**k_2**	**148,4**	

Wat Platina betreft vinden:

Benoit	van 0° tot 80°	*a* 890,1	*b* 12,1		1905
Scheel	van 20° tot 100°	*a* 880,6	*b* 19,5		
Holborn en Day	van 0° tot 1000°	*a* 886,8	*b* 13,24		

Wat de verschillen van de thans verkregen waarden met die van Med. N°. 85 (zie § 1) betreft, zoo is op te merken, dat deze bijna geheel liggen aan de verschillen in de temperatuursbepalingen. De onzekerheid van deze laat echter de gevolgtrekking omtrent *b* en de noodzakelijkheid eener kubische formule onaangetast.

Er bestaat alle aanleiding om te beproeven onze bepalingen voor Jenaglas boven en beneden 0° samen te vatten in zulk eene kubische formule. Met de vroegere bepaling 242.10^{-6} als gemiddelden kubischen coef. van 0° tot 100° (Med. N°. 60 Juni 1900 § 20) vinden we in de zooeven opgegeven formule voor de lineaire uitzetting beneden 0° en in de overeenkomstige voor de kubische uitzetting

$$l_t = l_0\left[1 + \left\{a'\frac{t}{100} + b'\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c'\left(\frac{t}{100}\right)^3\right\}10^{-6}\right]$$

Jenaglas 16 III	**a'**	**789,4**	**k'_1**	**2368,1**
	b'	**39,5**	**k'_3**	**120,2**
	c'	**— 28,8**	**k'_3**	**86,2**

§ 4. *Controle proef.*

De uiteinden van de Jenaglas staaf werden daarna afgesneden en met een kort tusschenstaafje aan elkaar gesmolten. Deze korte staaf werd geplaatst in een glas van dezelfde wijdte als de vacuumbuis met dezelfde stop en zoo kort dat de punten er op dezelfde wijze boven uitstaken als die van de staven in 't vacuumglas. Nu werd slechts een dubbel glas genomen met wol opgevuld, omgeven met een bordpapieren trechter en buis voor de afvoer der koude dampen.

De metingen zijn opgegeven in tabel III.

De λ's bij de proef gevonden zijn van dezelfde grootte als die bij de lange staven. De berekening met de in § 2 gevonden coëfficienten *a* en *b* geeft:

$l = 227{,}547$ terwijl gevonden werd $l = 227{,}544$

$l = 227.487$ „ „ „ $l = 227{,}488.$

TABEL III. — JENA GLAS UITEINDEN.

Datum	Temp. schaal	L_t	$L_{16}°$	W_t	W_0	ϑ	λ
12 April 1905							
10h 15	15.4	227.684	227.683			15.4	
11h		.686	.685			15.4	
11h 11.43	15.4	227.684	227.682			15.5	
	15.4	.681	.679			15.5	
N_2O							$\lambda_s =$
3h 50	15.4	227.533	227.536	s 3.473	5.021		42.3
4h 24	15.4	.543	.541				$\lambda_i =$
4h 52	15.4	.550	.548	i 5.490	7.191		32.3
13 April	17.4	227.677	227.681			17.1	
14 April	16.2	227.675	227.676			15.9	
10h 10							
O_2							$\lambda_s =$
2h 50	18.4	227.474	227.482	s 1.941	5.021		35.5
4.22	18.9	.482	.494	i 4.683	7.191		$\lambda_i =$ 8.9
15 April	16.6	227.725	227.727			15.7	
11h 1	16.6	.724	.726			16.0	
4h 20	16.4	227.706	.708			15.8	
4h 46	16.4	.711	.713			16.0	
16 April	14.1	227.706	227.702			13.6	
17 April	14.2	227.682	227.678			14.0	
		.685	.681				

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. Jolles en Mej. A. Sillevis voor de hulp ons bij dit onderzoek verleend.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 95c. H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XI. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den waterstofthermometer."*

§ 1. *Inleiding.* Het volgende onderzoek werd reeds voorbereid in Med. N°. 77 en Med. N°. 93 VII, van B. MEILINK, als deel van het in Med. N°. 95a genoemd meer uitgebreid onderzoek over de thermometrie bij lage temperaturen.

In die mededeelingen werd hoofdzakelijk uitgewerkt dat deel van het onderzoek hetgeen betrekking heeft op de electrische metingen.

Wat den waterstofthermometer betreft werd toen (vergel. Med. N°. 93 § 10) zooals ook nu de inrichting, in Med. N°. 60 behandeld, gevolgd. Het is later echter gebleken dat de thermometer toen niet met zuivere waterstof gevuld was, maar dat deze door lucht verontreinigd moet zijn geworden. Over de wijziging, die dientengevolge in Tab. V en Tab. VI van Med. N°. 93 moet worden gebracht en die in 't bijzonder de allerlaagste temperatuur betreffen, zal in eene afzonderlijke mededeeling worden gehandeld.

Hier wordt een nieuwe vergelijking meegedeeld, waarbij ook de vulling met de waterstof met betere inachtneming van al de in Med. N°. 60 bedoelde voorzorgen is geschied.

In 't bijzonder hebben wij getracht het bestaan van het *buigpunt* aan te toonen dat, in de lijn, (zie § 6) die den weerstand als functie van de temperatuur voorstelt, verwacht mag worden in verband in 't bijzonder met de onderstelling, dat de weerstand bij zeer lage temperaturen een *minimum* bereikt, om bij nog lager temperaturen weder toe te nemen en bij de absolute temperatuur zelfs oneindig te worden. (verg. Suppl. 9 Febr. '04). En dit wel in het bijzonder omdat metingen met den weerstandsthermometer zoo nauwkeurig en eenvoudig zijn.

Uit het oogpunt der thermometrie is 't van belang te weten door welke formule de weerstand van een platinadraad voor een bepaald gebied met een gegeven nauwkeurigheid kan worden voorgesteld, en hoeveel punten voor de calibratie in dit gebied moeten worden gekozen.

In Med. N°. 93 § 10 was de conclusie getrokken, dat tusschen 0° en —180° een kwadratische formule de waarnemingen niet nauwkeuriger dan tot op 0°.15 kan voorstellen, en dat er daar voor een grootere nauwkeurigheid een vergelijking op meer dan twee punten met den waterstof-thermometer noodig is, en dat voor temperaturen beneden —197° een afzonderlijk onderzoek noodig is. De temperaturen beneden —180° zijn in 't thans medegedeelde onderzoek in 't bijzonder bestudeerd; het heeft zich ook tot de tempera-

turen, welke met vloeibare waterstof verkregen konden worden, uitgestrekt.

Van groot belang is, of de thermometer gedurende langeren tijd in 't gebruik bij lage temperaturen denzelfden weerstand behoudt. Op de beantwoording van deze vraag hopen wij later terug te komen. Hier zij vermeld dat met 't oog daarop de draad voor de calibratie gegloeid werd. Wij zullen 't verschil van platinadraden, door HERAEUS op verschillende tijden geleverd eveneens in een volgende Mededeeling behandelen.

§ 2. *Onderzoekingen van anderen.* Sedert Med. N°. 93 is wat dit betreft nog gepubliceerd het onderzoek van TRAVERS en GWYER[1]). Zij hebben twee punten bepaald. Wat betreft de standvastigheid der temperaturen hebben zij niet over voldoende cryostaten, gelijk ons ten dienste stonden, beschikt. Omtrent de zooeven genoemde vraag hoe men een weerstands-thermometer verkrijgt, die met bepaalde nauwkeurigheid alle temperaturen binnen een gegeven gebied aanwijst, bevat hunne verhandeling geene gegevens.

§ 3. *Wijziging in de inrichting der weerstanden.* De verandering van 't nulpunt van den gouddraad in Med. N°. 93, VIII, vermeld, deed ons betwijfelen of de micablaadjes tusschen de metaaldeelen wel volkomen isolatie gaven en ook de bewegelijkheid van 't eene gascylindertje deed ons besluiten een wijziging in de constructie der weerstanden aan te brengen, die zeer goed voldeed en van welke reeds partij werd getrokken bij 't regelen van de temperaturen in 't onderzoek waarvan in med. N°. 94^d sprake is.

Aan deze inrichting kleeft een bezwaar, dat wij niet onvermeld willen laten. De wijze waarop deze thermometer is gemonteerd laat niet toe dat hij geheel in zuur wordt gedompeld. Eene inrichting geheel van platina en glas, die dit wel veroorlooft, blijft dus wenschelijk. Zulk een inrichting is dan ook reeds verwezenlijkt. De beschrijving daarvan zal later worden meegedeeld. De thans meegedeelde cijfers hebben uitsluitend betrekking op den in Med. 94^d beschreven thermometer.

Wat de toeleidingsdraden betreft is er voor gezorgd dat de beide paren aan elkaar gelijk waren. De meting van den weerstand wordt daardoor zeer bespoedigd, zoodat zelfs voor de regeling van de tem-

---

[1]) TRAVERS and GWYER Z. f. Phys. Chem. L II, 4, 1905. De draad waarvan OLZEWSKI, 1905, Drude's Ann. B 17, p. 990, de calibratie opgeeft is zooals hij zelf mededeelt blijkbaar geen platinadraad. (Zie verder § 6 noot 1).

peratuur in den cryostaat en voor de meting onder gunstige omstandigheden dezelfde weerstandsthermometer kan dienen.

§ 4. *De temperaturen.*

Zij werden verkregen in den cryostaat van Med. 94[d]. met behulp van vloeibaar chloormethyl — 39°, — 59°, — 88°, van vloeibaar aethyleen — 103°, — 140°, — 159°, van vloeibare zuurstof — 182°, — 195°, — 205°, — 212°,— 217° met behulp van vloeibare waterstof — 252° en — 259°. De metingen geschiedden als boven § 1 vermeld met den waterstofthermometer.

§ 5. *Uitkomsten voor den platinadraad.* Deze zijn medegedeeld in Tabel I.

De waarnemingen gemerkt met [ ] zijn onzeker wegens de oorzaak vermeld in Med. N°. 95[a] § 10. niet gebruikt bij de afleiding der formules en de vereffening er van. Wat betreft de beteekenis van $W—R_{At}$ in kolom opmerkingen zie § 6.

§ 6. *Voorstelling door eene formule.*

a. Omtrent de kwadratische formule [1]) werd reeds in § 1 medegedeeld, dat ze reeds onvoldoende was voor 't gebied van 0—180°.

Legt men een kwadratische formule door — 103° en — 182°, zoo vindt men:

$$W_t = W_0\left(1 + 0{,}39097\left(\frac{t}{100}\right) - 0{,}009862\left(\frac{t}{100}\right)^2\right).$$

Zij geeft bijvoorbeeld bij — 139° $W - R + 0{,}084$. Men kan door — 182°, — 195°, — 204° en — 212° een rechte lijn leggen en — 217° wijkt daar 0°,25 van af, naar de andere zijde als — 158°. 't Bestaan van een *buigpunt* is dus zeker (zie onder *d*). 't Is dus duidelijk dat een kwadratische formule voor lagere temperaturen niet meer zal voldoen.

b. Maar ook eene kubische formule, die waterstoftemperaturen zou bevatten blijkt geheel onbruikbaar te zijn.

Voor de kubische formule door de punten —88°,14, —158°,83, —204°,53, krijgt men:

$$W_t = W_0\left(1 + 0{,}39451\,\frac{t}{100} - 0{,}0_25116\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0{,}0_21407\left(\frac{t}{100}\right)^3\right),$$

Zij geeft b.v. bij — 195° eene afwijking van + 0,024.

c. Wegens de moeilijkheden ondervonden met formules naar opklimmende machten van t zijn toen formules met reciproke machten

[1]) Op een kwadratische formule komt ook neer de correctie van Callendar, bij lage temperaturen gebruikt door Travers en Gwyer, Z. f. Phys. Chem. LII, 4, 190 5. De kwadratische formule van Dickson Ph. Mag. Juni 1898 is van anderen aard, doch heeft ook niet voldaan, zie Dewar Proc. R. Soc. 64 p. 227. 1898.

De calibratie van een platinathermometer door twee vaste punten wordt bij gebrek aan een waterstofthermometer nog dikwijls toegepast (b.v. Bestelmeyer Drude's Ann. 13. p. 968 '04).

TABEL I. VERGELIJKING VAN DEN PLATINAWEERSTANDS-THERMOMETER MET DEN WATERSTOF THERMOMETER.

Datum	Temperatuur waterstoftherm.	Gemeten weerstand	Opmerkingen
0°	0°	137.884 Ω	gemiddelde van 5 metingen.
27 Oct. '05 5 h. 0	— 29.80	121.587	
2 h. 50	— 58 75	105 640	
30 Oct. '05 3 h. 50	— 88.14	89.277	
8 Juli '05 10 h. 12	— 103.83	80.448	
26 Oct. '05 5 h. 20	— 139.87	59.914	
7 Juli '05 4 h. 25	— 139.85	59 920	
26 Oct. '05 3 h. 16	— 158.83	48.929	
27 Juni '05 1 h. 40	[— 182 69]	34.861	$W-R_{AI}=+0.021$
30 Juni '06 11 h. 0	— 182.75	34 858	
27 Juni '05 3 h. 50	[— 195.30]	27 598	$W-R_{AI}=-0.082$
2 Maart '06 3 h. 35	— 195.18	27.595	
29 Juni '05 11 h. 6	[— 204.53]	22.016	$W-R_{AI}=+0.110$
2 Maart '06 1 h. 30	— 204.69	22.018	
30 Juni '05 3 h. 0	[— 212.83]	17.255	$W-R_{AI}=+0.082$
5 Juli '05 5 h. 53	— 212.87	17.290	
5 Juli '05 3 h. 20	— 217.41	14.763	
3 Maart '05 10 h. 0	— 217.41	14.770	
5 Mei '06 3 h. 0	— 252.93	1.963	
5 Mei '06 5 h. 7	— 259.24	1.444	

der absolute temperaturen (zie de onderstelling in § 1 omtrent het oneindig worden van den weerstand bij 't absolute nulpunt) gebruikt.

Drie er van zijn reeds onderzocht.

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) + e\left[\frac{10^4}{T^2} - \frac{10^4}{(273{,}09)^2}\right] \quad . \quad (B)$$

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) + e\left(\frac{10^3}{T^3} - \frac{10^3}{(273{,}09)^3}\right) \quad . \quad (C)$$

Beproefd wordt ook een formule met een term $\frac{e}{T^4}$ in plaats van $\frac{e}{T^3}$.

Voor de eerste werd gezocht een voorloopig stel constanten hetgeen vervolgens verbeterd werd naar de benaderde handelwijze, die ons was aan de hand gedaan door Dr. E. F. VAN DE SANDE BAKHUIZEN (zie med.95*a*) en wel op twee wijzen. In de eerste plaats werd verkregen een stel constanten A_I waarbij tot — 217° een vrij nauwkeurige aansluiting bereikt werd, bij — 252° een vrij groote en bij — 259° een matige afwijking. In kolom $W—R_{AI}$ Tabel II zijn de afwijkingen opgegeven. In de tweede plaats een stel constanten, die een redelijk nauwkeurige aansluiting gaven met insluiting van — 252°, doch bij 259° een groote afwijking. In Tabel II zijn deze aangegeven als $W—R_{II}$.

Eindelijk werd er ook nog verkregen een voorloopige oplossing B welke alle temperaturen, — 252° en — 259° ingesloten, redelijk voorstelt, van welke de afwijkingen in Tabel II zijn aangegeven als $W—R_B$, en een oplossing van den vorm C die alleen tot 252° aansluit en op welke $W—R_C$ betrekking heeft.

De constanten der bedoelde formules zijn

	A_I	A_{II}	B	C
a	+ 0.399625	+ 0.400966	+ 0.412793	+0.40082
b	— 0 0002575	+ 0.001159	+ 0.013812	+0.001557
c	+ 0.0049412	+ 0.0062417	+ 0 012683	+0.00557
d	+ 0.019380	+ 0.026458	+ 0.056221	+0.01975
e			— 0.0032963	—0.16501

TABEL II.

VERGELIJKING VAN DEN PLATINAWEERSTANDSTHERMOMETER MET DEN WATERSTOFTHERMOMETER.

Temperatuur waargenomen met den waterstoftherm.	aantal waarnemingen met den waterstof therm.	Waargenomen weerstand. in Ω	$W-RA_I$	$W-RA_{II}$	$W-RB$	$W-RC$
0°		137.884	0	0	0	0
— 29.80	3	121.587	+ 0.025	+ 0.066	+ 0.210	+ 0 063
— 58.75	3	105 640	+ 0.011	— 0.011	+ 0.153	+ 0.048
— 88.14	4	89 277	— 0 012	— 0.050	— 0.001	+ 0.008
— 103.83	3	80.448	— 0.023	— 0.061	— 0.075	— 0.015
— 139.87	3*	59 914	+ 0.004	— 0.005	— 0.082	— 0.005
— 158.83	3	48.929	+ 0.023	+ 0.044	0	+ 0.008
— 182.75	2	34.858	— 0.029	+ 0.027	+ 0.083	— 0 035
— 195.18	2	27 595	+ 0.009	+ 0.061	+ 0.148	+ 0 007
— 204.69	1	22.018	— 0.014	+ 0.012	+ 0.100	— 0.014
— 212 87	3	17.290	— 0.024	— 0.065	— 0.001	— 0.031
— 217.41	4*	14.763	+ 0.028	— 0.048	+ 0.270	+ 0.007
— 252.93	2	1.961	+ 2.430	+ 0.064	0	0
— 259.24	1	1.444	+ 0.230	— 4.170	0	

Waar de $W—R$ uit twee bepalingen gevormd zijn is in de 2de kolom een * geplaatst.

Wanneer men uit de afwijkingen tusschen waarneming en berekening, tot —217° met behulp van A_I de middelbare afwijking van eene waarneming van de formule berekent, dan vindt men deze uitgedrukt in weerstand ± 0,025 Ω, in temperatuur ± 0°,044.

De middelbare fout van eene waarneming van den waterstofthermometer, voor zoover de toevallige fouten betreft, bedraagt 0°,02 overeenkomende in weerstand met ± 0,10 Ω.

Voor het buigpunt wordt volgens B gevonden — 180° [1]).

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. Jolles en den Heer C. Braak voor hunne hulp bij dit onderzoek.

[1]) Wegens e negatief geeft (B) geen minimum; een term als die met e is echter niet in strijd met de onderstelling $w=\infty$ van $T=0$ (§ 1) daar de formule slechts tot —259° geldt.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 95^d uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer.*

§ 1. *Inleiding.* Uit het onderzoek van Med. N°. 93 Juni '04 VIII werd afgeleid, dat als metaal voor weerstandsthermometers bij lage temperaturen goud boven platina te verkiezen zou zijn, wegens het verloop van de kromme, die 't verband aangeeft van den weerstand met de temperatuur.

Zuiver goud schijnt ook daarom nog beter geschikt omdat aan het bereiken van den uitersten graad van zuiverheid bij dit metaal wegens de beteekenis er van als muntmateriaal de uiterste zorg wordt besteed en het gehalte aan bijmengsels bij niet geheel zuiver goud zeer juist gevonden kan worden. Een voortzetting tot lage temperaturen van de metingen vermeld in Med. N°. 93 VIII, — waarvan een herhaling noodig was, omdat, al was ook de bruikbaarheid der methode door het zooeven genoemde onderzoek van MEILINK gebleken, voor den weerstand voor en na de blootstelling van den draad bij lage temperaturen niet dezelfde waarde werd gevonden, — kreeg door deze beteekenis, aan het goud gehecht, eene bijzondere waarde.

Het *buigpunt* van den weerstand als functie van de temperatuur moet, zooals uit het volgende zal blijken, bij goud veel lager liggen dan bij platina. Onze gunstige meening omtrent het goud als thermometrische stof werd bevestigd wat betreft temperaturen tot iets beneden —217°. Wat de lagere temperaturen betreft staat deze nog volstrekt niet vast. Een *minimum van weerstand* schijnt bij —259° niet meer ver af.

§ 2. *De toestellen en de metingen.* Omtrent de metingen is niet anders op te merken, dan dat zij geheel geschieden volgens de in Med. N°. 93 uitgewerkte methoden.

Het zuivere goud ontvingen wij door de vriendelijke zorg van Dr. C. HOITSEMA. Het werd door HERAEUS tot draad van 0,1 mM. diameter getrokken.

De gouddraad werd op 2 cylinders gewonden, had een lengte van ongeveer 18 M. en de weerstand bij 0° was 51,915 Ohm. De temperaturen werden verkregen in den cryostaat van Med. N°. 94^d als Med. 95^c.

De temperatuurbepalingen zijn geschied met behulp van den weerstand van den platinadraad van Med. 95^c. De bepalingen van 't nulpunt voor en na de metingen bij lage temperaturen kwamen geheel

overeen (deze overeenkomst had bij de metingen behandeld in Med. N°. 93 te wenschen overgelaten).

De metingen geschiedden deels direkt met behulp van den differentiaalgalvanometer, deels indirekt door den goudweerstand te vergelijken met een platinaweerstand, die zelf met den oorspronkelijk gecalibreerden platinaweerstand was vergeleken (zie Med. 95^c).

§ 3. *De uitkomsten*, langs direkten en indirekten weg verkregen, zijn onderscheiden door *d* en *i* opgegeven in kolom 3 van tabel III.

Bij de waarnemingen werd de cryostaat gebracht op de gewenschte temperatuur door deze zoo te regelen, dat de weerstand van den platinadraad de met deze temperatuur overeenkomende waarde had, en het bad verder gedurende de metingen van den weerstand van den gouddraad, deze temperatuur te doen behouden. De in Tabel III opgegeven temperaturen zijn de temperaturen op den waterstofthermometer volgens de waarnemingen van Med. 95^c behoorende bij den weerstand van den platinathermometer.

TABEL III.

CALIBRATIE VAN DEN GOUDWEERSTANDSTHERMOMETER.

Datum.	Temperatuur weerstand.	Waargenomen goudweerstand.	$W-R_A$	$W-R_{B\,I}$	$W-R_{B\,II}$
1906	0	51.915 *d*	0	0	0
1 Febr. 5 h. 57	— 28°.96	46 137 *i*	— 0.009	— 0.023	+ 0.032
» 3 h. 40	— 58.58	40 326 *i*	+ 15	+ 6	+ 48
» 12 h. 25	— 87.43	34.640 *i*	— 26	— 5	0
12 Juni 2 h. 50	— 103.82	31.432 *d*	— 25	+ 9	— 2
» 11 h.	— 139.86	24.284 *d*	— 20	+ 13	+ 1
17 Jan. 3 h. 20	— 159.11	20.394 *i*	— 38	— 22	— 14
1 Juni 11 h. 50	— 182.75	15.559 *d*	+ 10	— 2	+ 27
» 5 h. 8	— 195.18	12.980 *d*	+ 40	+ 22	+ 40
» 4 h.	— 204.69	10.966 *d*	+ 30	+ 18	+ 1
» 3 h.	— 212.87	9.203 *d*	— 1	— 3	— 76
12 Jan. 11 h.	— 216.25	8.460 *i*	— 33	— 23	— 129
18 Mei 4 h. 10	— 252.88	2.364 *d*	+ 1.046	0	— 7
» 6 h.	— 259.18	2.047 *d*	+ 1.326	— 3.270	— 42

Wat de door DEWAR [1]) gevonden verdere daling in waterstof, die bij 30 m.M. druk verdampt, betreft, welke daling volgens DEWAR zou behooren bij 4° daling op den gasthermometer, zoo wordt door ons opgemerkt, dat wij in overeenstemming met TRAVERS SENTER en JAQUEROD [2]) een temperatuurs verschil vinden van 6,°3 tusschen 't kookpunt van waterstof bij 760 m.M. druk en bij 60 m.M. druk.

§ 4. *Voorstelling van de verandering van den goudweerstand door een formule.* Wij sluiten ons wat dit betreft aan bij Med. N°. 95^c, XII. § 6. De weerstand van den gouddraad, kan tot — 217°, als functie van de temperatuur tamelijk goed voorgesteld worden door een formule van de vorm A.

$$\frac{W_t}{W_o} = 1 + 0{,}38947\,\frac{t}{100} + 0.0160098\left(\frac{t}{100}\right)^2 + \\ + 0{,}0079000\left(\frac{t}{100}\right)^3 + 0.00782278\left(\frac{T}{100} - \frac{100}{273.09}\right) \quad (A)$$

Deze formule A is niet geschikt om de waterstoftemperaturen op te nemen. Voor de afwijkingen $W - R_A$ zie tabel III.

We hebben derhalve gebruik gemaakt van eene formule B en wel geeft

$$\left.\begin{aligned}\frac{W_t}{W_o} = 1 &+ 0{,}381606\left(\frac{t}{100}\right) + 0{,}0090626\left(\frac{t}{100}\right)^2 + \\ &+ 0{,}0031377\left(\frac{t}{100}\right)^3 - 0{,}0268385\left(\frac{100}{T} - \frac{100}{273{,}09}\right) + \\ &+ 0{,}00518085\left(\left(\frac{100}{T}\right)^2 - \left(\frac{100}{273{,}09}\right)^2\right)\end{aligned}\right\} (B\,I)$$

een goede aansluiting tot — 253° en

$$\left.\begin{aligned}\frac{W_t}{W_o} = 1 &+ 0{,}394548\left(\frac{t}{100}\right) + 0{,}0200118\left(\frac{t}{100}\right)^2 + \\ &+ 0{,}0102889\left(\frac{t}{100}\right)^3 + 0{,}0229106\left(\frac{100}{T} - \frac{100}{273{,}09}\right) \\ &- 0{,}00094614\left(\left(\frac{100}{T}\right)^2 - \left(\frac{100}{273{,}09}\right)^2\right)\end{aligned}\right\} (B\,II)$$

eene redelijke aansluiting ook bij — 259°.

De afwijkingen zijn onder $W - R_{B\,I}$ en $W - R_{B\,II}$ in de 5de en 6de kolom van Tabel III opgenomen. De middelbare afwijking van eene waarneming met form. $B\,I$ bedraagt in weerstand $\pm$ 0,020 Ω, in temperatuur $\pm$ 0°,09. Formule $B\,I$ levert voor het buigpunt van den goud weerstand — 220°.

---

[1]) DEWAR, Proc. Roy Soc. Vol. 68 p. 360. 1901.

[2]) TRAVERS SENTER en JAQUEROD, Transact. Roy Soc. A. 200. Proc. Roy. Soc. Vol. 68, p. 361, 1901.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer LORENTZ namens den Heer J. M. VAN BEMMELEN: „Ueber den Unterschied zwischen Hydraten und Hydrogelen und die Modifikationen der Hydrogele (Zirkonsäure und Metazirkonsäure)". Sonderabdruck aus Zeitschrift für anorganische Chemie.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

In het verslag der vergadering van 24 Juni 1905 leze men:

p. 154, r. 4 v. o.: — 195° in plaats van 195°.
„ 156, „ 18 „ „ : Pl. VI „ „ „ Pl. IV.
„ „ „ 10 „ „ : 51 „ „ „ 57.

In Plaat V behoorende bij meded. N°. 83 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, Zittingsverslag Februari 1903, p. 667 is het vacuumglas B'_0 18 cM. te lang geteekend.

Erratum van de mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER, „*Meerdimensionale Vectordistributies*", verslag der vergadering van 26 Mei 1906. De uitdrukking voor de tweede afgeleide pag. 18 onderste regel worde met een — teeken voorzien; in overeenstemming hiermee wordt stelling 3:

$$\nabla^2 = -\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2}$$

Verder leze men pag 20 r. 1 v. o. $k_n r^{n-1}$ in plaats van $k_n \pi r^{n-1}$; en $k_n(n-2)r^{n-2}$ in plaats van $k_n \pi r^{n-2}$ op de volgende plaatsen:

pag. 20 r. 2 v. o.
„ 21 „ 11 „ b. en r. 6 v. o.
„ 22 „ 9 „ „ „ „ 10 „ b.
„ 23 „ 1 „ „ „ „ 3 „ „
„ 26 „ 3 „ o.

(20 Juli, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 29 September 1906.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 172.

In memoriam Prof. C. A. J. A. OUDEMANS, p. 174.

Concept antwoord aan den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het inrichten van het nieuw te stichten Instituut voor hersenonderzoek, p. 178.

Verslag van de Heeren KAMERLINGH ONNES, HAGA en VAN DER STOK over de vraag of het wenschelijk is dat het douane onderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende vermeden worde, p. 178.

J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge betrekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908", p. 179. (Met één plaat).

W. H. JULIUS: „Het voortplanten van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen", p. 211.

J. P. VAN DER STOK: „Mededeeling over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September l. l.", p. 211.

JAN DE VRIES: „Quadratische omwentelingscomplexen", p. 211.

A. PANNEKOEK: „De samenhang van spectrum en kleur der sterren". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 216.

J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen" (4de mededeeling: De lengteplooi). (Aangeboden door de Heeren H. A LORENTZ en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 227. (Met één plaat).

F. MULLER: „De placentatie van Sciurus vulgaris". (Aangeboden door de Heeren A. A. W. HUBRECHT en L. BOLK), p. 236.

J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen". (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en T. PLACE), p. 246.

W. VAN BEMMELEN: „Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia". (Aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK), p. 250.

R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide". (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERF en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 262.

A. F. HOLLEMAN en H. A. SIRKS: „Over de zes isomere dinitrobenzoëzuren". p. 264.

A. F. HOLLEMAN en J. HUISINGA: „Over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur", p. 270.

J. J. BLANKSMA: „Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en P. VAN ROMBURGH), p. 276.

W. BURCK: „Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen". (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL), p. 278.

C. EYSBROEK: „Over de amboceptoren van een antistreptococcenserum". Aangeboden door de Heeren C. H. H. SPRONCK en C. A. PEKELHARING), p. 285.

L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten". Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 293.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK; „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer", p. 310.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 310.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding hiervan deelt de Secretaris mede dat de Heeren LELY en WEBER verslag uitgebracht hebben over het verzoek tot de Akademie gericht, om zich op het Congrès international pour l'étude des regions polaires te doen vertegenwoordigen. In dit verslag werd de wenschelijkheid betoogd een vertegenwoordiger te zenden. De Heer VAN DER STOK heeft zich daartoe op verzoek van den Voorzitter bereid verklaard. Verder deelde de Secretaris mede dat de Letterkundige Afdeeling bericht heeft, dat er bij haar geen bezwaar bestaat dat de Keiz. Akademie van Wetenschappen te Tokyo toetreedt tot de Internationale Associatie van Akademiën. Daar op de vraag van den Voorzitter geen der leden van de Natuurkundige Afdeeling hiertegen bezwaar maakt zal hiervan aan de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen bericht worden gezonden.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, J. A. C. OUDEMANS, P. H. SCHOUTE en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Heer S. H. KOORDERS te Poerworedjo (Kedoe) dat hij onder dankzegging zijne benoeming tot Correspondent der Akademie aanvaardt.

3°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 19 Juli l.l. waarbij Z.Exc. om bericht vraagt over een schrijven van den Belgischen gezant, waarbij de Regeering uitgenoodigd wordt zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek te Brussel te houden.

Aan den Minister is geantwoord dat de Heer J. P. VAN DER STOK, als vertegenwoordiger der Akademie op dat Congres, zeker bereid zoude zijn de Regeering aldaar te vertegenwoordigen.

4°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 18 Augustus 1906 met verzoek te willen berichten of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is dat het douane onderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende, vermeden worde.

In handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES, HAGA en VAN DER STOK om advies.

5°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 Juli 1906 ter begeleiding van een schrijven van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam en met verzoek om nader advies omtrent de inrichting van de localiteiten voor de instelling van hersenonderzoek.

In handen gesteld van de Heeren WINKLER, BOLK, MAC GILLAVRY, VAN WIJHE en ROSENBERG om advies.

6°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 13 September 1906 met verzoek om advies omtrent eene doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's Rijksmuseum.

In handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES, WIND, ZEEMAN, DE BRUYN en MAC GILLAVRY om advies.

7°. Brief van administrateuren van het P. W. Korthalsfonds waarbij zij bericht geven hunne goedkeuring te hechten aan het voorstel der Afdeeling om de dit jaar beschikbare *f* 600.— uit genoemd fonds aan te wenden ten behoeve van den Heer J. BOLDINGH Docs. in de plant- en dierkunde te Utrecht, voor de bewerking van de flora der Nederlandsche bovenwindsche eilanden, St. Eustatius, Saba en St. Martin. Dit bedrag is sedert ontvangen en zal ter beschikking gesteld worden van de Maatschappij voor het Natuurkundig onderzoek der Nederlandsche Koloniën.

8°. Missive van de American Philosophical Society ter begeleiding van een medaille ter herinnering van den 200-jarigen geboortedag van BENJAMIN FRANKLIN. Onder dankbetuiging aanvaard.

9°. Bericht van het overlijden van den Heer Prof. LUDWIG BOLTZMANN te Weenen, Buitenlandsch Lid der Akademie, op 8 September l.l. Is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van

Dr. C. A. J. A. OUDEMANS,

rustend lid der Afdeeling.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

Mijne Heeren!

Het zij mij vergund enkele woorden te wijden aan de nagedachtenis van ons voormalig oudste rustend lid Dr. C. A. J. A. OUDEMANS.

Geboren 7 December 1825, studeerde OUDEMANS aan de Leidsche Universiteit, alwaar hij in 1847 in de geneeskunde promoveerde. Ter voltooiing zijner medische studiën begaf hij zich naar Parijs en toen aldaar in Februari 1848, wegens het uitbreken der revolutie, de colleges gesloten werden, naar Weenen; van waaruit hij nog datzelfde jaar, toen het lectoraat in de botanie, zoölogie en materies medica aan de Klinische School te Rotterdam openviel, naar die betrekking solliciteerde om zich na zijne benoeming, tevens aldaar als praktizeerend geneesheer te vestigen.

In het bezit gekomen eener zich uitbreidende praktijk, aarzelde hij evenwel niet daarvan afstand te doen toen hem in 1859, door zijne benoeming tot hoogleeraar in de botanie en pharmakognosie aan het Athenaëum te Amsterdam, de gelegenheid geboden werd zich meer uitsluitend te wijden aan de botanische wetenschap, wier beoefening hem reeds te Leiden, onder den invloed van den hoogleeraar REINARDT en van den aldaar als geneesheer gevestigden Dr. MOLKENBOER, lief geworden, en daarna meer en meer tot eene levenstaak geworden was.

Reeds een jaar vroeger, in 1858, hadden zijne botanische geschriften hem toegang tot onze Akademie verschaft, van welke hij van 1879—1896 het secretariaat bekleedde, in welk laatste jaar, dat van het intreden van zijn emeritaat als hoogleeraar aan de Amsterdamsche Universiteit, Amsterdam door hem met der woon verlaten werd om zich aanvankelijk des zomers te Apeldoorn, des winters te Arnhem, later uitsluitend in deze laatste plaats te vestigen.

Bij de meesten onzer zal de herinnering nog levendig zijn aan de opgewektheid en zorgvuldigheid waarmede dit secretariaat, zooals trouwens alles wat de overledene ondernam, door hem werd waargenomen.

Reeds in 1850 begint de reeks zijner wetenschappelijke geschriften met een kort opstel getiteld: „Morphologische beschouwingen omtrent de ranken van Vitis viniferi", en sedert dien tijd wordt zij bijna onafgebroken, tot enkele maanden voor zijn overlijden, voortgezet; getuigenis afleggende, van buitengewone werkkracht en wetenschappelijken ijver. Men vindt die geschriften, waaronder velen van grooten omvang, in tal van tijdschriften: in het Nederlandsch Kruidkundig Archief, het Nederlandsch Lancet, de Botanische Zeitung, de Annales des Sciences Naturelles, de Verslagen en Mededeelingen, de Verhandelingen en de Zittingsverslagen dezer Akademie, in het „Bulletin du Congrès International de Botanique" van 1865 te Amsterdam, van welk congres de overledene het voorzitterschap bekleedde, in „Hedwigia, Notizblatt für kryptogamische Studien", in de „Annales mycologici", in het botanische Centralblatt en wellicht nog anderen.

En daarnaast staan afzonderlijke werken, die elk voor zich eene uitgebreide studie hebben vereischt, als daar zijn: zijne „Aanteekeningen op het pharmakognostisch-botanisch gedeelte der Pharmacopoea Neerlandica" (1854—1856); zijne „Flora van Nederland" in drie deelen met atlas (1859—1862), het standaardwerk op dit gebied, zijne „Handleiding tot de pharmakognosie van het planten- en dierenrijk" (1865) en zijn „Leerboek der

plantenkunde" (1866—1870), dat vele jaren lang *het* leerboek voor deze wetenschap in Nederland is geweest tot het vervangen werd door het boek waarvan DE VRIES de anatomie en physiologie, OUDEMANS zelve de morphologie en de systematiek bewerkte. Bovendien verschenen onder zijne leiding de drie jaargangen van Neerland's plantentuin (1865—1867).

Op onderscheiden gebied bewegen zich deze geschriften. Zoo vindt men er naast dezulken, die de systematiek betreffen, eene studie „over de prikkelbaarheid der bladen van „Dionaea muscipula" (1859) en meerdere, die zich met den anatomischen bouw der planten bezighouden, onder welke vooral zijn onderzoek betrekkelijk het velamen der luchtwortels der orchideën (1860) bekendheid verworven heeft.

Veelal sloten deze botanisch-anatomische onderzoekingen zich aan bij zijn onderwijs in de pharmakognosie. Op pharmakologisch gebied heeft OUDEMANS zich dan ook een grooten naam verworven, vooral daar hij een der eersten was die ter herkenning der „simplicia" van hun anatomischen bouw gebruik maakten.

En hierbij valt tevens te vermelden het zeer ruime aandeel door hem genomen in de bewerking (1865—1861) der tweede uitgave der Nederlandsche Pharmacopoea, als secretaris, en der derde uitgave (1884—1888), als voorzitter, der daartoe benoemde commissie.

Niet minder verdienstelijk heeft OUDEMANS zich gemaakt voor de kennis der Flora van Nederland. Talrijke nieuwe vondsten zijn onder zijn naam te vinden of werden uitgegeven in het door hem bewerkte Herbarium van Nederlandsche planten. In zijn reeds vermeld standaardwerk heeft hij alles bijeengebracht wat op dat oogenblik omtrent de vaderlandsche flora bekend was.

Vooral de studie der zwammen was het tot welke hij zich reeds spoedig met voorliefde wendde. Aan hem is het te danken dat de Nederlandsche schimmelflora thans vrij goed bekend is, vooral niet minder dan die der omringende landen.

Tot in zijne laatste levensjaren werd door hem met onverminderden ijver en onverzwakte geestvermogens in die richting voortgewerkt.

Nog bij de voltooiing, in 1904, zijner „Catalogue Raisonné des Champignons des Pays-Bas" sprak hij de hoop uit, dit, zijn laatste werk, geregeld door jaarlijksche supplementen voort te zetten, aussi longtemps que les conditions pour atteindre ce but ne me manqueront pas".

Dit heeft niet zoo mogen zijn; een omstreeks November l.l. ingetreden verval van krachten heeft op tachtigjarigen leeftijd een einde gemaakt aan een zoo vruchtbaar en werkzaam leven.

Dankbaar zullen wij blijven gedenken wat OUDEMANS der Nederlandsche wetenschap geschonken heeft.

Concept antwoord aan den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het inrichten van het nieuw te stichten Instituut voor herzenonderzoek.

In handen uwer commissie is gesteld een schrijven van Zijne Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 Juli 1906 N°. 1988, afdeeling K. W. begeleidend een missive aan het gemeentebestuur van Amsterdam d.d. 21 Juli 1906 N°. $\frac{11719}{3022}$ 0.

In laatstgenoemde missive deelt het gemeentebestuur mede, dat het bereid is een Instituut voor Hersenonderzoek naast het nieuw te stichten Instituut voor Anatomie te bouwen, volgens een plan, waarvan het avant-projet de missive vergezelt.

Dit avant-projet omvat een bouwplan: photografisch atelier op de 2de verdieping, 4 localen voor hersenonderzoek van 5 bij 9 M. op de eerste verdieping, 2 dergelijke lokalen gelijkvloers, benevens de daaronder gelegen kelderverdieping. Het gemeentebestuur van Amsterdam wenscht aan die bereidverklaring de voorwaarde te verbinden „dat de te stichten instelling moet worden gesteld onder een directeur met een commissie van advies naast zich, welke commissie zou moeten bestaan uit drie hoogleeraren aan de Gemeentelijke Universiteit en wel dien in de Anatomie, dien in de Psychiatrie en dien in de Zoölogie."

Uw commissie is van meening dat het door het gemeentebestuur van Amsterdam voorgestelde Instituut voldoet aan de voor dit doel te stellen eischen. Zij is voorts van meening, dat de voorwaarde welke de gemeente Amsterdam aan den afstand van het Instituut aan den Staat verbindt, billijk is.

Zij stelt U dus voor om den Minister te adviseeren het aanbod der gemeente Amsterdam te aanvaarden.

Natuurkunde. — De Heeren Kamerlingh Onnes, Haga en van der Stok brengen het volgende verslag uit:

De ondergeteekenden stellen voor te antwoorden:

Onderwerp.
Renvooi dd. 18 Aug. 1906,
N°. 2169, Afd. K. W.

Aan
Zijne Excellentie den Minister
van Binnenlandsche Zaken.

Met referte aan het in hoofde aangehaalde renvooi heeft de Kon. Akad. v. Wet., Afd. Wis- en Natuurk., de eer Uwe Excellentie mede te deelen :

dat door het Kon. Ned. Meteor. Instituut te De Bilt wordt deelgenomen aan de internationale wolkenwaarnemingen op grond waarvan deze instelling alle publicaties van luchtscheepvaartkundige instellingen ontvangt. Genoemd Instituut heeft derhalve, zij het nog geen direct, dan toch middellijk belang bij de ontwikkeling van het op internationaal overleg gegronde onderzoek der hooge luchtlagen.

Ook is de mogelijkheid niet uitgesloten dat, te eeniger tijd, ook door Nederland een meer werkdadig aandeel aan dit onderzoek zal worden genomen.

Op grond hiervan meent de W. Nat. Afd. der K. A. v. W. toetreding tot het door Rusland gedane voorstel te mogen aanraden.

get. H. Haga.
H. Kamerlingh Onnes.
J. P. van der Stok.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. Oudemans biedt aan : *„Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in* 1908."

N.B. In de onderstaande mededeeling worden de vier sedert 1608 bekende wachters van Jupiter, naar hunne middelbare afstanden van de planeet I, II, III en IV genoemd, terwijl verder de toegevoegde letters *n* en *v* beteekenen, dat de wachter *nabij* of *veraf* is, d. w. z. zich in de naar ons toe- of van ons afgekeerde helft zijner loopbaan bevindt. De jovicentrische lengten worden, even als de geocentrische amplituden, in „teekens" en „graden" geteld, de laatsten van de bovenste geocentrische conjunctie af; de oostelijke elongatie, aangeduid door *o . e*, heeft plaats bij eene amplitude van 3^t, de westelijke elongatie *w . e*, bij eene amplitudo van 9^t.

Om den tekst niet telkens door bijzonderheden te storen, worden deze in aanteekeningen achteraan gevoegd.

In de nummers 3846 en 3857 der *Astronomische Nachrichten* komen twee berichten voor, het eerste van den Heer PH. FAUTH te Landstuhl, van 8 December 1902, met postscriptums van 29 December 1902 en 14 Januari 1903, het andere van den Heer A. A. NIJLAND te Utrecht, van 27 Februari 1903, betreffende door hen waargenomene bedekkingen van den eenen Jupiterswachter door den anderen. (1) en (2).

FAUTH herinnert bovendien nog, dat HOUZEAU in zijn *Vademecum*, blz. 666, een paar dergelijke waarnemingen vermeldt, (3) en dat STANLEY WILLIAMS den 27sten Maart 1885 te 12^{u} 20^{m} den 3^{en} wachter den 1^{en} zag voorbijgaan, doch zóó, dat beide wachters te zamen één peervormig uiterlijk hadden. (4)

De wachters van Jupiter beschrijven loopbanen, die slechts zeer geringe hellingen maken met het vlak van Jupiter's equator. LAPLACE nam voor elken wachter een vast vlak aan, waarmede het vlak der loopbaan van dien wachter een standvastigen standhoek maakt, terwijl de snijlijn dezer beide vlakken, de knoopenlijn, eene langzame teruggaande beweging heeft. De vaste vlakken maken hoeken van slechts enkele minuten met het vlak van Jupiter's equator, en snijden het vlak der Jupitersbaan langs dezelfde knoopenlijn als het equatorvlak; terwijl de helling van dit vlak op het vlak van Jupiter's loopbaan wordt opgegeven 3° 4′ te bedragen, en de lengte van den klimmenden knoop, dus ook die der vaste vlakken, thans ongeveer 315½° is.

Om het tijdvak te vinden, wanneer ongeveer, gezien van de Aarde, bedekkingen van den eenen wachter door den anderen, mogelijk zijn, is de kennis noodig van de lengte van den klimmenden knoop en van de helling van het gemiddelde vaste vlak ten opzichte van het vlak der aardbaan. Gaat dat gemiddelde vaste vlak, verlengd, door de aarde, dan kunnen er bedekkingen van den eenen wachter door den anderen waargenomen worden, en daar de omloopstijd van Jupiter om de zon bijna 12 jaar bedraagt, zoo zullen die tijden ongeveer zes jaar uit elkander liggen; zóó namelijk, dat Jupiter den eenen keer door den klimmenden, den anderen keer door den dalenden knoop van een vlak gaat, dat, evenwijdig aan het gemiddelde vaste vlak, door het middelpunt der zon loopt.

Daar er nu in 1902 bedekkingen van den eenen wachter door den anderen zijn waargenomen, is het te verwachten, dat die verschijnselen in 1908 weêr zullen kunnen gezien worden, (5).

Het kwam mij wenschelijk voor, van die conjuncties van twee

wachters, in het gunstigste gedeelte van 1908, eene vooruitberekening te maken en daardoor hare waarneming te verlichten. De vroegere methode toch, om de loopbanen der wachters te bepalen door de herhaalde meting van hunne afstanden van, en van hunne richtingen met betrekking tot de planeet, is vervangen door het meten, (liefst met een heliometer) der afstanden en richtingen van de wachters onderling (6). De omloopstijden der wachters kan men, voor waarnemingen, die een niet te lang tijdvak omvatten, als nauwkeurig bekend onderstellen en dan biedt elke loopbaan voor een bepaald tijdvak zes onbekenden aan, indien men althans geen gebruik maakt van de derde wet van KEPPLER, en dus van elken wachter de groote as der loopbaan als onbekende invoert. Meet men afstand en richting tusschen planeet en wachter, zooals BESSEL te Koningsbergen in 1834—39 en SCHUR te Göttingen in 1874—80 gedaan hebben, dan verkrijgt men twee vergelijkingen tusschen zes onbekenden; meet men echter afstand en richting tusschen twee wachters onderling, dan is het aantal onbekenden in deze vergelijkingen dubbel zoo groot, dus $= 12$. En worden alle combinaties twee aan twee genomen, zooals GILL en FINLAY aan het Kaap-Observatorium gedaan hebben, dan verkrijgt men in het geheel een groot aantal vergelijkingen met 24 onbekenden, die dan door de methode der kleinste vierkanten behooren opgelost te worden. Voegt men er nu de massa's der wachters bij, die niet anders kunnen gevonden worden, dan uit de storingen, die de eene wachter in de beweging der andere wachters veroorzaakt, alsmede de afplatting van Jupiter, die door den achteruitgang der knoopenlijnen op de vaste vlakken bepaald wordt, dan wordt het aantal onbekenden op 29 gebracht (7).

De overweging nu, dat eene waarneming van eene bedekking, zelfs van eene conjunctie zonder bedekking, door iedereen verricht kan worden, die over een kijker van voldoende grootte beschikt, en dat zulk eene waarneming even goed twee vergelijkingen tusschen de onbekenden oplevert, (indien ten minste, bij eene niet-centrale bedekking of enkelen voorbijgang, het verschil in breedte, met een dradenmikrometer uitgemeten wordt), heeft mij aanleiding gegeven, voor het gunstigste gedeelte van 1908 de tijden dier conjuncties vooruit te berekenen. Blijkt het door de ondervinding, dat deze voorbereidende arbeid goede resultaten oplevert, dan zou eene voortzetting er van bij een volgend gunstig tijdvak, b.v. 1914, overweging verdienen.

Voor het oogenblik dat het gemiddelde vaste vlak, door het middelpunt der aarde gaat, vind ik, zie Aant. 5, 8 Juli 1908 te $19^{u},6$ Midd. Tijd te Greenwich.

Het is jammer dat dit tijdstip zeer ongunstig valt, want dien dag gaat Jupiter te Greenwich te 2^u10^m M. T. door den meridiaan, bij eene noorderdeclinatie van 16°48′,5, terwijl de zon 22°30′ noorderdeclinatie heeft. Voor Utrecht vind ik bijv., voor 8 Juli, de straalbreking in aanmerking nemende:

Ondergang van den bovenrand der zon te 8^u20^m Midd. tijd,
„ „ Jupiter „ 9 44 ,5 „ „

De kans, om eene der berekende bedekkingen waar te nemen, is voor Utrecht dus gering. Voor zuidelijkere sterrewachten is zij grooter, bijv. voor de Kaap heeft men:

Ondergang der zon te 5^u 5^m Midd. tijd
„ van Jupiter „ 7 25 „ „

Te Utrecht gaat Jupiter den 8sten Juli 1908 dus 1^u24^m,5 na de zon onder, aan de Kaap 2^u20^m.

Wij hebben nu alle conjuncties berekend, die in het tijdvak van 31 Mei tot 20 Juli 1908 tusschen de wachters van Jupiter zullen plaats vinden, en zullen in het kort den weg beschrijven, dien wij gevolgd hebben om ze op te sporen.

In den *Nautical Almanac* vindt men opgegeven de *geocentrische bovenste conjuncties*; in dien van 1908 op blz. 504 en 505.

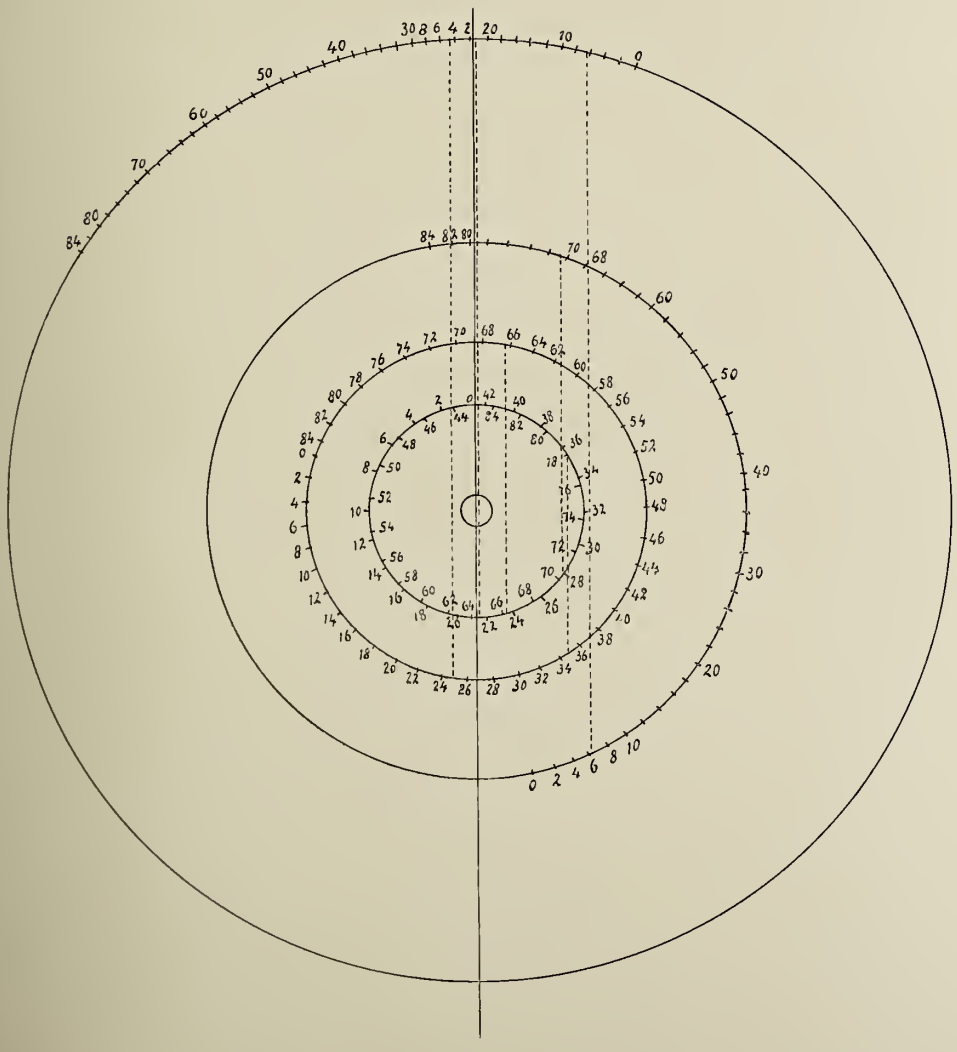
Wij begonnen met voor elk tijdvak van twee geocentrische synodische omloopstijden van I, (nagenoeg 85 uren), eene teekening op maat te teekenen van de vier als cirkelvormig aangenomene loopbanen der wachters, en op deze banen (met behulp van verdeelde kartonnen bogen) van twee tot twee uren, de plaatsen der wachters aan te geven, en het aantal sedert het beginpunt verloopene uren er bij te zetten. Middelpuntsvereffening enz. werden verwaarloosd.

De schaal dezer teekening was $4'' = 1$ mm. De stralen der loopbanen waren dus: voor I 27,9 mm.; voor II 44,45 mm.; voor III 70,9 mm. en voor IV 124,7 mm.

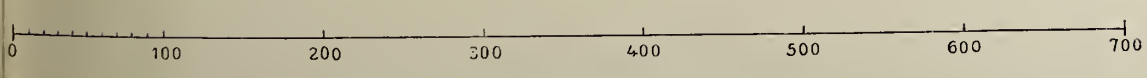
De richting van het nulpunt van I naar het middelpunt van al de cirkels, gaf de richting naar de aarde aan, en het was nu gemakkelijk, voor elke der zes mogelijke combinaties, twee aan twee, der wachters, de gelijke uurcijfers op te zoeken, wier verbindingslijn aan die richting evenwijdig loopt; deze verbindingslijnen zullen dan nagenoeg de tijden aangeven, waarop de eene wachter voor de aarde in conjunctie met den anderen is. Het gebrek aan evenwijdigheid, in de natuur, der verbindingslijnen van de aarde met de jupiterwachters, in verschillende punten hunner loopbanen, kan hierbij gerust verwaarloosd worden. De bij deze mededeeling gevoegde

A. C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908."

Beginpunt: de geocentrische bovenste conjunctie van I, van 12 Juli 1908, 11u 2m,3 M. T. Greenwich = 11u 11m,65 M. T. Parijs = 23u 11m,65 Burgerl. Tijd Parijs.



Schaal $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$ 1mm. = 8'' heliocentrisch.



De eenheid is de straal van den aard-equator.

plaat stelt op halve grootte de teekening voor, dienende van 12 Juli 1908 te $11^u2^m,3$ Midd. tijd te Greenwich tot 85 uur later. De stippellijnen duiden de verbindingslijnen der gelijkvormige cijfers aan, en stellen dus elk eene conjunctie van twee wachters voor. De overeenkomstige tijden, in deze figuur:

$6^u,2$: IV_v bedekt door III_n,
21 ,8 : IV_v „ „ I_n,
25 ,0 : IV_v „ „ II_n,
35 ,0 : I_v „ „ II_n,
66 ,25 : II_v „ „ I_n,
71 ,0 : III_v „ „ I_n,

werden gevoegd bij het tijdstip, dat voor de figuur als nulpunt moet aangezien worden; uit den *N. Almanac* kennen wij dat in middelbaren tijd te Greenwich; de oogenblikken der conjuncties werden daarna, door bijtelling van $12^u9^m21^s$, in burgerlijken tijd te Parijs omgezet, en vervolgens werden, met behulp van de *Tables écliptiques* van Damoiseau, 2e gedeelte, (8) van de beide wachters de elongatie en de breedte berekend, uitgedrukt in stralen van Jupiter. Kwamen nu de elongaties niet volkomen overeen, dan voerde eene lichte berekening tot den meer nauwkeurigen conjunctietijd. (9).

De correctie van den aangenomen tijd was, als de beide wachters elkander te gemoet schenen te gaan, (hetgeen het geval is als de eene ver af, de andere nabij is), meestal zeer gering; als zij daarentegen denzelfden kant opgingen, (hetgeen het geval is, als beiden „veraf" of „nabij" zijn, en dus de een den ander moet inhalen), dan bedroeg de correctie somtijds een uur of meer. Zoodra echter, in welk geval ook, de correctie 20 minuten overschreed, werd de berekening met het verbeterde tijdstip herhaald.

Hierachter volgt de lijst der gevondene resultaten. Van 31 Mei tot 19 Juli, dus in 50 dagen, hebben er 72 conjuncties plaats; jammer dat er voor ééne bepaalde plaats slechts zeer weinig zichtbaar zullen zijn. Alleen die conjuncties zijn namelijk zichtbaar, die tusschen den ondergang der zon en dien van Jupiter vallen. Voor Utrecht heeft men, in middelbaren tijd:

	Ondergang van den bovenrand der zon.	Ondergang van Jupiter.	Verschil
1908 Juni 1	8^u10^m	11^u54^m	3^u44^m
„ 11	8 20 ,5	11 19	2 58 ,5
„ 21	8 24	10 44	2 20
Juli 1	8 24	10 9	1 45
„ 11	8 18	9 34	1 16
„ 21	8 7,5	8 59	0 51 ,5

Voor de Kaap de Goede Hoop:

1908 Juni	1	4^u59^m	9^u18^m	4^u19^m
„	11	4 57 ,5	8 46 ,5	3 49
„	21	4 58	8 16	3 18
Juli	1	5 2	7 46	2 44
,	11	5 6 ,5	7 16	2 9 ,5
„	21	5 13	6 47	1 34

Men ziet dus dat de omstandigheden voor eene zuidelijke sterrewacht aanmerkelijk gunstiger zijn dan voor eene noordelijke.

Verscheidene bedekkingen zullen niet waarneembaar zijn, doordien de gemeenschappelijke elongatie der satellieten kleiner is dan de eenheid, d. i. dan de straal van Jupiter. Dit is het geval met de nummers 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 23, 39 en 64. De planeet staat in de acht eerste en in het laatste dezer gevallen tusschen de beide wachters in, zoodat de conjunctie dezer lichamen niet waarneembaar is. Bij N°. 39 zijn beide wachters, I en IV, achter de planeet verborgen [1]).

Bij andere conjuncties kan het voorkomen dat een der beide wachters in de schaduw der planeet staat, waardoor hij voor ons onzichtbaar wordt. Zoo is

(N°. 21),	den 13	Juni	te	9^u28^m	M. T. Grw., II	verduisterd
(N°. 31),	„ 20	„	„	12 51	„ „ , II	„
(N°. 51),	„ 4	Juli	„	18 15 ,7	„ „ , II	„
(N°. 65),	„ 13	„	„	12 3	„ „ , IV	„

Is de wachter, die bij eene conjunctie het meest naar de aarde staat, verduisterd, dan zou hij zich, uit ons standpunt gezien, op den anderen wachter geheel of gedeeltelijk als een zwart vlekje kunnen projecteeren; dit geval heeft zich echter bij onze berekeningen niet voorgedaan.

De laatste der zoo even genoemde conjuncties is misschien nog wel zichtbaar, want volgens den *N. Almanac* heeft de uittrede van IV uit de schaduw der planeet plaats te $12^u7^m15^s$ midd. tijd te Greenwich, en de voorspellingen der eklipsen van dezen wachter zijn wel eens enkele minuten fout. Weinige minuten later, nl. te 12^u16^m, treedt, volgens den *N. Almanac*, II op de schijf van Jupiter in.

---

[1]) De Nautical Almanac heeft voor dezen nacht, (midd. tijd te Greenwich):

IV.	Occultation	Disappearance	10^h19^m
I.	Occultation	Disappearance	11 20
I.	Eclipse	Reappearance	14 26 27^s
IV.	Occultation	Reappearance	15 13
IV.	Eclipse	Disappearance	18 5 6
IV.	Eclipse	Reappearance	22 52 2.

AANTEEKENINGEN.

(1) Het artikel van den heer FAUTH luidt, verkort aldus:

— — — Ausser den in HOUZEAU, Vademecum p. 666 aufgeführten Beobachtungen, (zie hierachter Aanteekening 3), kenne ich aus neuerer Zeit nur einen Fall: STANLEY WILLIAMS sah am 27 März 1885 an einem 7 cm. Rohre mit 102-facher Vergrösserung um $12^h\ 20^m$ den III Trabanten vor dem I, wobei beide ein birnformiges Objekt bildeten.

— — — In fünf Wochen konnte ich drei Bedeckungen verfolgen, wobei auzunehmen ist, dass mir durch schlechte Witterung etwa 10 andere Gelegenheiten entgangen sein mögen, unter denen sicher einige Bedeckungen vorkommen. Nach meiner Erfahrung können Konjunctionen der Jupitermonde unter sich weit genauer beobachtet werden als Bedeckungen durch Jupiter oder Vorübergänge vor ihm. Somit möchten die hier angegebenen Beispiele Anlass bieten, in den späteren Oppositionen Jupiters den durchaus nicht seltenen Bedeckungen oder wenigstens Berührungen und sehr nahen Konjunktionen der Trabanten unter sich mehr Aufmerksamkeit zu schenken, zumal schon kleine Instrumente zur Wahrnehmung der Phasen einer event. Bedeckung genügen. Die Beobachtungen der letzten Zeit sind:

1. Oct. 7; II bedeckt I; die S. Ränder berühren sich und I ragt im N. etwas hervor. Konj. um $9^h\ 16^m$ M. E. Z. [1])

2. Oct. 23; II bedeckt III so, dass die Mitte von II nördlich am N. Rand von III vorbeigeht; Konjunktion um $8^h\ 7^m\ 3^s,5$.

3. Nov. 10; III bedeckt I so, dass der S. Rand von III die Mitte von I streift (gute Luft); Konjunktion um $7^h\ 33^m\ 20^s$.

Instrument: 178 mm., Vergrösserung 178 fach.

Landstuhl, 1902 Dez. 8.

P.S. vom 29 Dezember. Am Abend des 24 Dezember gelang nochmals die Beobachtung einer Bedeckung, bei welcher I über IV hinwegzog. Aus je fünf vor- und nachher notierten Zeitmomenten folgen als Mittelwerte $6^h\ 24^m,25$, $24^m,625$, $24^m,50$, $24^m,625$ und $24^m,50$. Die Konjunktion fand also statt $6^h\ 24^m\ 30^s$.

Der Uhrstand war um 3^h mit dem Zeitsignal verglichen worden. IV Stand ein wenig südlicher als I, vielleicht um ein Viertel seines Durchmessers. Die weitaus interessantere Konjunction zwischen II und IV am 25 Dezember blieb gegenstandslos, weil IV um etwa zwei Durchmesser vorüberging,

P.S. vom 14 Januar (1903). Heute Abend, am 14 Januar, bewegte

---

[1]) D. i. Mittlere Europäische Zeit, 1^u later dan Greenwich-tijd.

sich der Trabant III über II hinweg. Die sehr schlechte Luft liess nur den ersten Kontakt auf etwa $6^h\,2^m$ feststellen. Um $6^h\,18^m$ mochten sich beide Komponenten so weit getrennt haben, dass dies in einem weniger schlechten Augenblick bemerkt wurde; um $6^h\,32^m$, dem nächsten blickweisen Auftauchen der beiden Lichtpunkte, waren diese um etwa einen Durchmesser von einander entfermt. Die Bedeckung war fast genau central. PH. F.

(2) De Heer NIJLAND schreef in N°. 3857 der *Astronomische Nachrichten*:

— — — Am 15 Juli 1902 fand eine Konjunktion der Trabanten II und III statt, welche ich bei guter Luft am Refraktor (Brennweite 319 cm., Oeffnung 26 cm.) mit Vergr. 248 beobachten konnte. Es wurde III nahezu central von II bedeckt. Einige Minuten lang blieb eine feine schwarze Linie zwischen den beiden Scheibchen sichtbar, welche um $14^h10^m11^s$ M.Z. Utrecht verschwand and um $14^h20^m31^s$ wieder erschien; die Konjunktion musz also um $14^h15^m21^s$ stattgefunden haben. Dass diese Trennungslinie vor und nach der Konjunktion immer dieselbe Richtung hatte, und zwar scheinbar senkrecht auf der Bahnebene der Trabanten stand, mag als Beweis dafür gelten, dass der Vorübergang wirklich nahezu central gewesen ist. Dann lässt sich aber aus dieser centralen Passage die Summe der Durchmesser der Monde II und III mit erheblicher Genauigkeit bestimmen.

Nehme ich für die mittlere Entfernung $\mathrm{♃}-\odot$ die Halbmesser der Bahnen gleich $177''{,}8$ und $283''{,}6$, so finde ich für die relative Bewegung von II und III zur Beobachtungszeit $13''{,}86$ pro Stunde. Aus der beobachteten Zeitdauer von $10^m20^s = 0^h172$ folgt dann für die Summe der beiden Durchmesser, $2''{,}38$. Wird (siehe die Angaben von DOUGLASS, Astr. Nachr. 3500) für das Verhältniss der Durchmesser von II und III $^4/_{11}$ angenommen, so finde ich in vorzüglichen Uebereinstimmung mit den a. a. O. genannten Werten für den Durchmesser von II $0''{,}87$ und von III $1''{,}51$ (in mittl. Entf.).

Utrecht, 1903 Febr., 27. A. A. NIJLAND.

Aanmerking. Daar wij uit de waargenomene tijdstippen een eenigszins ander resultaat verkregen dan de Heer NIJLAND, gaf ZEd. ons, op ons verzoek, de herleiding dezer waarneming ter inzage; het bleek dat hij, om de amplituden te vinden, de vorige „Geocentric superior conjunction" met den daarop volgenden „transit" verbonden had, uit wiens „Ingress" en „Egress" de onderste conjunctie kon afgeleid worden. Er was echter eene kleine rekenfout in de herleiding ingeslopen; deze verbeterende, verkregen wij voor de relatieve beweging der beide wach-

ters 13″,786, en voor de som der middellijnen 2″,374. Verder is op te merken dat de verhouding 4 tot 11 blijkbaar zijn moet 4 tot 7, hetgeen ook bedoeld werd; wij verkrijgen dus voor de middellijnen 0″,863 en 1″,511, dus toch zoo goed als in overeenstemming met den Heer Nijland. Daar voor de stralen der loopbanen de waarden genomen zijn, die gelden voor den middelbaren afstand van Jupiter tot de zon, behoeven deze waarden geene verdere herleiding.

(3) Men leest in Houzeau, *Vademecum* (Bruxelles, 1882), p. 666: On rapporte une occultation du satellite II par le satellite III, observée à Sommerfeld, près de Leipzig, par C. Arnoldt, le 1er novembre 1693, (Whiston, *The longitude discovered by the eclipses*, 8°, London, 1738), et une autre du satellite IV, également par le IIIme, vue par Luthmer à Hanovre, le 30 octobre 1822 (*Nature*, 4°, London; vol. XVII, 1877, p. 148).

1e Aanmerking. Het hier genoemde werkje van Whiston bevindt zich in de Universiteits-Bibliotheek te Utrecht, onder de afdeeling P, 8vo, en het nummer 602. Wij hebben het herhaalde malen doorgebladerd, maar er de waarneming van C. Arnoldt niet in vermeld gevonden. Wel prijst de S. in § XVIII de waarneming der onderlinge bedekkingen der wachters aan, merkt op, dat als zij zich bij zulk eene bedekking tegen elkander in bewegen, de relative snelheid „verdubbeld" wordt; vermeldt de klacht van Derham[1]) dat de waarneming dezer bedekkingen door het sterke licht van Jupiter in hooge mate bemoeielijkt wordt; merkt op, dat haar aantal in denzelfden tijd anderhalf maal grooter moet zijn, dan dat der eklipsen; verder dat Lynn in de *Philosophical Transactions* No. 393 de eerste is, die voorgesteld heeft, deze conjuncties, die dikwijls met eene nauwkeurigheid van minder dan eene halve minuut kunnen waargenomen worden[2]), voor lengtebepaling aan te wenden, maar ik vind er geene enkele waarneming eener bedekking in vermeld, evenmin voorspeld.

Het vereischt nauwelijks betoog, dat de conjuncties, die op plaatsen, waarvan men het lengteverschil wil bepalen, zichtbaar zijn, te weinig voorkomen, om voor dat doel van veel beteekenis te zijn. In nauwkeurigheid der waarneming worden zij in alle geval door sterrebedekkingen overtroffen; maar zij kunnen toch wel met de eklipsen der wachters van Jupiter op eene lijn gesteld worden, en zouden, met betrekking tot waarnemingen van eklipsen van Jupiters wachters, in alle geval dit voor hebben, dat zij in weinige minuten een resultaat geven, onafhankelijk van de sterkte der kijkers, hetgeen bij eklipsen pas het geval is als men eene verdwijning met eene wederverschijning kan verbinden.

[1]) In Poggendorff's *Biographisches Wörterbuch*, I, 553, blijkt op den naam van W. Derham niet, waar die klacht te vinden is; zelfs niet, waar hij over de waarneming der Jupiterswachters geschreven heeft.

[2]) Als er maar geene undulatie der lichtbeelden bestond. Zie het slot van aanteekening 4.

2e Aanmerking. Het oorspronkelijke bericht omtrent de waarneming van LUTHMER is door hem aan BODE medegedeeld, die het in het (Berliner) *Astronomisches Jahrbuch* für 1826 blz. 224 plaatste:

„Am 30 Oct. Ab. 6^u 55′ Bedeckung des vierten ⅣTrabanten vom dritten."

Aannemende dat Hannover 9°42′ oostelijk van Greenwich ligt, $= 38^m48^s$, dan is dit $= 6^u\ 16^m\ 12^s$ M. T. Greenwich; ten minste in de vooronderstelling, dat het toen reeds gebruik was, de waarnemingen in middelbaren tijd aan te geven.

In *Nature*, XVII (Nov. 1877—April 1878) blz. 149 (niet 148) vindt men onder de rubriek „*Our Astronomical Column*":

„JUPITER's SATELLITES. — Amongst the recorded phenomena connected with the motions of the satellites of Jupiter are several notices of observed occultations of one satellite by another, and of small stars by one or other of the satellites. [3]) The following cases may be mentioned: — On the night of November 1, 1693, CHRISTOPH ARNOLDT, of Sommerfeld, near Leipzig, observed an occulation of the second satellite by the third at $10^h\ 47^m$ apparent time. On October 30, 1822, LUTHMER, of Hannover, witnessed an occultation of the fourth satellite by the third at $6^h\ 55^m$ mean time.

De redacteur van *Nature* vatte de opgaaf dus ook op als in middelbaren tijd gedaan.

(4) Niet geslaagd zijnde, het verslag dezer waarneming van den heer STANLEY WILLIAMS in de te mijnen dienste staande tijdschriften te vinden, verzocht ik dien heer, die te Hove bij Brighton woont, mij omtrent de plaats, waar ik haar kon vermeld vinden, nader in te lichten. Welwillend antwoordde hij mij den 7^{den} dezer, dat de bijzonderheden zijner waarneming van 27 Maart 1885 in het 41ste deel van den „*English Mechanic*", als ook in den jaargang 1885 van het hoogduitsche tijdschrift „*Sirius*" waren bekend gemaakt.

Maar hij had ook de goedheid mij de oorspronkelijke aanteekeningen betreffende de bewuste waarneming mede te deelen, waaruit ik het volgende ontleen:

Occultation of satellite I by satellite III.

1885 March 27, ... $2^3/_4$ inch refractor. Power 102.

11^h55^m (Greenwich mean time). They are now only *just* free from contact. $_{III}\bigcirc^{I}$, like an elongated star with little more than a black line between the components.

12^h00^m to 12^h04^m. After steady gazing I cannot see any certain

[3]) Jammer dat die „several notices of observed occultations of one satellite by another" niet nader aangeduid worden.

separation between the satellites, and therefore with this instrument aud power first contact must have occurred about 12^h02^m. Definition is very bad, however, and in a larger telescope there probably might still be a small separation between the limbs.

12^h10^m. They now appear as one elongated satellite. At times a trace of the notches is apparent.

12^h20^m. The elongation is now very nearly at right angles to the direction of the motion of the satellites, and is so slight as to be scarcely noticeable in this bad and unsteady definition. I think from the smallness of the elongation that nearly half satellite I must be concealed behind III. In this bad definition it is not possible to say which satellite is in front of the other from the appearance alone.

Het schrijven van den heer STANLEY WILLIAMS bevatte nog de merkwaardige mededeeling, dat ook hij, den 15 Juli 1902, dezelfde conjunctie had waargenomen, die de heer NIJLAND beschreven had. Zijn instrument was toen een $6^1/_2$ eng. duims reflector, met eene vergrooting van 225 maal. Ziehier de door hem medegedeelde bijzonderheden:

1902 July 15, $13^h45^m,2$. Satellites II and III are in contact. The one will occult the other. See diagram III ○ II.

13^h52^m. The satellites form one disc, which has the slightest possible elongation in a north and south direction. Owing to confused seeing this disc always appeared more or less fuzzy, and it is impossible from the appearance alone to say, which satellite is occulting the other.

13^h56^m. The combined disc is considerably elongated now.

$14^h02^m.2$. Satellites II and III in contact as in diagram adjoining II ○ III.

14^h04^m. Satellites clearly separated. The occultation must have been nearly central. II is a little more south now relative to III, than it was before occultation. Possibly the slight elongation noted at 13^h52^m was not real.

The above times are Greenwich mean times. Satellite III was on the farther side of its orbit moving east, II on the near side moving west. As the disc of III is larger than that of II, the phenomenon should be described as a transit of II over or across III, rather than an occultation of one satellite by the other.

N.B. Het ar. midden van $13^h45^m,2$, en $14^h2^m,2$ is $13^h53^m,7$ dus $1^m,1$ minder dan volgens de waarneming van den heer NIJLAND.

(5) Wij verwijzen, omtrent de hier onder volgende getallen, naar den „*Sterrenhemel*", 4e uitgave, 2e deel, blz. 707 en vervolgens.

De aldaar medegedeelde helling der loopbaan van III, werd door TISSERAND in het 4e Deel zijner *Mécanique Celeste*, blz. 62, naar SOUILLART, 4″ grooter, die van de loopbaan van IV 8″ kleiner aangenomen.

Voor 1908,0 hebben wij voor de loopbaan van Jupiter, naar LEVERRIER :

Klimmende Knoop = 99°31′56″,
Helling = 1 18 29 .

Voor den eersten wachter valt het vaste vlak samen met het vlak van den Jupitersequator; het heeft dus in het begin van 1908 eene lengte van den kl. knoop op het baanvlak van Jupiter van 315°33′35″ en eene helling van 3° 4′ 9″.

Verder hebben wij voor de vier vaste vlakken, ten opzichte van het baanvlak van Jupiter :

	Lengte kl. knoop	Helling	
I	315°33′35″	3° 4′ 3″	geldende voor 1908.0.
II	315 33 35	3 3 4	
III	315 33 35	2 59 11	
IV	315 33 35	2 39 57	

Voor de drie eerste wachters is dus voor het gemiddelde vaste vlak de lengte van den kl. knoop op het baanvlak van Jupiter in het begin van 1908: 315°33′35″, de helling 3° 2′ 6″.

Ten opzichte van de respectievelijke vaste vlakken is voor 1908, naar TISSERAND :

	Lengte kl. knoop	Verandering in 1000 dagen	Helling
Voor II	122°,293	— 33°,031	0°28′ 9″
III	26 ,173	— 6 ,955	0 10 44
IV	238 ,982	— 1 ,856	0 13 51

Die hellingen hebben echter slechts eene geringe uitwerking ; op 90° afstand van den klimmenden knoop gaven zij slechts afwijkingen

Voor II van 1″,46,
„ III „ 0″,89,
„ IV „ 2 ,01.

Zoowel de ligging der vaste vlakken als die van de baanvlakken der wachters te hunnen opzichte zijn het, die door de metingen, welke door den heer DE SITTER te Groningen op fotografische platen,

uitgevoerd worden, eene nauwkeurigere bepaling deelachtig zullen worden, terwijl de eventueele waarnemingen van conjuncties der wachters, liefst zelfs van bedekkingen, ook het hare daartoe kunnen bijbrengen, en tot een toets der aangenomene waarden zullen kunnen strekken.

De heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN hebben in de vergadering onzer Afdeeling van Maart j.l. een voorloopig bericht van den heer SITTER omtrent zijne uitmetingen aangeboden [1]). Onze berekeningen waren toen reeds te ver gevorderd om ze geheel terug te houden; toch hopen wij, dat zij, ook naast die uitmetingen, van nut zullen kunnen zijn, daar conjuncties en bedekkingen van wachters onderling met goed gevolg zullen kunnen waargenomen worden op een aantal sterrewachten, die niet voor het nemen der fotografieën zijn ingericht.

Uit de bovenstaande getallen vinden wij voor de ligging van het vaste vlak ten opzichte der ecliptica (voor 1908,0),

$$\text{Klimmende knoop } 336°48'23'' = \Omega,$$
$$\text{Helling } \quad 2\ 7\ 17 = I,$$

Zijn nu $R_{\mathfrak{U}}$, $L_{\mathfrak{U}}$ en β de voerstraal, de lengte en de breedte van Jupiter, $R_{\odot}$, $L_{\odot}$ de voerstraal en de lengte der Aarde, (die van den N. Almanac, verbeterd voor aberratie), dan moet, als het vaste vlak door de Aarde gaat, aan de vergelijking voldaan worden.

$$R_{\mathfrak{U}} \cos\beta \sin(L_{\mathfrak{U}} - \Omega) - R_{\mathfrak{U}} \sin\beta \cot I = R_{\odot} \sin(L_{\odot} - \Omega),$$

hetgeen den 8 Juli 1908, te $19^{u}38^{m},3$ het geval is. Alsdan is namelijk

$$\log R_{\mathfrak{U}} = 0{,}728527 \qquad \log R_{\odot} = 0{,}007179$$
$$L_{\mathfrak{U}} = \quad 141°23'\ 9'',0 \qquad L_{\odot} = 286°40'\ 3'',5$$
$$\beta \ = + \quad 0\ 52\ 26\ ,73 \qquad \Omega \ = 336\ 48\ 52\ ,0$$

en onze vergelijking wordt:

$$1{,}423706 - 2{,}204190 = -0{,}780484$$

Verder vinden wij voor den doorgang van hetzelfde vlak door het zonsmiddelpunt:

$$25 \text{ April } 1908 \text{ te } 18^{u},5 \text{ M. T. Grw.}$$

Voor en na dit laatste tijdstip bestaat de mogelijkheid, dat de

---

[1]) Dat voorloopig bericht kan als een vervolg beschouwd worden van de dissertatie van den heer DE SITTER, door hem den 17en Mei 1901 te Groningen verdedigd, ten titel hebbende: *Discussion of Heliometer-observations of Jupiter's satellites made by sir* DAVID GILL *K.C.B. and* W. H. FINLAY *M.A.* Uitvoeriger mededeelingen zijn ons toegezegd in de *Annals of the Royal Observatory at the Cape of Good Hope.*

heliocentrische conjuncties verduisteringen van den eenen wachter door den anderen veroorzaken; welk onderwerp wij in de tweede afdeeling dezer mededeeling hopen te behandelen.

6. Bessel mat in 1833—39 met den heliometer afstanden van al de wachters tot de beide randen der planeet, maar bovendien positiehoeken van het middelpunt der planeet tot III en IV.

Zijn heliometer was het eerste groote instrument van deze soort uit het instituut van Fraunhofer; het objectief had eene opening van 70,2 par. lijn en een brandpuntsafstand van 1131,4 par. lijn = 7 voet 10 duim 3,4 lijn parijsche maat, (15,84 en 255,22 cM.) De middelbare fout eener enkele afstands-meting, (die echter eigenlijk het midden was van acht instellingen), bleek te bedragen:

voor I	± 0″26,	van het resultaat v. al de metingen,						den middelb. afst. zelven,					± 0″055
„ II	± 0,24,	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	± 0,067
„ III	± 0,31,	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	± 0,042
„ IV	± 0,43,	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	± 0,045
d. gem.	± 0,31,	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	± 0,052

Schur, te Göttingen, gebruikte de heliometers, die, door Merz te Munchen, ten behoeve van de waarneming der overgangen, in 1874 en 1852, van Venus voorbij de zon, waren vervaardigd. De opening der objectieven dezer instrumenten was 34 par. lijnen, dus iets minder dan de helft van die van den heliometer van Koningsbergen, de brandpuntsafstand $3\frac{1}{2}$ voet (113,7 cM.).

Bij deze heliometers geschiedde de aflezing, in plaats van aan twee mikrometertrommels, door een mikroskoop, dat loodrecht gericht was op twee schalen, die aan de objectiefhelften verbonden waren, doch hiermede ging meer tijd verloren, dan met het aflezen van een trommel van een mikroskoop, zooals bij de waarnemingen van Bessel geschiedde; daarom nam Schur, in plaats van het midden van acht, slechts het midden van vier instellingen, hetgeen toch eene volledige meting gaf.

De door Schur gevondene middelbare fouten van elke vergelijking, door één stel van vier metingen kregen, was

voor I ± 0″,34,
„ II ± 0 ,44,
„ III ± 0 ,37,
„ IV ± 0 ,42,

dus gemiddeld ± 0″,39,

hetgeen, in aanmerking genomen den korteren brandpuntsafstand, als vrij gunstig kan aangezien worden.

Het doel, zoowel van BESSEL als van SCHUR, was niet zoozeer de bepaling van de liggingen der wachter-loopbanen, als wel die van de massa van Jupiter.

SCHUR verbeterde nog in verschillende opzichten de door BESSEL uitgevoerde herleidingen zijner metingen ; hierdoor ondergingen ook de middelbare fouten der enkele bepalingen van BESSEL aanmerkelijke verminderingen, en de boven voor deze aangegevene getallen werden nu

voor I ± 0″,21,
„ II ± 0 ,10,
„ III ± 0 ,26,
„ IV ± 0 ,30,

dus gemiddeld ± 0″,24.

GILL en FINLAY maten, zooals gezegd is, niet de afstanden en richtingen der wachters ten opzichte van het middelpunt der planeet, maar, naar het denkbeeld van OTTO STRUVE [1]), ten opzichte van elkander. (Het instrument waarover zij konden beschikken, een heliometer van REPSOLD van 7½ inch (19,05 cm.) opening en ruim 2 meter brandpuntsafstand, liet in volkomenheid de tot nog toe gebruikte instrumenten verre achter zich). Die waarnemingen kunnen veel nauwkeuriger uitgevoerd worden ; zij hebben echter tegen zich, dat de samenstelling en de oplossing der vergelijkingen zooveel omslachtiger en tijdroovender wordt. Zoowel zij beiden, als de heer de SITTER hebben zich daardoor echter niet laten afschrikken. De waarschijnlijke fout van één gemeten afstand werd bevonden te bedragen ± 0,″087, dus aanmerkelijk minder dan die van de metingen van BESSEL. De waarschijnlijke fout der middelbare afstanden, (d. i. der onbekenden) werd zelfs door den heer de SITTER niet grooter dan ± 0″020 of ± 0″021 bevonden.

(7) Wij merken hier nog op dat de heer de SITTER het geraden achtte, eene andere keuze voor de onbekenden te doen. Wel behield hij, voor elken wachter, de lengte in de baan, de helling en den klimmenden knoop ten opzichte van een aangenomen vast vlak, maar niet de excentriciteit, de ligging van het perijovium en de massa, zoodat er voor elken wachter slechts drie elementen als onbekenden overbleven, daarentegen voerde hij correcties van de coëfficiënten van storings- of liever periodieke termen in, die dan nader tot de kennis van de massaas der wachters, van de excentriciteiten en van de ligging der assen moesten leiden, alsmede een tweetal onbekenden, nl. standvastige fouten, die door ieder der waar-

[1]) Zie het eerste bericht van HERMANN STRUVE, in den 1en Supplementband der Pulkowa-waarnemingen, 1e blz. onderaan.

nemers, GILL en FINLAY, bij de metingen konden begaan zijn; in het geheel verkreeg hij ook 29 onbekenden. Het oplossen van ongeveer 400 vergelijkingen met zoo vele onbekenden, is, het vereischt geen betoog, een ontzaggelijk werk, dat toch door vereenigde krachten, ook van andere rekenaars, tot stand gekomen is.

Het mededeelen van verdere bijzonderheden van dezen belangrijken arbeid zou ons echter te ver voeren, maar wij meenden toch de vermelding er van niet te mogen nalaten. Alleen moet ik nog opmerken, dat het niet voldoende is, voor een bepaald tijdstip de ligging der baanvlakken der wachters te bepalen; want zooals reeds boven gezegd is, veranderen zij aanhoudend van stand. Die veranderingen schijnen voldoende voorgesteld te kunnen worden door een geregelden teruggang van de snijlijn (knoopenlijn) met een vast vlak, terwijl de helling dezelfde blijft.

Het is voornamelijk de afplatting van Jupiter, die dezen teruggang veroorzaakt. Maar het is wenschelijk het bedrag van dien teruggang door waarnemingen vast te stellen, terwijl dan door dat bedrag dat der afplatting gevonden wordt. De ligging der baanvlakken moet dus op verschillende tijdpunten bepaald worden; ook hierin heeft zich de heer de SITTER verdienstelijk gemaakt, zie zijne boven reeds genoemde mededeeling, aangeboden door den heeren KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN in onze vergadering van Maart j.l.

(8) Hetzelfde boekdeel, dat de ecliptische tafels van DAMOISEAU bevat, die alleen op den titel vermeld zijn, behelst ook, in een tweede gedeelte, tafels *„pour trouver les configurations des satellites de Jupiter."*

Wij hebben wel de wenschelijkheid overwogen, deze tafels niet ongewijzigd voor onze berekeningen te gebruiken, en daartoe ook kennis genomen van de onderzoekingen van SOUILLART, ADAMS, MARTH, GILL, FINLAY, en de SITTER, maar het bleek ons, dat onze arbeid dan in hooge mate vergroot zou worden. Wij zouden eerst nieuwe elementen voor al de wachters moeten vaststellen en nieuwe tafels berekenen, en dit zou een belangrijk oponthoud gegeven hebben, dat voor ons doel, de sterrekundigen op de mogelijke, in 1908 waar te nemen, conjuncties voor te bereiden, niet noodzakelijk zou geweest zijn.

Wij hebben dus de tafels van DAMOISEAU voor onze berekening gebruikt, maar hebben eerst nagegaan in hoever zij de werkelijk waargenomene conjuncties teruggaven; wij zullen zoowel mededeelen, welk verschil de tafels opleverden in de elongaties, x en x', der beide wachters, uitgedrukt in den straal van Jupiter, als hoeveel de

conjunctie, naar de tafels, vroeger of later plaats heeft dan volgens de waarneming.

Waarnemer	Datum	Bedekking van	door	Fout	Relatieve beweging per uur	Correctie der Tafel	$y'-y$
				r	r	m	r
Fauth	1902 Oct 7	II_v	I_n	0,025	1,278	+ 1,2	+ 0,04
»	» » 23	III_v	II_n	0,02	1,130	+ 1,1	+ 0,08
»	» Nov. 10	I_v	III_n	0,00	0,883	0,0	+ 0,13
»	» Dec. 24	IV_v	I_n	0,10	1,089	— 5,5	+ 0,00^5
»	1903 Jan. 14	II_n	III_n	0,11	0,344	—19,2	— 0,05
Nijland	1902 Juli 15	III_v	II_n	0,08	0,751	+ 6,4	— 0,01
Stanley Williams	» » »	»	»	0,07	0,751	+ 5,3	— 0,01
» »	1885 Maart 27	I_n	III_n	0,00	0,292	0,0	+ 0,01

De waarneming van Luthmer te Hannover, van den 30 October 1822 heb ik hier niet opgenomen; de berekening geeft:

	Jovic. Lengte	Amplitude	x	y en y'
III	10^t,26°,77	8^t,22°,25	— 15^r,21	+ 0^r,18
IV	9 6,74	7 2,22	— 14, 40	— 0, 74
		Verschil	+ 0^r,81	+ 0^r,92

Er is dus in de amplituden een verschil van 0^r,81, $= 0{,}81 \times$ $\times 18'',37 = 14'',9$ en in de breedten van 0^r,92 $= 16'',9$. Waarschijnlijk is de waarneming met onvoldoende hulpmiddelen verricht, want zoo groot kan de fout der tafels van Damoiseau in 1822 niet geweest zijn. Dat de breedten y en y' ongelijke teekens hebben, is daaruit te verklaren, dat de klimmende knoop van het vaste vlak 10^{t}14°,37 was, liggende tusschen de beide jovicentrische lengten in.

Daar de beide wachters denzelfden kant opgingen, was de verandering per uur van hunnen afstand ook gering, n.l. 0^r,280; om de 0^r,81 verschil te vernietigen, zouden dus nog bijna 3 uren noodig geweest zijn.

Maar de overige waargenomene conjuncties geven toch eene voldoende nauwkeurigheid, zoodat het te verwachten is dat de mede te deelen tafel aan haar doel zal beantwoorden.

Als eene andere proef heb ik twee bovenste conjuncties en de tusschenliggende onderste conjunctie van II, die door den *Nautical*

Almanac van 1902 zijn aangegeven, door het tweede gedeelte van DAMOISEAU nagerekend. Ik vond de tijdstippen een weinig vroeger, en wel:

de bovenste conjunctie van		10 Juli $10^u46^m,9$	M.T. Grw.	$0^m,7$,
„ onderste	„ (het midden van in- en uitgang van een voorbijgang)	16 Juli $5^u40^m,0$	„ „	$0^m,3$,
„ bovenste	„	17 Juli $23^u54^m,4$	„ „	$0^m,7$,

dus alle drie nog geene minuut.

Daar nu de conjuncties in den *Nautical Almanac* met de *tables écliptiques* van DAMOISEAU berekend zijn — (in aanmerking nemende eenige geringe, door ADAMS aangegevene verbeteringen, —) zoo zijn die verschillen alleen daaraan te wijten dat in het tweede gedeelte van DAMOISEAU alleen de hoofdtermen der vereffeningen en storingen zijn opgenomen.

Even nauwkeurig gaven de tafels voor I de bovenste geocentrische conjunctie van 1 Januari 1908, te $14^u4^m,2$ M.T. Grw. = 2 Januari $2^u13^m,55$ Burgerlijke Tijd te Parijs terug; de fout bedroeg hier slechts $0°,07$, lineair $0^r,01$, die de wachter in $0^m,5$ doorloopt.

(Zie verder over de in het tweede gedeelte van de tafels van DAMOISEAU opgenomene termen het derde aanhangsel hierachter.)

De Heer STANLEY WILLIAMS maakt in zijn brief nog gewag van eene zeldzame waarneming door hem, en tevens ook door den Spaanschen waarnemer J. COMAS te Valls, (bij Tarragona), den 14 Augustus 1891 gedaan, n.l. van het samenvallen en later weer uit elkander gaan der schaduwen, op de planeet, van twee wachters, waaruit hij besluit dat er eene eklips moet hebben plaats gegrepen. Wij zullen deze verschijnselen in het tweede gedeelte dezer mededeeling behandelen.

(9) Ziehier de tafel, die voor deze berekening gediend heeft. De eenheid is de straal van Jupiter, 18″37. SOUILLART zegt in de papieren van DAMOISEAU vermeld gevonden te hebben, dat deze dit getal aan ARAGO ontleend heeft. ARAGO moet het, volgens HOUZEAU, met een dubbele-beelden mikrometer, (uitvinding van ARAGO zelf, waarvan de sterrewacht te Utrecht een exemplaar bezit), bepaald hebben, maar de bijzonderheden der metingen zijn niet bekend. Het getal is kleiner dan hetgeen door andere metingen gevonden is, zie b.v. HOUZEAU, blz. 647—650; SEE, *Astron. Nachr.* N°. 3670 (15 Aug. 1900).

Uurverandering der elongatie x in functie van de amplitude.

+			I		II		III		IV		—			
			r		r		r		r					
0t	0°	0t(12)	0°	0,895		0,708		0,560		0,420		6t	0°	6t	0m
					4		3		2		2				
	5	11	25	0,891		0,705		0,558		0,418			5	5	25
					10		8		7		4				
	10	11	20	0,881		0,697		0,551		0,414			10	5	20
					17		14		10		8				
	15	11	15	0,864		0,683		0,541		0,406			15	5	15
					23		18		15		11				
	20	11	10	0,841		0,665		0,526		0,395			20	5	10
					30		23		18		14				
	25	11	5	0,811		0,642		0,508		0,381			25	5	5
					36		29		23		17				
1	0	**11**	0	0,775		0,613		0,485		0,364		7	0	**5**	0
					42		33		26		20				
	5	10	25	0,733		0,580		0,459		0 344			5	4	25
					48		37		30		22				
	10	10	20	0,685		0,543		0,429		0,322			10	4	20
					53		42		33		25				
	15	10	15	0,632		0,501		0,396		0,297			15	4	15
					57		46		36		27				
	20	10	10	0,575		0,455		0,360		0,270			20	4	10
					62		49		39		29				
	25	10	5	0,513		0,406		0,321		0,241			25	4	5
					66		52		41		31				
2	0	**10**	0	0,447		0,354		0,280		0,210		8	0	**4**	0
					69		55		43		32				
	5	9	25	0,378		0,299		0,237		0,178			5	3	25
					72		57		45		34				
	10	9	20	0,306		0,242		0,192		0,144			10	3	20
					75		59		47		35				
	15	9	15	0,231		0,183		0,145		0,109			15	3	15
					76		60		48		36				
	20	9	10	0,155		0,123		0,097		0,073			20	3	10
					77		61		48		36				
	25	9	5	0,078		0,062		0,049		0,037			25	3	5
					78		62		49		37				
3	0	**9**	0	0,000		0,000		0,000		0,000		9	0	**3**	0

Wij zullen ten slotte, zie hierachter blz. 209 en 210, twee voorbeelden der berekening mededeelen; bij het ééne schijnen de wachters elkander te gemoet, bij het andere denzelden kant op te gaan.

1e Aanhangsel. *Welke is de langste duur der verschillende bedekkingen van den eenen wachter door den anderen?*

Wij hebben zoo even gezien dat het kleine verschil der elongaties van 0',11 (2''0) eerst in den tijd van $19^m,2$ tot nul herleid werd; dit kwam door de geringheid der relatieve uurbeweging der wachters. Maar als de uurbewegingen, die wij u en u' zullen noemen, der beide wachters *geheel* gelijk zijn, dan is in de breuk $\frac{x' - x}{u' - u}$ de noemer $= 0$.

Het geval komt dan overeen met dat van den „Stilstand van Venus"; het is een overoud vraagstuk, de tijden daarvan te berekenen.

Stel van twee wachters de voerstralen $= r$ en r', de amplituden $= \theta$ en θ', dan is bij de bedekking

$$r \sin \theta = r' \sin \theta'.$$

De voorwaarde van gelijke schijnbare verandering der elongatie geeft nu

$$r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = r' \cos \theta' \frac{d\theta'}{dt}.$$

Maar, als T en T' de siderische omloopstijden voorstellen, is

$$\frac{d\theta}{dt} : \frac{d\theta'}{dt} = \frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = \frac{1}{r^{3/2}} : \frac{1}{r'^{3/2}},$$

derhalve:

$$r^{-1/2} \cos \theta = r'^{-1/2} \cos \theta',$$

dus:

$$\cos^2 \theta = \frac{r}{r'} \cos^2 \theta' = \frac{r}{r'} - \frac{r}{r'} \sin^2 \theta'.$$

Hierbij geteld:

$$\sin^2 \theta = \frac{r'^2}{r^2} \sin^2 \theta'$$

verkrijgt men:

$$1 = \frac{r}{r'} + \left\{ \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{r}{r'} \right\} \sin^2 \theta',$$

derhalve, $\frac{r'}{r} = \mu$ stellende:

$$\sin^2 \theta' = \frac{1 - \frac{1}{\mu}}{\mu^2 - \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu - 1}{\mu^3 - 1} = \frac{1}{\mu^2 + \mu + 1}$$

en

$$\sin^2 \theta = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \mu + 1}.$$

De gelijkheid van de uurveranderingen der beide elongaties geldt natuurlijk slechts voor een oogenblik; spoedig komt er ongelijkheid en gaan de beide wachters toch uit elkander; het kan echter lang duren eer dit door een kijker merkbaar wordt, en het merkwaardige is daarbij, dat in dit geval de wachters niet elkaar voorbijgaan, maar dat zij na de conjunctie ten opzichte van elkander denzelfden stand aannemen als vóór de conjunctie.

Nemen wij als voorbeeld aan, eene conjunctie onder de bedoelde

omstandigheden, van I en II, terwijl de amplituden tusschen 0 en 3 teekens zijn, en de wachters zich, uit de aarde gezien, dus beide, (als men het hoofd naar de noordpool des hemels gekeerd heeft) links van de planeet bevinden, en zich ook beide van de planeet verwijderen. Vóór de conjunctie bevindt zich I rechts van II, de beweging van I is echter sneller dan die van II; bij eene amplitude van 44°39′, terwijl die van II 26°14′ bedraagt, bereikt I II, maar tevens zijn de schijnbare snelheden nu gelijk. De snelheid van I vermindert echter bij het naderen der grootste elongatie aanmerkelijk, meer dan die van II, die eene veel kleinere amplitude bezit; het gevolg is, dat na de conjunctie I achterblijft, d. i. wederom rechts van II staat, even als te voren.

Dit geval is een overgang tusschen twee andere gevallen. 1°. Als I onder dezelfde omstandigheden iets verder vooruit is, (grootere amplitude heeft) dan gaat hij II voorbij, maar wordt toch later door II ingehaald, die dan, uit de aarde gezien, achter hem om voorbijgaat. 2°. Is echter I iets minder vooruit, dan blijft hij voortdurend rechts van II, terwijl de afstand I—II wel een minimum bereikt maar niet $= 0$ wordt.

Om nu de vraag te beantwoorden, hoe lang de bedekking duren zal, nl. van de eerste buitenste aanraking, moet men bekend zijn met de schijnbare stralen der wachters zelven. Deze zijn bij nacht door de irradiatie grooter dan bij dag, [1]) zooals verscheidene waarnemers bevonden hebben; daar de waarnemingen op de wachters van Jupiter bijna uitsluitend bij nacht genomen worden, zullen wij de voor den nacht geldende schijnbare stralen aannemen, en wel het midden tusschen hetgeen, volgens See, andere waarnemers gemiddeld gevonden hebben en hetgeen hij zelf door talrijke metingen met den reuzenkijker te Washington gevonden heeft. Bij de herleiding tot de bij deze berekeningen gebruikte eenheid. nl. den straal van Jupiter's equator, is deze naar Damoiseau $= 18''{,}37$ aangenomen.

	Middellijn		Straal
I	$1''{,}07 = 0^r{,}058$		$0^r{,}029$
II	0 ,95	0 ,052	0 ,026
III	1 ,56	0 ,085	0 ,0425
IV	1 ,41	0 ,076	0 ,038

[1]) Zie o. a. T. J. J. See, Observations of the Diameters of the Satellites of Jupiter, and of Titan, the principal Satellite of Saturn, made with the 26 inch Refractor of the U. S. Naval Observatory, Washington; 19 Oct. 1901. *Astr. Nachrichten* N°. 3764, (21 Jan. 1902).

derhalve :

	Som der middellijnen	Som der stralen
I + II . .	0^r,110	0^r,055
I + III . .	0 ,143	0 ,0715
I + IV . .	0 ,134	0 ,067
II + III . .	0 ,137	0 ,0685
II + IV . .	0 ,128	0 ,064
III + IV . .	0 ,161	0 ,0805

Voor de middelbare voerstralen zullen wij in deze berekening twee decimalen meer nemen dan DAMOISEAU in zijne tafels heeft, wij zullen namelijk de waarden aannemen, die SOUILLART in DAMOISEAU's papieren gevonden heeft, (SOUILLART, 2e verhandeling, blz. 10). [1])

I 6,0491,
II 9,6245,
III 15,3524,
IV 27,0027.

Het resultaat van deze berekening is nu, dat er verloopt : tusschen de eerste aanraking en de centrale bedekking bij

I en II	I en III	I en IV	II en III	II en IV	III en IV
1^u,324,	1^u,245,	1^u,103,	2^u,263,	1^u,774,	3^u,725;

tusschen de centrale bedekking en de tweede aanraking :

1^u,204,	1^u,161,	1^u,059,	2^u,190,	1^u,767,	3^u,725,

dus te samen

2^u,528,	2^u,406,	2^u,162,	4^u,453,	3^u,541,	7^u,450,

d.i. :

2^u32^m [2])	2^u24^m,	2^u10^m,	4^u27^m,	3^u32^m,	7^u27^m.

Toch zijn dit nog niet de maxima van het tijdsverloop, dat de twee wachters zich als één hemellicht voordoen. Want het geval is denkbaar dat de kleinste afstand gelijk wordt aan $-(r + r')$,

[1]) Volgens SOUILLART heeft DAMOISEAU deze getallen aldus gevonden: Hij nam den middelbaren afstand van IV, naar de bepaling van POUND, aan = 496",0, den straal van Jupiter = 18",37 ; door deeling vond hij dus $r_{IV} = 27{,}00102834$; de middelbare afstanden der andere wachters vond hij door middel der siderale omloopstijden, onder toepassing der 3e wet van KEPPLER. Maar bij die middelbare afstanden telde hij de constante termen op, die de storende kracht bij de voerstralen voegt, (voor IV 0,00169832) en zoo kreeg hij 27,00272666.

Hiertoe veroorloof ik mij de opmerking, dat 496"0 : 18",37 niet is 27,00102834 maar 27,000544366. Gelukkig, dat die 4e, 5e, 6e, 7e en 8e decimaal op onze berekeningen, en vermoedelijk ook op die van SOUILLART, geen merkbaren invloed hebben ; zie overigens over dergelijke getallen met vele decimalen het hieronder volgende, 2e aanhangsel.

[2]) Den 4en Juni 1908 moet, volgens de berekening, zie de tabel hierachter, eene dergelijke conjunctie van I en II plaats hebben.

d. i. dat er, tusschen twee centrale conjuncties in, eene aanraking aan de andere zijde plaats heeft. De duur wordt dan nog zeer nabij met $\sqrt{2}$ vermenigvuldigd, en wordt dus:

voor I en II,	I en III,	I en IV,	II en III,	II en IV,	III en IV
$3^u,574$,	$3^u,402$,	$3^u,057$,	$6^u,296$,	$5^u,006$,	$10^u,43$,

d. i.:

3^u34^m,	3^u24^m,	$3^u\ 3^m$,	6^u18^m,	$5^u\ 0^m$,	10^u26^m.

Deze cijfers gelden alleen voor die zeldzaam voorkomende gevallen, waarbij 1°. de bedekking centraal is, en 2°. de snelheid in de verandering der elongatie, voor beide wachters gelijk of nagenoeg gelijk is. Zoodra er eenig breedteverschil bestaat, zijn de tijdsverloopen, dat de beide wachters zich als één hemellicht vertoonen, natuurlijk geringer.

2de Aanhangsel. *Onderzoek naar de onzekerheid, die in de bepaling der synodische omloopstijden der wachters bestaat.*

Delambre zegt in de inleiding tot zijne in 1818 uitgegevene *Tables Ecliptiques*, blz. XIX: „Nous n'avons aucune observation d'éclipse antérieure à 1660". Aannemende nu, dat het tijdsverschil tusschen de eerste waargenomene eclips in 1660 en de laatste in 1816, twee jaar vóór de uitgaaf dier tafels, (de volgende in 1660, en de voorgaande in 1816 ook in rekening nemende) nog eene onzekerheid toelaat, voor de vier wachters, van 20, 30, 40 en 60 seconden, hetgeen eer te gunstig dan te ongunstig zal zijn, en dit deelende door het aantal synodische omloopen in 156 jaren, nl. 32193, 16032, 7951 en 3401, dan verkrijgt men voor de onzekerheid van een enkelen omloop

voor I	voor II	voor III	voor IV
$0^s,00062$,	$0^s,00188$,	$0^s,0050$,	$0^s,0176$.

Als Delambre die omloopstijden dus in 9 decimalen van sekunden geeft, dan moet men daaraan niet te veel waarde hechten.

Toen Damoiseau, 20 jaren na Delambre, nieuwe ecliptische tafels [1])

[1]) De tafels van Delambre en Damoiseau waren voornamelijk bestemd om te dienen bij het voorspellen, in de sterrekundige jaarboeken, van de eclipsen der wachters, namelijk door de schaduw van Jupiter. Daarom heeft hij, even als Delambre, al die termen der lengtestoringen vereenigd, die tijdens de opposities der wachters hetzelfde argument hebben, ook al verschillen die argumenten overal elders in de loopbaan. Om derhalve tafels te berekenen, waaruit de lengte en voerstralen der vier wachters op alle punten hunner loopbanen kunnen afgeleid worden, zooals Bessel ze in zijne *Astronomische Untersuchungen* en Marth ze in de *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. LI, (1891) gegeven heeft, was het noodzakelijk deze termen weer van elkander te scheiden.

voor de Jupiters-wachters uitgaf, nam hij den synodischen omloopstijd van I onveranderd aan, maar aan die der volgende bracht hij de volgende verbeteringen aan:

$$\begin{aligned} \text{II} &+ 0^s,005\,127\,374, \\ \text{III} &+ 0\,,029\,084\,25, \\ \text{IV} &- 0\,,092\,654\,834, \end{aligned}$$

die nog respectievelijk bijna 3, bijna 6 en ruim 5 maal meer bedragen dan de door ons berekende onzekerheden. Maar al vergroot men het aantal tusschenliggende jaren van 156 tot 176, dan worden de door ons geschatte onzekerheden slechts met ongeveer $\frac{1}{9}$ van haar bedrag verminderd, zoodat ons besluit is, dat van die omloopstijden slechts als zeker bepaald kunnen beschouwd worden,

die van I : 3 decimalen van sekunden,
„ „ II, III en IV 2 decimalen „ „

De Nautical Almanac, die bij het mededeelen der bovenste conjuncties der wachters ook de synodische omloopstijden opgeeft, bepaalt zich wijselijk slechts tot drie decimalen. Het aanzetten van 9 decimalen kan dus vooralsnog gerust astronomische humbug genoemd worden, waarvan nog wel enkele andere voorbeelden aangehaald kunnen worden, b.v. de uit een vroeger tijdvak welbekende 20″4451 voor de constante der aberratie en 8″57116 voor de parallaxis der zon!

3e Aanhangsel. *Beteekenis der vereffeningen (equaties), die in het 2de gedeelte van de tafels van* Damoiseau *zijn opgenomen.*

Wij hebben boven, blz. 196, naar het 3e aanhangsel verwezen, om aan te geven, welke vereffeningen voor elken wachter in de tweede afdeeling der tafels van Damoiseau waren opgenomen. Wij zullen hieraan nu voldoen; daarbij beteekenen U, u_o, u_{I}, u_{II}, u_{III} en u_{IV} de middelbare lengten van de zon, van Jupiter en der vier wachters; π_o de perihelielengte van Jupiter, π' van de Aarde, π_{III} en π_{IV} de perijovia van III en IV; Π de lengte van den klimmenden knoop van den equator van Jupiter op zijn baanvlak, eindelijk Λ_{II}, Λ_{III} en Λ_{IV} de lengten der klimmende knoopen van II, III en IV ieder op hun eigen vast vlak.

Om de volgende opgaven te kunnen verstrekken, hebben wij voor elke vereffening, de dagelijksche beweging van het argument ontleend

aan de tafels van de tweede afdeeling van DAMOISEAU, en het gevonden bedrag vermenigvuldigd met den synodischen omloopstijd, uitgedrukt in dagen, het daardoor verkregen product vergeleken met den factor waarmede in de eerste afdeeling, blz. (III), (V), (VII) en (VIII) de letter i (het aantal synodische omloopen) vermenigvuldigd is.

Die dagelijksche bewegingen zijn voor verscheidene vereffeningen van II, III en IV zoo na aan elkander gelijk, dat men, om ze te vinden, die, welke in een groot tijdvak, bijv. 10 jaar plaats hebben, uit de tafels moet ontleenen, (daarbij goed lettende op het aantal omwentelingen), en deze dan door het aantal dagen (10 jaren = 3652 of 3653 dagen) moet deelen. Men verkrijgt dan, na vermenigvuldiging van dit quotiënt met den synodischen omloopstijd in dagen, 360° + eene breuk; die 360° tellen niet meê; de breuk is de factor van i; en men herkent daardoor, met welke vereffening men te doen heeft. In de voorrede van de tweede afdeeling van DAMOISEAU zoekt men hieromtrent te vergeefs naar eenige inlichting.

I. Voor dezen wachter zijn vijf termen opgenomen. N°. 1, met eene amplitude van 1°,16, is de vereffening voor de snelheid van het licht, het argument hiervoor is $U - u_0$.

N°. 2, (amplitudo 0°,29), is de vereffening, veroorzaakt door de ellipticiteit van Jupiter's loopbaan; argument de middelbare anomalie van Jupiter $u_0 - \pi_0$.

N°. 3 is 180° + de middelbare anomalie der Aarde, $U - \pi'$; daarmede, in vereeniging met N°. 1, d.i. het verschil in lengte tusschen de zon en Jupiter, wordt in de tafel met dubbelen ingang IX één term van de geocentrische breedte van den wachter gevonden.

N°. 4, met eene amplitude = 0,°45, geeft de storing aan, die I van II ondervindt. Het argument is $u_{\mathrm{I}} - u_{\mathrm{II}}$.

N°. 5, (amplitude 3°,07), geeft de jovicentrische breedte van I, waarmede de 2e term van de geocentrische breedte gevonden wordt.

II. Zeven termen. N°. 1, 2 en 3 hebben dezelfde argumenten als bij I; van N°. 1 en 2 zijn de amplituden half zoo groot als bij I. De breedteterm, die door 1 en 3 in tafel IX gevonden wordt, is uit den aard der zaak voor alle wachters gelijk.

N°. 4, (amplitude 1°,06), geeft de storing aan, die II van III ondervindt. Het argument is $u_{\mathrm{II}} - u_{\mathrm{III}}$.

N°. 5, 6 en 7 dienen voor de breedte.

N°. 5, (amplitude 3°,05), heeft tot argument $u_{\mathrm{II}} - \pi_{\mathrm{IV}}$;

N°. 6, („ 0 ,47), „ „ „ $u_{\mathrm{II}} - \Lambda_{\mathrm{II}}$;

N°. 7. („ 0 ,03), „ „ „ $u_{\mathrm{II}} - \Lambda_{\mathrm{III}}$.

III, Negen termen. N°. 1, 2 en 3 zijn dezelfde als bij I en II; de amplituden van N°. 1 en N°. 2 zijn 0°,29 en 0°,07.

N°. 4, (amplitude 0°,07), heeft hetzelfde argument als N°. 4 bij II, maar geeft de storing aan, veroorzaakt door II.

N°. 5, (amplitude 0°,15), is de middelpuntsvereffening; argument $u_{III}—\pi_{III}$.

N°. 6, (amplitude 0°,04), heeft tot argument $u_{III}—\pi_{IV}$, en geeft dus eene storing aan van III, afhangende vau de perihelielengte van IV.

N°. 7, 8 en 9, met amplituden van 2°,98, 0°,18 en 0°,03, dienen voor de breedte. De argumenten zijn respectievelijk $u_{III}—\pi$, $u_{III}—\Lambda_{III}$ eu $v_{III}—\Lambda_{IV}$.

IV. Zeven termen.

N° 1, 2 en 3 even als bij de vorige wachters.

N° 4, (amplitude 0°,83), is de middelpuntsvereffening, argument $u_{IV} — \pi_{IV}$.

N° 5, 6 en 7 dienen voor de breedte. N° 5, (amplitude 2°,64) hangt van de middelbare anomalie van Jupiter af; het argument is dus $u_0 — \pi_0$.

N° 6, (amplitude 0°,24), van het argument van breedte van den wachter zelf; argument $u_{IV} — \Lambda_{IV}$.

N° 7, (amplitude 0°,04), is eene geringe storing, door III veroorzaakt, en heeft tot argument $u_{IV} — \Lambda_{III}$.

Wij zullen nu de tabel laten volgen der door ons berekende conjuncties.

De eerste kolom bevat het rangnummer.

De tweede kolom geeft het tijdstip der conjunctie aan, afgerond tot de naaste minuut, en uitgedrukt in burgerlijken tijd te Parijs. Deze tijd wordt van middernacht af geteld, en is door Damoiseau in zijne tafels gebruikt, zoodat de kolom het onmiddellijke resultaat der berekening aangeeft. In de gevallen, dat er juist eene halve minuut kwam, is deze ook aangezet. Door hiervan $12^u\ 9^m$, des noods $12^u\ 9^m,35$ af te trekken, werd de middelbare tijd te Greenwich gevonden, die in de tweede kolom is aangegeven.

De 4e en 5e kolom geven den bedekten en den bedekkenden wachter aan; uit de letters *v* en *n*, achteraan kan men zien of de wachter *veraf* of *nabij* is, (zie boven, blz. 179). De wachter is veraf, als de amplitude tusschen 9^t en 3^t is, nabij, als zij tusschen 3^t en 9^t is. Verder beteekent *o e* oostelijke elongatie, als de ampli-

tude zeer nabij 3 teekens is en *w e* westelijke elongatie, als de amplitude weinig van 9 verschilt.

Bij de conjunctie zijn de elongaties, geteld langs de loopbaan van Jupiter, voor beide wachters gelijk; men vindt ze in eene volgende kolom. Is de elongatie +, dan staat, voor een beschouwer in het noordelijke halfrond, de wachter in een rechtzienden kijker links, dus voor een omkeerenden kijker, zooals steeds voor de beschouwing der hemellichten gebruikt wordt, rechts van de planeet.

De drie volgende kolommen geven de ordinaten der beide wachters en hun verschil aan; noord is hier positief.

De 10e kolom bevat den duur, die de verduistering hebben zou, als de conjunctie centraal was. In enkele gevallen, (bij N°. 20, 23, 30, 48, 53 en 64), vonden wij $y' = y$, derhalve $y' - y = 0$, en als de tafels juist zijn, zijn dus deze conjuncties centraal. Maar bij de beproeving der door de heeren Fauth, Nijland en Stanley Williams waargenomene conjuncties kwam het verschil der y's niet volkomen zoo uit, als de waarnemers hadden aangegeven, en er behoeft slechts een klein verschil te zijn, om den duur der eventueele bedekking aanzienlijk te verminderen. Om dus niet eene kolom te geven, gevuld met cijfers, die kans hebben, door de waarneming gelogenstraft te worden, heb ik den wezenlijken duur, naar de berekening, weggelaten.

Boven, (blz. 183) is opgemerkt, dat zoo al, eene conjunctie voor eene bepaalde plaats, slechts voor eene korte tijdruimte, nl. tusschen den ondergang der zon, en dien van Jupiter, zal zichtbaar zijn. Hieruit volgt, dat, zal de lijst van eenig nut zijn, de sterrewachten, over den geheelen aardbodem verspreid, zullen dienen samen te werken. Om dit te bevorderen dient de laatste kolom, waarvan elke regel eene sterrewacht aangeeft, waar de op dien regel aangegevene conjunctie zichtbaar is. De sterrekundigen op andere sterrewachten, in de nabijheid, zullen dus ook wel doen, de mogelijkheid der zichtbaarheid te onderzoeken, en zich, bij gunstig resultaat van dit onderzoek, op de waarneming voor te bereiden.

RESULTATEN.

Geocentrische conjuncties der wachters onderling in Juni en Juli 1908.

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Bedekte wachter	Bedekkende wachter	$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
1	1 Juni 5u55m	31 Mei 17u46m	I_n	II_n	+2r18	−0r16	−0r12^5	+0 03^5	45m	Mt. Hamilton
2	1 » 18 25	1 Juni 6 16	I_{we}	II_n	−6,03	+0,31	+0,29	−0,02	11	Kaap
3	2 » 1 55	1 » 13 46	I_v	IV_n	−3,15	+0,18	−0,12	−0,30	7	Washington
4	2 » 13 16	2 » 1 7	III_v	II_v	−8,51	+0,51	+0,38	−0,13	60	Madras, H. K.
5	2 » 14 0	2 » 1 51	III_v	IV_n	−8,16	+0,51	+0,13	−0,38	11	Madras, H. K.
6	2 » 14 4,5	2 » 1 55	II_v	IV_n	−8,20	+0,37	+0,13	−0,24	10	Madras, H. K.
7	2 » 21 10	2 » 9 1	III_v	II_v	−4,54	+0,31	+0,20	−0,11	41	Utrecht
8	3 » 3 15	2 » 15 6	II_v	I_n	−0,33^5	0,00	−0,03	−0,03	4	Tevens ☌ ♃
9	3 » 3 50	2 » 15 41	III_v	I_n	−0,87	+0,15	0,00	−0,15	6	» » »
10	4 » 14 46	4 » 2 37	I_n	II_n	x=+5,01^5 x'=+5,07	−0,29	−0,25^5	+0,03^5	Twee aanrakingen aan denzelfden kant.	
„	4 » 16 0	4 » 3 51	»	»	4,34				II komt juist tot de centrale conjunctie,	
„	4 » 17 15	4 » 5 6	»	»	x=+3,54 x'=+3,48^5	−0,23	−0,19^5	+0,03^5	keert dan weer om.	
	De wachters zijn hier ongeveer 2½ uur met elkander verbonden.									
11	5 » 7 51	4 » 19 42	I_{we}	II_v	−6,05	+0,33	+0,28	−0,05	12	Sydney
12	6 » 16 24	6 » 4 15	II_v	I_n	−0,48	0,00	−0,01	−0,01	4	Tevens ☌ ♃
13	6 » 18 11,5	6 » 6 2	II_v	III_n	+0,82	−0,06	−0,17	−0,11	6	» » » en II geëcl.
14	9 » 5 6	8 » 16 57	IV_v	II_v	−9,19	+0,59	+0,43	−0,16	13	Mt. Hamilton
15	10 » 4 26	9 » 16 17	IV_v	I_n	+0,29	+0,14	−0,05^5	−0,19^5	6	Tevens ☌ ♃
16	10 » 5 23	9 » 17 14	II_v	I_n	−0,58	+0,02	−0,01	−0,03	5	» » »
17	10 » 6 28	9 » 18 18,5	III_v	I_n	−1,54	+0,15	+0,05	−0,10	6	Mt. Hamilton
18	11 » 3 0	10 » 14 51	IV_v	III_v	+9,01	−0,32	−0,52	−0,20	183	Washington
19	12 » 10 34	11 » 22 25	I_{we}	II_n	−6,03	+0,32	+0,28	−0,04	11	Wellington
20	13 » 18 46,5	13 » 6 37	II_v	I_n	−0,82	+0,01^5	+0,01^5	0,00	4	☌ ♃
21	13 » 21 37	13 » 9 28	II_v	III_n	+1,31	−0,07	−0,16	−0,09	6,5	II verduistert (Utrecht)
22	15 » 23 55	15 » 11 46	I_{we}	II_n	−5,99	+0,32	+0,29	−0,03	16	(Atl. Oceaan)
23	17 » 7 53	16 » 19 44	II_v	I_n	−0,92	+0,02	+0,02	0,00	4	☌ ♃

	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelhare tijd te Greenwich	n = nabij v = veraf: Bedekte wachter	Bedekkende wachter	$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
4	17 Juni 9u39m	16 Juni 21u30m	III_v	I_n	−2r44	+0r18	+0r10	−0r08	6m	Wellington
5	17 » 20 47	17 » 8 38	II_v	IV_n	+7,33	−0,37	−0,52	−0,15	9	Utrecht
6	18 » 0 33	17 » 12 24	III_v	IV_n	+5,75	−0,28	−0,44	−0,16	10	(Atl. Oceaan)
7	18 » 7 30	17 » 19 21	I_v	IV_n	+2,86	−0,16	−0,30	−0,14	6,5	Sydney
8	18 » 8 28	17 » 20 18	III_v	II_{oe}	+9,52	−0,51	−0,45	+0,06	15	Sydney
9	19 » 13 13	19 » 1 4	I_{we}	II_n	−5,94	+0,32	+0,29	−0,03	9,5	Hong Kong
0	20 » 21 3	20 » 8 54	II_v	I_n	−1,07	+0,02	+0,04	+0,02	4	Utrecht
1	21 » 1 3	20 » 12 54	II_v	III_n	+1,79	−0,11	−0,15	−0,04	6,5	II verduisterd.
2	21 » 11 54	20 » 23 45	I_v	III_n	−4,21	+0,24	+0,18	−0,06	7	Hong Kong
3	23 » 2 32	22 » 14 23	I_{we}	II_n	−5,90	+0,32	+0,29	−0,03	9	Washington
4	24 » 10 13	23 » 22 4	II_v	I_n	−1,22[5]	+0,03	+0,01	−0,02	4	Sydney
5	24 » 12 37	24 » 0 27	III_v	I_n	−3,21	+0,20	+0,16	−0,04	6,5	Hong Kong
6	26 » 11 17	25 » 23 8	IV_v	I_n	−5,60	+0,35	+0,30[5]	−0,04[5]	11	Hong Kong
7	26 » 13 43.5	26 » 1 34	IV_v	II_n	−4,61	+0,31	+0,25	−0,06	7	Madras, H. Kong
8	26 » 15 49	26 » 3 40	I_{we}	II_n	−5,84	+0,32	+0,30	−0,02	9	Madras
9	27 » 0 27	26 » 12 18	IV_v	I_v	−0,18	−0,01	+0,03	+0,04	20	☌♃
0	27 » 13 44	27 » 1 35	IV_v	I_n	+5,66	−0,17	−0,31	−0,14	11	Madras, H. Kong
1	27 » 18 56	27 » 6 47	IV_v	III_n	+7,38	−0,20	−0,45	−0,25	10	Kaap
2	27 » 23 24	27 » 11 14	II_v	I_n	−1,38	+0,03	+0,07	+0,04	4	(Atl. Oceaan)
3	28 » 14 57	28 » 2 48	I_v	III_n	−3,49	+0,20	+0,17	−0,03	7	Madras
4	30 » 5 5.5	29 » 16 56	I_{we}	II_n	−5,75	+0,31	+0,31	0,00	4	Mt. Hamilton
5	1 Juli 12 34	1 Juli 0 25	II_v	I_n	−1,53	+0,09	+0,04	−0,05	4	Hong Kong
6	1 » 15 40	1 » 3 31	III_v	I_n	−3,93	+0,23	+0,21	−0,02	5	Midden Azië
7	2 » 16 21.5	2 » 4 12	III_v	II_n	+9,14	−0,48	−0,42	+0,06	12	» »
8	3 » 18 21	3 » 6 12	I_v	II_n	−5,68	+0,31	+0,31	0,00	7	Kaap
9	3 » 20 8	3 » 7 58.5	III_{oe}	IV_n	+15,30	−0,85	−0,79	+0,06	32	Berlijn enz.
0	5 » 1 44	4 » 13 35.0	II_v	I_n	−1,67	+0,03	+0,10	+0,07	4	Washington
1	5 » 6 25	4 » 18 16	II_v	IV_n	+1,66	−0,12	−0,15	−0,03	7	II verduisterd

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Bedekte wachter	n = nabij, v = veraf: Bedekkende wachter	$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
52	5 Julij 8 2.5	4 Juli 19 53.2	II_v	III_n	+2 80	−0r17	−0r29	−0r12	7m	Sydney
53	5 » 17 58	5 » 5 49	I_n	III_n	−2,75	+0,15	+0,15	0,00	6	Kaap
54	5 » 17 34	5 » 5 25	I_v	IV_n	−3,04	+0,14	+0,09	−0,05	7	Kaap, Moskou
55	5 » 21 54	5 » 9 45	III_n	IV_n	−4,85	+0,28	+0,16^5	−0,11^5	79	Washington
56	7 » 7 37	6 » 19 28	I_v	II_n	−5,60	+0,30	+0,31	+0,01	8	Sydney
57	8 » 14 55	8 » 2 46	II_v	I_n	−1,82	+0,04	+0,11	+0,07	4	Madras
58	8 » 18 44.8	8 » 6 35.5	III_v	I_n	−4,64	+0,26^5	+0,25	−0,01^5	8	Moskou
59	9 » 20 13	9 » 8 4	III_v	II_n	+8,89	−0,50	−0,40	+0,10	11,5	Berlijn, enz.
60	10 » 20 52	10 » 8 47	I_v	II_n	−5,53	+0,31	+0,30	−0,01	7	Utrecht
61	12 » 4 6.5	11 » 15 57	II_v	I_n	−1,97^5	+0,04	+0,13	+0,09	4	Mt Hamilton
62	12 » 20 57	12 » 8 47	I_v	III_n	−1,95	+0,11	+0,13^5	+0,02^5	6	Utrecht
63	13 » 5 25	12 » 17 15	IV_v	III_n	−6,50	+0,35	+0,40	+0,05	10,5	Pacifiek
64	13 » 20 39	13 » 8 30	IV_v	I_n	−0,27	+0,05	+0,05	0,00	6	☌ ♆
65	14 » 0 12.5	13 » 12 3	IV_v	II_n	+1,20^5	−0,01^5	+0,01^5	+0,03	4	IV verduisterd
66	14 » 10 8.5	13 » 21 59	I_v	II_n	−5,42	+0,29	+0,32	+0,03	7	Perth
67	15 » 17 17	15 » 5 7	II_v	I_n	−2,12	+0,04	+0,14	+0,10	4	Kaap
68	15 » 22 1	15 » 9 51	III_v	I_n	−5,27	+0,28	+0,30	+0,02	9	Berlijn, enz.
69	17 » 23 11	17 » 11 2	I_v	II_n	−5,34	+0,29	+0,31^5	+0,02^5	6,5	Charkow
70	19 » 6 30	18 » 18 21	II_v	I_n	−2,22	+0,06	+0,14	+0,08	4	Pacifiek
71	19 » 15 5	19 » 2 56	II_v	III_n	+3,77	−0,22	−0,15	+0,07	7	Midden-Azië
72	19 » 23 56	19 » 11 47	I_v	III_n	−1,13^5	+0,05	+0,12	+0,07	6	Astrakan

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Bedekte wachter	n = nabij, v = veraf: Bedekkende wachter	$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
52	5 Julij 8 2.5	4 Juli 19 53.2	II_v	III_n	+2 80	−0r17	−0r29	−0r12	7m	Sydney
53	5 » 17 58	5 » 5 49	I_n	III_n	−2,75	+0,15	+0,15	0,00	6	Kaap
54	5 » 17 34	5 » 5 25	I_v	IV_n	−3,04	+0,14	+0,09	−0,05	7	Kaap, Moskou
55	5 » 21 54	5 » 9 45	III_n	IV_n	−4,85	+0,28	$+0,16^5$	$-0,11^5$	79	Washington
56	7 » 7 37	6 » 19 28	I_v	II_n	−5,60	+0,30	+0,31	+0,01	8	Sydney
57	8 » 14 55	8 » 2 46	II_v	I_n	−1,82	+0,04	+0,11	+0,07	4	Madras
58	8 » 18 44.8	8 » 6 35.5	III_v	I_n	−4,64	$+0,26^5$	+0,25	$-0,01^5$	8	Moskou
59	9 » 20 13	9 » 8 4	III_v	II_n	+8,89	−0,50	−0,40	+0,10	11,5	Berlijn, enz.
60	10 » 20 52	10 » 8 47	I_v	II_n	−5,53	+0,31	+0,30	−0,01	7	Utrecht
61	12 » 4 6.5	11 » 15 57	II_v	I_n	$-1,97^5$	+0,04	+0,13	+0,09	4	Mt Hamilton
62	12 » 20 57	12 » 8 47	I_v	III_n	−1,95	+0,11	$+0,13^5$	$+0,02^5$	6	Utrecht
63	13 » 5 25	12 » 17 15	IV_v	III_n	−6,50	+0,35	+0,40	+0,05	10,5	Pacifiek
64	13 » 20 39	13 » 8 30	IV_v	I_n	−0,27	+0,05	+0,05	0,00	6	♂ ♍
65	14 » 0 12.5	13 » 12 3	IV_v	II_n	$+1,20^5$	$-0,01^5$	$+0,01^5$	+0,03	4	IV verduisterd
66	14 » 10 8.5	13 » 21 59	I_v	II_n	−5,42	+0,29	+0,32	+0,03	7	Perth
67	15 » 17 17	15 » 5 7	II_v	I_n	−2,12	+0,04	+0,14	+0,10	4	Kaap
68	15 » 22 1	15 » 9 51	III_v	I_n	−5,27	+0,28	+0,30	+0,02	9	Berlijn, enz.
69	17 » 23 11	17 » 11 2	I_v	II_n	−5,34	+0,29	$+0,31^5$	$+0,02^5$	6,5	Charkow
70	19 » 6 20	18 » 18 21	II_v	I_n	−2,22	+0,06	+0,14	+0,08	4	Pacifiek
71	19 » 15 5	19 » 2 56	II_v	III_n	+3,77	−0,22	−0,15	+0,07	7	Midden-Azië
72	19 » 23 56	19 » 11 47	I_v	III_n	$-1,13^5$	+0,05	+0,12	+0,07	6	Astrakan

Bedekking van II_0 door I_n, den 15 Juli 1908, te 17^u27^m burgerlijke tijd te Parijs.

	I						II				
	M. Lengte	1	2	3	4	5	M. Lengte	4	5	6	7
1858	6^t 5°74	7^t 27°5	1^t 6°8	0^t 1°4	0^t 18°1	10^t 20°9	8^t 17°66	3^t 9°6	10^t 2°8	0^t 18°6	11^t 28°5
1880	6 9,80	9 19,2	11 8,4	0 6,8	2 5,9	7 24,6	4 3,87	10 2,9	5 18,7	5 6,2	9 16,6
—1830	0 6,20	11 22,6	3 8,6	11 28,6	10 4,2	10 20,7	2 2,03	2 2,1	6 16,5	9 8,6	1 2,3
Juli	3 21,51	5 13,4	0 15,0	5 28,4	4 2,7	3 21,5	11 18,83	8 1,3	11 18,8	11 24,8	11 20,1
Juli 1908	7 13,25	10 22,7	4 3,1	5 29,2	5 0,9	8 27,7	2 12,30	11 15,3	3 26,8	2 22,5	10 1,5
15^d	10 28,85	6 12,6	6 1,2	0 13,8	11 19,6	10 28,8	11 9,25	11 24,8	11 9,2	11 9,7	11 6,3
17^u	4 24,14	0,6		0,7	2 12,3	4 24,1	1 11,81	1 6,2	2 11,8	2 11,8	2 11,8
27^m	3,82				1,0	3,8	1,90	0,9	1,6	1,6	1,6
	11 10,06	11 5,9	4 4,3	6 13,7	7 4,7	0 24,4	4 5,35	0 17,2	5 19,7	4 15,9	11 24,5
1	— 1,06					1	— 0,52				
2	— 0,16					2	— 0,08		5 + 0°53		
4	+ 0,43					4	+ 0,60		6 — 0,32		
	11 0,27			5 + 1°27			4 5,35		7 0,00		
S—G	4 17,37			— IX + 0,05		S—G	4 17,37		— IX + 0,05		
Amplitude	6 21,90			+ 1,32		Amplitude	11 17,98		+ 0,26		
			$x = -2^r,26$	$y = +0^r,14$				$x' = -2^r00$	$y' = +0^r04$		

$$-2^r,26 - 0,830 \,\Delta t = -2^r,00 + 0,691 \,\Delta t$$
$$-1,521 \,\Delta t = +0^r,26$$
$$\Delta t = -0^u,172 = -10^m,3$$
$$x = -2^r,12.$$

Resultaat: 15 Juli te $17^u16^m,7$ Burgerl. tijd te Parijs
= 5 16 ,7 Middelb. „ „ „
= 5 7 ,35 „ „ „ Greenwich.

Hier is er op gelet, dat het aantal schrikkeldagen tusschen 1858 en 1908 eenerzijds, en 1830 en 1880 anderzijds, ongelijk is; tusschen (1 Januari) 1830 en (1 Januari) 1880 zijn namelijk 12 schrikkeldagen begrepen, tusschen (1 Januari) 1858 en (1 Januari) 1908 slechts 11; op het verschil is hier gelet door den regel *Juli*, die de bewegingen voor de maanden Januari t. m. Juni bevat, te nemen alsof 1908 een *gewoon* jaar was. De bladzijden 201, 209, 217 en 225, die voor de vier wachters de beweging voor de maanden aangeven, bevatten namelijk twee tafels, de ééne met het hoofd „Années communes", de andere met het hoofd „Années bissextiles".

De vijfde regel dezer berekening, (Juli 1908) kan voor al de in deze maand vallende coajuncties gebruikt worden.

Als een tweede voorbeeld nemen wij de bedekking van III_r door II_r, waarvoor de teekening als eerste benadering gegeven heeft 2 Juni 1908 te $12^u 9^m,3$ burgerlijke tijd te Parijs.

	II								III					
	Midd. Lengte	1	2	3	4	5	6	7	M. Lengte	5	6	7	8	9
1908 Juni	9^u 1m15	9^u 25m6	4^u 0m6	4^u 29m6	8^u 13m6	10^u 58m6	9^u 10m3	4^u 20m0	0^u 17m45	0^u 7m7	2^u 24m3	2^u 2m6	8^u 6m3	0^u 26m4
2d	3 11, 37	6 0, 9	0 0, 1	0 1, 0	1 21, 1	3 11, 4	3 11, 4	3 11, 4	1 20, 32	1 20, 3	1 20, 3	1 20, 3	1 20, 3	1 20, 3
12^u	1 20, 69	0, 5		0, 5	0 25, 5	1 20, 7	1 20, 7	1 20, 7	0 25, 16	25, 2	25, 2	25, 2	25, 2	25, 2
$9^m,3$	0, 63				0, 3	0, 6	0, 6	0, 6	0, 32	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3
	2 3, 84	9 27, 0	4 0, 7	5 1, 1	11 0, 5	3 18, 3	2 13, 0	9 22, 7	3 3, 25	2 23, 5	5 10, 1	4 17, 8	10 22, 1	9 12, 2
1	— 6, 28							1	— 0, 13					
2	— 6, 07							2	— 0, 04					
4	— 0, 91				5 + 2^m89			4	+ 0, 04					
					0 — 6.45			5	+ 0, 15					
	2 2, 58				7 + 0.03			6	+ 0, 01			7 + 2^m01		
S—G	4 9, 25				— 1X — 0.11							8 + 0, 11		
									3 3, 28			9 + 0, 03		
Amplitude	9 23, 33				+ 2.36			S—G	4 9, 25			— 1X — 0, 11		
				$x = -8^r,84$		$y = +0^r,40$								
								Amplitude	10 24, 03			+ 2, 64		
												$x' = -9^r,01$		$y' = +0^r,055$

$$-8,84 + 0,280\,\Delta t = -9,01 + 0,453\,\Delta t$$
$$+0,17 = +0,173\,\Delta t$$
$$\Delta t = +0^m,983 = +59^m$$

Eerste benadering : 12 9 ,3

Tweede benadering : 13 8 ,3

Herhaalt men de berekening hiermede, dan verkrijgt men nog geene gelijkheid der elongaties. De amplituden worden dan door II $9'27'',56$, en voor III $10'26'',08$, verder vindt men

$$-8^r,535 + 0^r,327\,\Delta t = -8^r,56 + 0^r,4645\,\Delta t$$
$$+0,025 = +0,1365\,\Delta t$$
$$\Delta t = +0^m,182 = +10^m,9$$

13 8 ,3

Derde benadering : 13^u $19^m,2$ Burgerl. tijd te Parijs
$= 1$ 19 ,2 Middelb. „ „ „
$= 1$ 9 ,85 „ „ „ Greenwich

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: *„Het voortbrengen van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen".*

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Natuurkunde. — Mededeeling over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September l.l.

De Heer VAN DER STOK brengt verslag uit omtrent de uitkomsten van het „Internationaal Congres voor de studie der Poolstreken" waarop hij de Akademie heeft vertegenwoordigd. Eene formeele Associatie van Staten is niet tot stand gekomen; er heeft zich echter eene „Internationale Poolcommissie" geconstitueerd, waarvan de Statuten aan de verschillende Regeeringen en aan de Internationale Associatie der Akademies zullen worden aangeboden.

Deze Statuten geven ruimschoots gelegenheid tot verdere ontwikkeling in verschillende richting.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan, getiteld: *„Quadratische omwentelingscomplexen."*

§ 1. Wanneer de stralen van een complex gerangschikt kunnen worden in regelscharen van omwentelingshyperboloïden met dezelfde as, dan is de complex bestand tegen wenteling om die as. Bevat zulk een *omwentelingscomplex* Ω ook de tweede regelschaar van elk der bedoelde hyperboloïden, dan is hij symmetrisch ten opzichte van elk vlak door zijn as, en kan als *symmetrische omwentelingscomplex* onderscheiden worden. In dit geval verkeeren de raaklijnencomplexen van omwentelingsoppervlakken.

Wij bepalen de algemeene vergelijking der quadratische omwentelingscomplexen met as OZ in de stralencoördinaten

$$p_1 = x - x' \quad , \quad p_2 = y - y' \quad , \quad p_3 = z - z',$$
$$p_4 = yz' - zy' \quad , \quad p_5 = zx' - xz' \quad , \quad p_6 = xy' - yx'.$$

Door substitutie van

$$p_1 = \alpha\bar{p}_1 - \beta\bar{p}_2 \quad , \quad p_2 = \beta\bar{p}_1 + \alpha\bar{p}_2 \quad , \quad p_3 = \bar{p}_3,$$
$$p_4 = \alpha\bar{p}_4 - \beta\bar{p}_5 \quad , \quad p_5 = \beta\bar{p}_4 + \alpha\bar{p}_5 \quad , \quad p_6 = \bar{p}_6,$$

(waar $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ is) in de algemeene quadratische vergelijking vindt men gemakkelijk, dat de vergelijking van een Ω slechts termen met

$$(p_1^2 + p_2^2),\ (p_4^2 + p_5^2),\ p_3,\ p_6,\ (p_1 p_5 - p_2 p_4) \text{ en } (p_1 p_4 + p_2 p_5)$$

kan bevatten. Daar de laatste combinatie, ten gevolge van een bekende identiteit, door $-p_3 p_6$ kan vervangen worden, heeft men

voor Ω de vergelijking

$$A(p_1^2+p_2^2)+Bp_3^2+2Cp_3p_6+Dp_6^2+E(p_4^2+p_5^2)+2F(p_1p_5-p_2p_4)=0. \quad (1)$$

Is $C=0$, dan verandert (1) niet, als men x door $-x$ vervangt; men heeft dan een *symmetrischen* complex.

De stralencoördinaten

$$q_1=u-u' \quad , \quad q_2=v-v' \quad , \quad q_3=w-w' \quad ,$$
$$q_4=vw'-wv' \quad , \quad q_5=wu'-uw' \quad , \quad q_6=uv'-vu' \quad ,$$

waar u, v en w de coördinaten van een vlak voorstellen, zijn met de coördinaten p verbonden door de bekende betrekkingen

$$p_1:q_4=p_2:q_5=p_3:q_6=p_4:q_1=p_5:q_2=p_6:q_3.$$

Dus kan Ω ook voorgesteld worden door

$$E(q_1^2+q_2^2)+Dq_3^2+2Cq_3q_6+Bq_6^2+A(q_4^2+q_5^2)+2F(q_2q_4-q_1q_5)=0 \quad . \quad (2)$$

Deze vergelijking ontstaat uit (1) door verwisseling van p_k met q_k, en van A, B, C, D, E, F met $E, D, C, B, A, -F$.

§ 2. De complexkegel van het punt (x', y', z') heeft tot vergelijking

$$A(x-x')^2+A(y-y')^2+B(z-z')^2+2C(y'x-x'y)(z-z')+D(y'x-x'y)^2+$$
$$+E(z'y-y'z)^2+E(z'x-x'z)^2+2F(x-x')(x'z-z'x)+2F(y-y')(y'z-z'y)=0. \quad (3)$$

Om de vegelijking van het singuliere oppervlak te vinden, beschouwen we de complexkegels, waarvan de toppen in XOZ liggen, en schrijven de voorwaarde neer welke uitdrukt dat de doorsnede van zulk een kegel met XOY in twee rechten ontaardt. Na afzondering van den te verwerpen factor z^2, en vervanging van x^2 door $x^2+y^2=r^2$, verkrijgt men de vergelijking

$$D(AE-F^2)r^4+(AE+BD-C^2-F^2)r^2(Ez^2-2Fz+A)+$$
$$+B(Ez^2-2Fz+A)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Daar deze ontbonden kan worden in twee factoren van den vorm $Lr^2+M(Ez^2-2Fz+A)$, bestaat het *singuliere oppervlak Σ uit twee quadratische omwentelingsoppervlakken.*

Deze raken elkaar in de cyclische punten I_1 en I_2 van het vlak XOY en in de punten B_1 en B_2 op OZ, die bepaald worden door

$$Ez^2-2Fz+A=0.$$

De beide oppervlakken snijden elkaar volgens de vier isotrope rechten, welke door de vergelijkingen

$$x^2+y^2=0 \text{ en } Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

worden aangewezen.

Is Ω symmetrisch ($C=0$), dan hebben de beide deelen van het singuliere oppervlak tot vergelijkingen

$$(AE-F^2)(x^2+y^2)+B(Ez^2-2Fz+A)=0, \quad . \quad . \quad (6)$$
$$D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Heeft men $B=0$ en $D=0$, dan ontaardt Σ in de vier vlakken (5), en is Ω een bijzondere *tetraedrale complex.*

Uit (3) wordt gemakkelijk gevonden dat de complexkegels der punten B_1, B_2, I_1 en I_2 in dubbel te tellen stralenbundels ontaarden. Deze punten zullen *bisingulier* genoemd worden.

§ 3. De complexstralen, die op een rechte l rusten, raken aan een oppervlak, dat de meetkundige plaats is van de toppen der complexkegels welke door l worden aangeraakt. Dit *axiale oppervlak* is in het algemeen van den vierden graad en de vierde klasse, en bezit acht dubbelpunten [1]).

Wij zullen het axiale oppervlak van OZ bepalen. De snijpunten $(0, 0, z')$ van een willekeurigen complexkegel met OZ worden aangewezen door de vergelijking

$$[E(x^2+y^2)+B]z'^2 - 2[F(x^2+y^2)+Bz]z' + [A(x^2+y^2)+Bz^2] = 0.$$

Deze heeft twee gelijke wortels, als voldaan is aan

$$\{(AE-F^2)(x^2+y^2)+B(Ez^2-2Fz+A)\}(x^2+y^2)=0 \quad . \quad (8)$$

Het axiale oppervlak van OZ bestaat dus uit de twee isotrope vlakken door de as en een quadratisch omwentelingsoppervlak, dat men het *meridiaanoppervlak* zou kunnen noemen. Is Ω symmetrisch, dan maakt het, zooals uit (6) blijkt, deel uit van het singuliere oppervlak.

Ook het axiale oppervlak der oneindig ver in XOY gelegen rechte l_∞ ontaardt in twee vlakken en een quadratisch oppervlak. Men vindt zijn vergelijking het gemakkelijkst door de beschouwing van de complexstralen loodrecht op XOZ. Uit $x=x'$, $z=z'$ volgt $p_1=0$, $p_3=0$, $p_4=zp_2$, $p_5=0$, $p_6=-xp_2$. Door substitutie in (1) vindt men

$$(A+Dx^2+Ez^2-2Fz)p_2^2=0,$$

en hieruit voor het bedoelde oppervlak

$$D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Voor den symmetrischen complex is dit *paralleloppervlak*, blijkens (7), het tweede blad van het singuliere oppervlak.

De vlakken der stralenbundels van de bisinguliere punten B_1, B_2 vormen het ontbrekende bestanddeel van het axiale oppervlak van l_∞. Men kan dit aantoonen door de vergelijking te bepalen van het axiale oppervlak der rechte $z'=0$, $y'=b$, en daarin $b=\infty$ te stellen. Men vindt dan

$$(Ez^2-2Fz+A)\{D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A\}=0 \quad . \quad (10)$$

Het *meridiaanoppervlak*, het *paralleloppervlak* en de beide deelen

[1]) Sturm, *Liniengeometrie* III, p. 3 en 6.

van het *singuliere oppervlak* behooren tot een zelfden bundel, die den scheeven vierhoek $B_1I_1B_2I_2$ tot basis heeft.

Als in de vergelijking van den complexkegel de som der coëfficienten van x^2, y^2 en z^2 gelijk is aan nul, dan vormen de ribben ∞^1 drietallen van onderling loodrechte stralen. De toppen der tot Ω behoorende *triorthogonale* (gelijkzijdige) *complexkegels* vormen het omwentelingsoppervlak

$$(D+E)(x^2+y^2)+2Ez^2-4Fz+(2A+B)=0 \quad . \quad . \quad (11)$$

Het heeft met elk der deelen van Σ twee cirkels gemeen. Deze bevatten de toppen der complexkegels welke in *twee loodrechte vlakken* ontaarden.

§ 4. De afstand l_0 van een rechte tot OZ wordt bepaald door

$$l_0^2=\frac{p_6^2}{p_1^2+p_2^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

de hoek λ tusschen straal en XOY door

$$tg^2\lambda=\frac{p_3^2}{p_1^2+p_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Derhalve levert de voorwaarde $l_0 tg\lambda=a$ den complex

$$p_3p_6=a(p_1^2+p_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Hier hebben wij een eenvoudig voorbeeld van een *symmetrischen omwentelingscomplex.*

De vergelijking

$$p_3^2=a(p_1^2+p_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

bepaalt een complex Ω, waarvan de stralen een constanten hoek met de as vormen, dus een oneindig ver gelegen cirkel snijden.

De vergelijking

$$a^2p_3^2=p_4^2+p_5^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

levert een complex Ω, waarvan de stralen den cirkel $x^2+y^2=a^2$ snijden. Immers XOY snijdt elken complexkegel in dezen cirkel.

Stelt l den afstand van een straal tot O voor, dan is

$$l^2=\frac{p_4^2+p_5^2+p_6^2}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Wordt XOY over een afstand c in zijn normaalrichting verschoven, dan gaan p_4 en p_5 over in (p_4-cp_2) en (p_5+cp_1). Voor den afstand l_1 van een straal tot het punt $(0, 0, c)$ heeft men dus

$$l_1^2=\frac{(p_4^2+p_5^2+p_6^2)+2c(p_1p_5-p_2p_4)+c^2(p_1^2+p_2^2)}{p_1^2+p_2^2+p_3^2}. \quad (18)$$

Wordt hierin c vervangen door $-c$, dan vindt men een betrekking voor den afstand l_2 van den straal tot het punt $(0, 0, -c)$.

De vergelijking

$$a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2 = \beta$$

levert een complex Ω met de vergelijking

$$\{(a_1 + a_2) c^2 - \beta\}(p_1^2 + p_2^2) - \beta p_3^2 + (a_1 + a_2)(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) + \\ + 2(a_1 - a_2) c (p_1 p_5 - p_2 p_4) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Deze symmetrische complex is zeer uitvoerig, en op elementaire wijze, behandeld door J. Neuberg (*Wiskundige Opgaven*, IX, p. 334—341, en *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, I, p. 137—150). Het bijzondere geval $a_1 l_1 + a_2 l_2 = 0$ beschouwde F. Corin (*Mathesis*, IV, pp. 177—179, 241—243).

Voor $l_1 = l_2$ vindt men eenvoudig

$$p_1 p_5 - p_2 p_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Deze complex bevat de stralen, die evenver van twee vaste punten verwijderd zijn. Daar c niet in de vergelijking voorkomt, kunnen de vaste punten vervangen worden door elk tweetal punten op de as, die O tot midden hebben. [1])

§ 5. Bij een verplaatsing in de richting van OZ veranderen de stralencoördinaten p_1, p_2, p_3 en p_6 niet, terwijl men heeft

$$p_4 = \overline{p}_4 + h\overline{p}_2 \quad \text{en} \quad p_5 = \overline{p}_5 - h\overline{p}_1,$$

dus

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 = \overline{p}_1 \overline{p}_4 + \overline{p}_2 \overline{p}_5.$$

De vormen $(p_4^2 + p_5^2)$ en $(p_1 p_5 - p_2 p_4)$ zijn nu *niet* invariant.

Wanneer, in de vergelijking (1) van den complex Ω, de coëfficienten E en F nul zijn, dan wordt Ω dus in zich zelf verplaatst door elke schroefbeweging met as OZ. De complex kan dan *helicoïdaal* genoemd worden.

Het singuliere oppervlak heeft nu tot vergelijking

$$(BD - C^2)(x^2 + y^2) + AB = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

het bestaat derhalve uit een omwentelingscylinder en het dubbel gelegde vlak in het oneindige.

§ 6. Door homographische vervorming kan de complex Ω omgezet worden in een quadratischen complex met *vier bestaanbare bisinguliere punten.*

Neemt men deze tot hoekpunten van een coördinatenviervlak $O_1 O_2 O_3 O_4$, dan is het niet moeielijk aan te toonen dat de vergelijking van zulk een complex dezen vorm heeft:

$$A p_{12}^2 + B p_{34}^2 + 2 C p_{12} p_{34} + 2 D p_{13} p_{42} + 2 E p_{14} p_{23} = 0. \quad (22)$$

---

[1]) Deze complex is tetraedraal. Zie Sturm, *Liniengeometrie*, I, p. 364.

Voert men weer de voorwaarde in dat de doorsnede van den complexkegel met een der coördinaatvlakken uit twee rechten bestaat, dan vindt men, na eenige herleiding, voor het *singuliere oppervlak*

$$A(D-E)y_1^2y_2^2+2\{AB-(C-D)(C-E)\}y_1y_2y_3y_4+B(D-E)y_3^2y_4^2=0 \quad . \quad (23)$$

Dit bestaat dus uit twee quadratische oppervlakken die de vier rechten O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3 en O_2O_4 gemeen hebben.

Voor $A=0$, $B=0$ is de complex blijkbaar tetraedraal.

Voor $D=E$ is de vergelijking herleidbaar tot

$$A\,p^2_{12}+B\,p^2_{34}+2\,(C-D)\,p_{12}\,p_{34}=0,$$

en wijst dan twee lineaire complexen aan.

Voor de axiale oppervlakken der ribben O_1O_2 en O_3O_4 vindt men

$$x_3\,x_4\,\{2A\,x_1\,x_2+(D-E)\,x_3\,x_4\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

en

$$x_1\,x_2\,\{2B\,x_3\,x_4+(D-E)\,x_1\,x_2\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Voor een punt $(0, y_2, 0, y_4)$ der ribbe O_2O_4 wordt de complexkegel voorgesteld door

$$A\,y_2^2\,x_1^2+2\,(C-E)\,y_2\,y_4\,x_1\,x_3+B\,y_4^2\,x_3^2=0\,; \quad . \quad . \quad (26)$$

hij bestaat dus uit twee vlakken door O_2O_4.

Hieruit blijkt dat de ribben O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4 *dubbelstralen* van den complex zijn. [1])

Sterrekunde. — De Heer H. G. van de Sande Bakhuizen biedt eene mededeeling aan van den Heer A. Pannekoek. „*De samenhang van spectrum en kleur der sterren*".

(Mede aangeboden door den Heer E. F. van de Sande Bakhuijzen).

Een nauwe samenhang tusschen de kleur en het spectrum der sterren is reeds lang bekend. De sterren van het 1ste 2de en 3de spectraaltype worden doorgaans de witte, de gele, en de roode sterren genoemd, al is dan ook, nauwkeurig gesproken, de kleur der z. g. gele sterren een zeer witachtig, onverzadigd geel, en die van de z.g. roode sterren helder geel, met zeer weinig rood gemengd. In een te Dusseldorf in 1900 gehouden voordracht [2]) hebben wij aangewezen, dat bij verschillende gloeiingstoestanden juist deze kleuropeenvolging ontstaan moet. Neemt men de kleur voor een zekere hooge temperatuur als wit aan, dan vormen de kleuren bij dalende temperatuur in het driehoekig kleurendiagram een lijn, die van wit eerst recht

[1]) Zie Sturm, *Liniengeometrie* III, pp. 416 en 417.

[2]) Die Farben der Gestirne. Mittheilungen der V. A. P. Jahrg. 10. S. 117.

op geel van λ 587 aanloopt, maar gaandeweg, naarmate de kleur verzadigder wordt, naar het rood ombuigt, en met licht van grooter golflengte in steeds stijgende verzadiging overeenkomt. Bij stijgende temperatuur daarentegen loopt de kleurlijn van wit naar de tegenoverliggende zijde, naar blauw van λ 466.

Aangezien de kleuren, die uit wit licht door verschillende graden van atmospherische absorbtie ontstaan, ook nagenoeg deze zelfde lijn volgen, mag men verwachten, dat de kleuren der zelflichtende hemellichamen in het algemeen op deze gloeiingslijn of er dichtbij liggen; op deze lijn worden zij dan door één coordinate, één getal, bepaald. Dit maakt begrijpelijk, eenerzijds waarom de aanduiding door letters en woorden, of de meting met ZÖLLNER's colorimeter, die geheel andere kleuren voortbrengt, zoo weinig resultaat heeft opgeleverd, anderzijds, waarom de schaal van SCHMIDT, die de kleuren door één serie van cijfers aanduidt, waarbij 0 wit, 4 geel, 10 rood heet, in de praktijk de meeste goede uitkomsten heeft opgeleverd. Naar deze methode is ook de beste en volledigste lijst van sterkleuren vervaardigd, die H. OSTHOFF te Keulen in de A. N. Bd. 153 (Nr. 3657—58) in 1900 publiceerde. Deze lijst, waarin de kleuren van alle sterren tot de 5de grootte tot op een tiende kleurklasse is aangegeven, als vrucht van systematische schattingen gedurende 14 jaren, stelt ons in staat, de betrekking tusschen spectrum en kleur nauwkeurig vast te stellen.

In een vorige mededeeling [1]) is er op gewezen, dat wij niet weten, waar ergens in de opeenvolgende reeks van spectra van het Oriontype en het eerste type de hoogste temperatuur, of in elk geval het grootste lichtuitstralend vermogen te vinden is. Men mag aannemen, dat het daar is, waar de kleur het witst is; spectraalphotometrische metingen, waarnaar in die mededeeling verwezen werd, ontbreken tot nog toe, maar voor dit doel kunnen zij zeer goed door kleurschattingen vervangen worden; dit is de reden voor het onderzoek, waarvan de resultaten hier volgen.

Het spreekt vanzelf, dat, waar een zoo ver mogelijk in onderdeelen gaande specificatie der spectra noodig was, om als argument voor de kleur te dienen, de klassen van MAURY ook hier gebruikt werden. Om voor elke klasse een gemiddelde kleur op te kunnen maken, moeten echter de waargenomen kleuren voor twee invloeden gecorrigeerd worden, die ze wijzigen, nl. den invloed van de helderheid, en dien van de hoogte boven den horizon. Quantitatief is over het bedrag dezer invloeden niets bekend; proefnemingen van OSTHOFF

[1]) De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype. Zittingsversl. Dl. XV blz. 94.

zelf, om den invloed der helderheid te bepalen, leverden tot nog toe niet veel resultaten. Zij moeten hier dus uit het voor ons onderzoek dienende materiaal van sterkleuren zelf afgeleid worden; dit kan geschieden in de zeer aannemelijke onderstelling, dat de werkelijke kleur binnen elke spectraalklasse nagenoeg een konstante en onafhankelijk van de helderheid is.

§ 2. De sterren, uit de lijst van OSTHOFF, die in den spectraalcatalogus van MAURY voorkomen, werden naar de klasse gerangschikt en daarna (met uitsluiting, zooals steeds bij dit onderzoek, van die, welke *c*, *ac*, *C*, *P* of *L* gemerkt zijn) telkens voor een paar klassen tegelijk naar de helderheid gerangschikt en tot middelwaarden vereenigd. Deze middelwaarden moeten dan den invloed van de helderheid op de kleur toonen; zij zijn in de volgende tabellen samengesteld:

Klasse III— VI		Klasse VII—VIII		Klasse IX—XII	
Gr.	Kl.	Gr.	Kl.	Gr.	Kl.
1.78	1.46 (5)	0.1	1.2 (3)	1.0	2.7 (2)
2.80	2.27 (6)	2.4	1.83 (6)	2.69	2.97 (9)
3 35	1.96 (5)	3.17	2.59 (7)	3 18	3.06 (8)
3.70	2.86 (7)	3.55	2.57 (6)	3.65	3.73 (10)
4.00	2.47 (8)	3.82	2 95 (6)	3.85	3.40 (8)
4.15	2.91 (7)	4.00	2 86 (5)	4.10	3.69 (9)
4.50	2.60 (9)	4 10	2.60 (7)	4 29	4 17 (7)
4.95	2.42 (11)	4 20	2 50 (5)	4.65	3 79 (8)
		4.36	2.96 (5)	5.10	3.34 (9)
		4.62	2 72 (4)		
		4.96	2.66 (5)		

Klasse XIII—XIV		Klasse XV		Klasse XVI—XVIII	
Gr.	Kl.	Gr.	Kl.	Gr.	Kl.
0.2	3.4 (1)	0.7	4.5 (2)	0.95	6.45 (2)
3.07	4 71 (7)	2 12	5.50 (6)	2.50	6.40 (6)
3.54	4.61 (7)	2.92	5.66 (9)	3.22	6.65 (6)
3.98	4.72 (9)	3.37	5.74 (9)	3.72	6.65 (4)
4 24	4.88 (8)	3.55	5.46 (9)	4.15	6.75 (6)
4.84	4.88 (8)	3.75	5.71 (8)	4.63	7.07 (7)
		3.90	5.55 (10)	4.88	7.22 (9)
		4.00	5 70 (7)	5.28	7.22 (8)
		4.14	5.85 (11)		
		4.45	6.08 (6)		
		4.87	6.43 (7)		

In al deze reeksen is een toenemende verdieping van de tint bij afnemende helderheid duidelijk te zien. Men kan trachten, de kleur als lineaire functie van de helderheid voor te stellen; langs graphischen weg werd gevonden

Kl.	III—VI	$c = 2.15 + 0.35$	$(m - 3)$
„	VII—VIII	$2.27 + 0.36$	„
„	IX—XII	$3.17 + 0.39$	„
„	XIII—XIV	$4.45 + 0.42$	„
„	XV	$5.47 + 0.39$	„
„	XVI—XVIII	$6.60 + 0.20$	„

Bij alle groepen, behalve de laatste, wordt dus vrijwel dezelfde coëfficent gevonden. De waarde der coëfficienten wordt hoofdzakelijk bepaald door het verschil in waargenomen kleur tusschen de zeer heldere sterren van de 1ste grootte, en de groote massa van de 3de en 4de grootte. Om nu de coëfficient der laatste groep met de andere in overeenstemming te brengen, is het noodig, de schijnbare kleur van α Tauri en α Orionis 5,6 aan te nemen in plaats van 6,4 en 6,5, de werkelijke schattingen. Een zoo groote fout is voor deze heldere, dikwijls geschatte sterren niet wel aan te nemen; de afwijkende coëfficient bij de roode sterren moet dus vooreerst als reeël aangenomen worden, al is een verklarig daarvoor op het oogenblik moeilijk te geven.

Vereenigt men nu de uitkomsten van de vijf eerste groepen, door de afwijkingen van de voor $m = 3$ geldende constanten der formules naar de helderheid te rangschikken en daarvan weer middelwaarden te nemen, dan vindt men:

m	$c - c_3$	B_1	B_2	$W - B_1$	$W - B_2$
0.3	—1.03	—1.10	—0.91	+.07	—.12
1.6	—0.63	—0.54	—0.47	— 09	— 16
2.91	+0.02	+0.04	—0.02	— 02	+ 04
3.73	+0.32	+0.31	+0.27	+ 01	+ 05
4.12	+0.48	+0.40	+0.39	+ 08	+ 09
4.73	+0.50	+0.52	+0.60	— 02	— 10

Een lineaire betrekking $c = c_3 + 0{,}34\,(m - 3)$ geeft de berekende waarden onder B_2 en de afwijkingen $W - B_2$. Deze zijn systematisch verdeeld en duiden een niet-lineaire betrekking aan. Een kromme lijn, die zoo goed mogelijk aan de middelwaarden aansluit, geeft de berekende waarden B_1 en de afwijkingen $W - B_1$. Zij geeft voor grooter helderheid een sterker, voor zwakker helderheid een zwakker

verloop met de helderheid. In alle zes groepen, behalve de vijfde en zesde vertoont zich het verschijnsel, dat de laatste, voor de zwakste helderheid geldende getallen een daling van het kleurcijfer vertoonen, t. o. v. de vorige getallen.

Een verklaring voor dit verschijnsel kan gevonden worden in de medewerking van de kleurlooze schemeringsperceptie bij zwakke lichtbronnen. Bij zwakke sterren is in het geheel geen kleur meer te zien; hier wordt de kleurperceptie bijna geheel vervangen door een kleurloozen (d.i. witachtigen) lichtindruk. Bij sterren, die tot deze grens naderen, zal de kleurindruk sterk gemengd zijn met de kleurloozen, daardoor bleeker schijnen en door een lager cijfer aangeduid worden. Daar bij meer rood gekleurde sterren deze kleurlooze indruk relatief veel zwakker is, zal bij zulke sterren de verbleeking van de kleur eerst bij aanmerkelijk geringer helderheid optreden; op die wijze wordt verklaard, waarom de 5de en 6de groep deze daling niet vertoonen. Of hier voor zwakker sterren het verschijnsel optreedt, is niet uit te maken, daar de spectraal-catalogus van Maury geen zwakker sterren omvat.

Voor het praktisch gebruik, het reduceeren van de waargenomen kleuren op een zelfde helderheid, is het vrijwel onverschillig, welke van de beide betrekkingen aangenomen wordt, zoolang men binnen bepaalde grenzen van helderheid, bv. tusschen de grootten 1 en 5, blijft. Voor de gemakkelijker reductie is de bovenstaande lineaire formule voor de 5 eerste groepen (tot en met klasse XV) gebruikt, terwijl voor de roodere klassen 0,20 als hèlderheidscoëfficient aangenomen werd.

Ter verklaring van dit reeds lang bekende verschijnsel, dat bij afnemende helderheid de kleur dieper wordt, heeft Helmholtz in zijn *Physiologische Optik* een theorie gegeven, de „Theorie der kürzesten Linien im Farbensystem". In het kleurendiagram in de ruimte, waar elke lichtindruk voorgesteld wordt door een punt, waarvan de 3 coördinaten de hoeveelheden der elementairkleuren rood, groen, blauw voorstellen, zijn de lijnen van gelijke kleur geen rechte stralen door den oorsprong, maar gebogen lijnen, die op grooter afstand van den oorsprong steeds meer naar de coordinaatassen toebuigen en zich daardoor in sterker mate verwijderen van één straal, die recht is, en de „Principalfarbe" voorstelt. In den kleurendriehoek verwijderen dus de punten van gelijke kleur zich des te verder van de principaalkleur — waarbij zij in gekromde banen op den omtrek en de hoekpunten aanloopen — naarmate de kleurendriehoek verder van den oorsprong wordt gelegd en dus grooter helderheid voorstelt. Als principaalkleur geeft Helmholtz daar een

zeker „geelwit" op, waarnaar alle kleuren bij uiterst groote intensiteit in uiterlijk naderen. Kleuren, die aan de blauwe zijde van deze principaalkleur liggen, moeten dus bij verzwakking blauwer worden.

Dit is niet in overeenstemming met hetgeen hier gevonden is, t. m. als het „geelwit" van HELMHOLTZ ook in onze schaal geelwit is, d. i. in de schaal van SCHMIDT door een positief getal voorgesteld wordt. Wij vinden hier ook bij de witste sterren bij verzwakking een evengroote vergeling van de kleur als bij de gelere. Nu is de uitdrukking „geelwit" wel onbepaald, maar als men bedenkt, dat wat in de schaal van SCHMIDT wit heet, witter d. w. z. blauwer is dan het licht van Sirius, en dat zonlicht, bij gewone optische beschouwingen de maatstaf voor wit, tot sterhelderheid verzwakt in de schaal van SCHMIDT 3 à 4 zou heeten (Capella 3, 4) dan moet, ingeval de theorie van HELMHOLTZ juist is, de principaalkleur, in plaats van geelwit te zijn, nog aan de blauwe kant van het Siriuslicht liggen.

§ 3. Nadat de kleuren op die wijze op de helderheid 3.0 gereduceerd waren, moesten zij nog van den invloed der atmospherische roodkleuring bevrijd worden. Met eenige nauwkeurigheid is dit niet te doen, omdat bij de waarnemingen geen tijd en geen hoogte aangegeven zijn. Nu zal de invloed bij groote en gemiddelde hoogte wel zeer gering zijn, en de waarnemer zal er wel voor gezorgd hebben, dat de meeste sterren op voldoende hoogte (bv. tusschen 30° en 60° hoogte) waargenomen werden. Practisch is deze correctie dus alleen van belang bij de weinige zuidelijke sterren, die steeds laag blijven; hier zal men de kleurwijziging door een van de declinatie afhankelijke correctie benaderd kunnen voorstellen. In plaats van de declinatie werd als argument de B. D.-zone genomen, die OSTHOFF in zijn catalogus mee opgeeft.

Voor elke spectraalklasse werden nu voor alle sterren ten N. van den aequator gemiddelde kleurgetallen opgemaakt, en voor alle sterren ten Z. van den aequator de afwijkingen van deze klassegemiddelden gevormd, die ten slotte naar declinatie gerangschikt en samengetrokken werden. Uitgesloten werden hierbij de klassen, waarin te weinig noordelijke sterren voorkwamen t. w. I, II en III.

De gevonden middelwaarden zijn:

Zone	Afwijking	n.	Kromme	Zone	Afwijking	n.	Kromme
—0.°0	+0.56	5	+0.05	—9.°0	+0.14	5	+0.26
—1 7	+0.35	4	+ 06	—10.2	+0.35	4	+ 32
—3.3	—0.17	6	+ 09	—13.2	+0.33	6	+ 57
—5.0	+0.50	5	+ 12	—15.0	+1.17	6	+ 79
—6.6	+0.22	4	+ 17	—18.2	+0.93	6	+1.32
—8.0	—0.05	5	+ 22				

Een kromme lijn werd door deze waarden doorgelegd, die van den aequator naar zuidelijke declinaties in steeds sterker mate stijgt, en die de waarden der laatste kolom geeft. Volgens deze kromme lijn werden de correcties aangebracht, bij

zone	1°	2°–5°	6°–8°	9°–10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18° Zuid
neg. corr.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3

Door deze correcties mag men aannemen, dat tenminste voor een groot deel de kleurverandering door de atmosferische absorptie onschadelijk gemaakt is.

§ 4. Na aanbrenging van deze correcties konden voor alle spectraalklassen middelwaarden van de kleur opgemaakt worden, die in de volgende tabel staan. Hierbij werd klasse XV weer in drieën gesplitst, alnaar het spectrum met α Bootis (A) of met α Cassiopeiae (C) overeenstemde, of niet van een dergelijke opmerking voorzien was (B); de uitkomst toont inderdaad, dat hier de C klasse aanmerkelijk rooder is, dan de klasse A, terwijl de B's tusschen beiden inliggen.

Klasse	Kleur	Aantal	Klasse	Kleur	Aantal
I	2.47	6	XII	3.68	17
II	2.36	10	XIII	4.12	13
III	2.30	9	XIV	4.45	12
IV	1.94	14	*XIV*	5.09	9
IV	1.62	10	XVA	5.18	18
V	2.11	9	XVB	5.35	26
VI	2.16	10	XVC	5 55	31
VII	2.27	23	*XV*	6.34	5
VIII	2.37	34	XVI	6.47	17
IX	2.64	20	XVII	6.80	15
X	3.11	14	XVIII	6.74	15
XI	3.40	9	XIX	6.67	6
XI	3.41	4			

De afwijkingen der afzonderlijke waarden van deze gemiddelden geven, als maat voor de nauwkeurigheid der uitkomsten, voor de m. ft. van een kleurgetal $\sqrt{0,20} = 0,45$; de werkelijke nauwkeurigheid zal wat grooter en de werkelijke m. ft. kleiner zijn, omdat in dit getal ook ingesloten zijn de fouten van de aangenomen correcties voor helderheid en declinatie, de fouten die mogelijk MAURY bij het toewijzen van elke ster naar een bepaalde klasse begaan heeft, en de werkelijke afwijkingen van de enkele sterren van hun klassegemiddelde.

Bij 9 sterren (op de 355) overtreft de afwijking een kleureenheid; de gereduceerde kleuren zijn hier:

β Can. maj.	III 1,2	ε Hydrae	XIII 5,2	η Persei	XV*B* 6,8
o_1 Cygni	IX 1,4	μ Persei	XIV 5,5	11 Urs. min.	XV*B* 6,6
δ Delphini	IX 3,8	o_2 Cygni	*XIV* 6,5	5 Orionis	XVII 7,9

Bij dit onderzoek zijn, zooals reeds gezegd is, de *c*- en *ac*-sterren, de *L* (lichtende lijnen), de *P* (peculiar spectra) en *C* (samengestelde spectra) uitgesloten. Van belang is het, onder deze de *c* en de *ac*-sterren nader te beschouwen, om te zien of zij een duidelijk verschil in kleur met de *a*-sterren van hetzelfde klassenummer vertoonen. Gemiddeld geven 11 *ac*-sterren als afwijking + 0,1 (van + 0,5 tot — 0,3), en 12 *c*-sterren + 0,7, zij zijn dus een weinig rooder dan de *a*-sterren. Opvallend zijn hierbij echter de groote individueele afwijkingen; de uiterste waarden zijn:

ϱ Cassiop XIII + 2,5; χ_2 Orionis III + 1,8; 4*H* Camelop *VI* + 2,0; 3*H* Camelop *VI* + 1,5; η Leonis VII — 0,3; β Orionis VI — 1,2.

Deze loopen dus zeer sterk uiteen, zonder dat er een regelmaat in te ontdekken is.

§ 5. De gevonden uitkomsten lossen een vraag op, die in mijn vorige mededeeling onbeantwoord moest blijven, de vraag nl. waar in de aaneensluitende reeks van spectraalklassen het maximum van lichtuitstralend vermogen ligt. De kleurgetallen vertoonen zeer duidelijk een daling in de eerste klassen, een *minimum* tusschen de 4de en 5de klasse, en daarna een voortdurende stijging. De sterren, die in ontwikkeling onmiddellijk op γ Orionis volgen (μ Aurigae, μ Hydrae, *u* Herculis) hebben de witste kleur; zoowel de vroegere als de latere ontwikkelingsstadia zijn geler; klasse I en II komen in kleur het naast met klasse VIII overeen. Tusschen de 4de en 5de klasse ligt dus, zoover wij uit de kleur tot de geheele lichtuitstraling mogen besluiten, ook het maximum van lichtuitstralend vermogen.

Het gemiddeld kleurgetal voor elk van de vroeger gevormde groepen is nu

Kl. I—III	2.35
IV—V	1.87
VI—VIII	2.30
IX—XII	3.20
XIII—XIV	4.58
XV	5.43
XVI—XIX	6.66

Is het nu mogelijk, uit deze getallen, zij het ook slechts benaderd, waarden voor het lichtuitstralend vermogen per eenheid van oppervlak af te leiden? Men kan de beide reeds vermelde invloeden, die de kleur der zelflichtende hemellichamen bepalen, aan berekening onderwerpen, wanneer men van de specifieke eigenschappen der samenstellende stoffen afziet en ze als abstract-theoretische gevallen behandelt. Dit komt daarop neer, dat de straling van een volkomen zwart lichaam beschouwd wordt en dat bij de absorptie van de selectieve absorptie in lijnen en banden afgezien wordt, om alleen de algemeene in het oog te vatten. Als eerste benadering kan dit ook voldoende geacht worden.

Bij deze berekening is gebruik gemaakt van de metingen van A. König over de relatieve hoeveelheid der elementairkleuren rood, groen, blauw, als functie van de golflengte in wit zonlicht. Kent men voor een andere lichtbron de helderheidsverhouding t. o. v. eerstgenoemde als functie van de golflengte, dan kan men berekenen, wat de hoeveelheden rood, groen, blauw in deze andere lichtbron zijn. Noemt men de getallen van König $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $B(\lambda)$ die zoo gekozen zijn, dat

$$\int R(\lambda)\, d\lambda = 1000 \qquad \int G(\lambda)\, d\lambda = 1000 \qquad \int B(\lambda)\, d\lambda = 1000$$

en is $f(\lambda)$ de helderheid van een tweede lichtbron, dan geeft

$$\int f(\lambda)\, R\, d\lambda \qquad \int f(\lambda)\, G\, d\lambda \qquad \text{en} \qquad \int f(\lambda)\, B\, d\lambda$$

de hoeveelheid R, G, en B in dit licht aanwezig. Daar de helderheidsindruk van een lichtbron nagenoeg met de hoeveelheid R evenredig is, geeft deze berekening tegelijk een maat voor de optische helderheid.

De straling van een zwart lichaam is voor te stellen door

$$\lambda^{-\alpha}\, e^{-\frac{c}{T\lambda}} d\lambda$$

waar T de absolute temperatuur en α en c constanten zijn. Voor twee lichtbronnen van verschillende temperatuur is de verhouding der intensiteiten :

$$f(\lambda) = e^{-\frac{c}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} = e^{\frac{b}{\lambda}} = 10^{\frac{b'}{\lambda}}$$

als $b = c\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$ wordt gesteld en $b' = 0.43\, b$. Als eenheid voor λ nemen wij 0,001 mm; neemt men nu voor b' verschillende waarden aan, die den gloeiingsgraad uitdrukken t. o. v. die bij een

temperatuur T_0, dan kan men daarvoor zoowel helderheid en kleur, als ook de temperatuur (T_0 gegeven ondersteld, terwijl $c = 15000$ ongeveer) berekenen. [1]) Men vindt dan voor de gloeiingsgraden + 1,0 en — 1

$$\begin{array}{rrrrrrr} b' = +1 & 69200\ R & + & 68100\ G & + & 175800\ B \\ 0 & 1000\ R & + & 1000\ G & + & 1000\ B \\ -1 & 17{,}7\ R & + & 15{,}7\ G & + & 6{,}3\ B \end{array}$$

Drukt men de kleur uit door de relatieve hoeveelheden $R\ G\ B$ bij een totaalbedrag 1000, en de helderheid in grootteklassen, dan vindt men voor

$b' = +1$ $\quad Kl. = 221\ R + 218\ G + 562\ B$ $\quad H = +4{,}6$ *Gr. kl.*
$b' = -1$ $\quad Kl. = 445\ R + 396\ G + 160\ B$ $\quad H = -4{,}4$ *Gr. kl.*

De eerste kleur is dus te beschrijven als een mengsel van 654 wit en 347 van een blauw, dat uit 3 R en 344 B bestaat, dus in tint met λ 466 overeenkomt; de tweede kleur is een mengsel van 480 wit en 521 van een geel, dat uit 285 R en 236 G bestaat, dus met de golflengte λ 587 overeenstemt. Een gloeiingsgraad $b' = -2$, die in kleur nagenoeg met petroleumlicht overeenkomt, gaat gepaard met een vermindering in helderheid van 8,6 grootteklassen.

Voor de berekening van de atmosphierische absorptie werd aangenomen, dat de algemeene absorptie in een gas omgekeerd evenredig is met de vierde macht van de golflengte. Voor een willekeurig aangenomen gasdikte, die door vergelijking met Müller's spectraalphotometrische metingen met 1,05 atmosfeer bleek overeen te stemmen, werd $f(\lambda)$ berekend en daaruit als van een lichthoeveelheid $1000\ R + 1000\ G + 1000\ B$ overschietend gedeelte gevonden:

$$783\ R + 771\ G + 571\ B$$

dus op 1000 als som gereduceerd

$$368\ R + 363\ G + 269\ B$$

terwijl de helderheid 0,783 van de oorspronkelijke is, d. w. z. 0,27 Gr. kl. verzwakt.

De kleuring, die deze 1.05 atmosfeer teweeg brengt, komt nagenoeg overeen met die, welke een vermindering in gloeiingsgraad van $^1/_3$ bewerkt. Deze laatste levert namelijk

$$257\ R + 248\ G + 184\ B$$

dus op 1000 gereduceerd

$$372\ R + 361\ G + 267\ B$$

---

[1]) In de reeds geciteerde voordracht zijn, door de onderscheiding van b en b' over het hoofd te zien, verkeerde temperaturen opgegeven. De temperaturen 16000°, 7500°, 5000°, 3750°, 3000° C verschillen niet telkens 1, maar slechts 0.43 in gloeiingsgraad.

wat nagenoeg identiek is met het bovenstaande. De helderheid is hierbij echter tot 0.257 van de oorspronkelijke, dus 1.48 Gr. kl. verzwakt.

Hier blijkt dus, dat deze beide verschillende oorzaken wel gelijksoortige kleuren geven, maar dat deze gepaard gaan met geheel verschillende verzwakkingen van de helderheid. Relatief beschouwd kan men zeggen, dat atmosferische absorptie sterker roodkleurend, temperatuurverlaging sterker lichtverminderend werkt. Het is daarom niet mogelijk uit de kleur alleen tot het lichtuitstralend vermogen te besluiten, daar men niet weet, in welke mate elk der beide invloeden, temperatuur en absorptie, bij de verschillende spectraalklassen werkt. Nauwkeurige spectraalphotometrische metingen zullen misschien eenmaal veroorlooven beide invloeden te scheiden, want zij geven een verschillende verdeeling van de intensiteit over het spectrum. Voor de log. van de helderheid van verschillende λ t. o. v. λ 500 vindt men

	$\lambda =$ 650	600	550	500	450	400
bij abs. 1.05 atm.	+ 0.114	+ 0.083	+ 0.051	0.000	−0.084	−0.231
bij gloeiing — $^1/_3$	+ 0.154	+ 0.111	+ 0.061	0.000	−0.074	−.0166

Bij de laatste is de afname in intensiteit van rood naar violet gelijkmatiger, bij de eerste scherper toenemend.

Deze berekeningen toonen, dat het niet streng juist is, wat in de vorige mededeeling gezegd werd, als zou een roodere kleur noodzakelijk een zwakker lichtuitstralend vermogen meebrengen. Waar er twee invloeden zijn, die op verschillende wijze op kleur en helderheid inwerken, bestaat de mogelijkheid, dat een roodere kleur met sterker lichtuitstraling gepaard gaat, wanneer nl. de eene lichtbron een veel hooger temperatuur en tegelijk een sterker atmosferische absorptie heeft, dan de andere. Een $^1/_3$ eenheid hoogere gloeiingsgraad, gecombineerd met een absorptie van 2 atmosferen geeft naar bovenstaande cijfers zulk een geval.

Dit biedt dus een nieuwe mogelijkheid, de gevonden eigenaardigheid der *K* sterren te verklaren, door nl. aan te nemen, dat zij, vergeleken met de *G* sterren een veel hooger temperatuur hebben, die een sterker lichtuitstraling bewerkt, welke dan door een zeer sterke atmosferische absorptie weinig verzwakt, maar sterk roodgekleurd wordt. Wij moeten er echter bijvoegen, dat wij deze verklaring voor weinig waarschijnlijk houden, daar de banden-absorptie, die bij de *K* sterren begint en voor de *M* sterren (het 3de type) karakteristiek is, op een lager temperatuur wijst.

Scheikunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den heer J. J. VAN LAAR: *„Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen".* (Vierde mededeeling: *De lengteplooi*).

(Mede aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM).

1. Ten einde het overzicht van het tot dusver door mij behandelde te vergemakkelijken, wil ik nog even kortelijk recapituleeren wat aangaande het genoemde onderwerp in vier Verhandelingen in Deze Verslagen en in twee Verhandelingen in de Arch. Teyler reeds is medegedeeld.

a. In de *eerste* Verhandeling in Deze Verslagen (5 April 1905) werd voor mengsels van *normale* stoffen, in de onderstelling dat a en b onafhankelijk zijn van v en T, en dat $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ is, voor de *spinodale* lijnen afgeleid de vergelijking

$$RT = \frac{2}{v^3}[x(1-x)(av-\beta\sqrt{a})^2 + a(v-b)^2], \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl voor de v,x-projectie der *plooipuntslijn* werd gevonden:

$$(av-\beta\sqrt{a})^3[(1-2x)v-3x(1-x)\beta] +$$
$$+ \sqrt{a}(v-b)^2\left[3(av-\beta\sqrt{a})(av-2\beta\sqrt{a}) + \frac{a(v-b)(v-3b)}{x(1-x)}\right] = 0, \quad (2)$$

wanneer $\alpha = \sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}$ en $\beta = b_2 - b_1$ is.

b. In de *tweede* Verhandeling in Deze Verslagen (7 Juni 1905) werd de gedaante dezer lijnen voor verschillende gevallen nader onderzocht. Ter vereenvoudiging der berekeningen werd $\beta = 0$, d. w. z. $b_1 = b_2$ aangenomen, zoodat dan de verhouding θ der kritische temperaturen der beide componenten gelijk is aan de verhouding π der beide kritische drukken. Stellende alsdan $\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha} = \varphi$, $\frac{b}{v} = \omega$, $\frac{T}{T_0} = \tau$ (waar T_0 de „derde" kritische temperatuur is, d.w.z. de plooipuntstemperatuur bij $v = b$), zoo gaan de beide voorgaande vergelijkingen over in

$$\tau = 4\omega[x(1-x) + (\varphi + x)^2(1-\omega)^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$(1-2x) + 3(\varphi + x)(1-\omega)^2 + \frac{(\varphi + x)^3(1-\omega)^3(1-3\omega)}{x(1-x)} = 0. \quad (2a)$$

Het bleek nu, dat de plooipuntslijn een *dubbelpunt* bezit, wanneer $\varphi = 1{,}43$ is, d. w. z. $\theta = \pi = 2{,}89$. Is $\theta > 2{,}89$, dan vertoont zich het (abnormale) geval van fig. 1 (l. c.) (geconstrueerd voor $\varphi = 1$, $\theta = (1 + {}^1/_7)^2 = 4$); is daarentegen $\theta < 2{,}89$, dan het (normale) geval van fig. 2 (l. c.) (geconstrueerd voor $\varphi = 2$, $\theta = 2{}^1/_4$).

Tevens werd gewezen op de mogelijkheid van het optreden van een derde geval (fig. 3 l. c.), waarbij de van C_1 naar C_2 loopende tak van de plooipuntslijn *tweemaal* door een spinodale lijn wordt geraakt. Hierbij wordt dan ook nog de tak C_0A door een spinodale lijn geraakt. [in de beide eerste gevallen had dit telkens slechts één keer plaats, òf (in fig. 1 l. c.) op den tak C_1A (A is het punt $x = 0$, $v = b$), òf (in fig. 2 l. c.) op den tak C_0A (C_0 is het reeds genoemde derde kritische punt)].

Het bleek alzoo, dat *al* de door KUENEN gevonden abnormale gevallen reeds bij mengsels van *volkomen normale* stoffen kunnen optreden.

Het constateeren van het aanwezig zijn van *twee verschillende takken* der plooipuntslijn is voor de theorie der kritische verschijnselen voorzeker van belang, daar tal van verschijnselen, ook in verband met verschillende „kritische mengpunten", nu op ongedwongen wijze kunnen worden verklaard.

c. In de *derde* Verhandeling in deze Verslagen (14 Juli 1905) [1]) werd alsnu voor de *moleculaire verhooging* der laagste kritische temperatuur voor het *geheel algemeene* geval $a_2 \lessgtr a_1$, $b_2 \lessgtr b_1$ afgeleid de betrekking:

$$\Delta = \frac{1}{T_1}\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = \theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left[\theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left({}^3/_2 - {}^1/_2 \sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 - 1\right), \quad . \quad (3)$$

hetgeen voor het geval $\pi = 1$ ($p_2 = p_1$) overgaat in de zeer eenvoudige uitdrukking

$$\Delta = \theta(\theta - 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^a)$$

Deze formule werd met goed gevolg aan eenige waarnemingen van CENTNERSZWER en BÜCHNER getoetst.

d. De *vierde* Verhandeling verscheen in de Archives Teyler van Nov. 1905. Thans werd voor de bepaling van het *dubbelpunt* der plooipuntslijn de beperkende onderstelling $\beta = 0$ (zie *b.*) opgeheven, en het geheel algemeene geval $a_2 \lessgtr a_1$, $b_2 \lessgtr b_1$ beschouwd. Dit gaf tot zeer ingewikkelde berekeningen aanleiding, maar ten slotte werden uitdrukkingen afgeleid, waaruit voor elke waarde van $\theta = \frac{T_2}{T_1}$ de bijbehoorende waarde van $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, alsmede de waarden van x en v in het dubbelpunt kunnen worden berekend.

---

[1]) De drie genoemde stukken zijn vereenigd verschenen in de Arch. Néerl. van Nov. 1905.

Behalve het speciale geval $\theta = \pi$ (zie *b.*) werd nog het geval $\pi = 1$ nagegaan, en gevonden dat alsdan het dubbelpunt aanwezig is bij $\theta = 9{,}90$. Dit punt ligt dan op de lijn $v = b$.

e. De *vijfde* Verhandeling (Deze Verslagen van 10 Jan. 1906) [1]) bevatte de voorwaarde voor een *minimale kritische* (*plooipunts*) *temperatuur*, en die voor een *maximalen dampdruk* bij hoogere temperaturen. (d. w. z. wanneer bij lagere temperaturen de driephasendruk grooter is dan de dampdrukken der componenten). Voor de eerste voorwaarde werd gevonden :

$$\theta < \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi} - 1)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

voor de tweede:

$$\theta < \frac{\pi}{2\sqrt{\pi} - 1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

welke voorwaarden elkaar dus niet altijd insluiten. [2])

Daarna werden de connodale verhoudingen bij de drie hoofdtypen besproken, in aansluiting met hetgeen reeds vroeger door KORTEWEG (Arch. Néerl. 1891) en later door VAN DER WAALS (Deze Verslagen van 5 April 1905) was geschreven. De achtereenvolgende transformaties van hoofd- en zijplooi kwamen thans *in verband met den door mij bestudeerden loop der plooipuntslijn, en van hare splitsing in twee takken*, in een helder licht.

f. In de *zesde* Verhandeling (Arch. Teyler van Mei 1906) werden eerst de genoemde connodale verhoudingen nog iets uitvoeriger behandeld, waarbij ook de p, x-voorstellingen werden gegeven. Daarna werd bewezen, dat de punten R_1, R_2 en R'_2, waar de spinodale lijnen de plooipuntslijn raken, *keerpunten* in de p,T-voorstelling zijn.

Alsdan werd een grafische voorstelling ontworpen van de correspondeerende waarden van θ en π voor het dubbelpunt in de plooipuntslijn, in verband met de onder *d.* genoemde berekeningen.

Zoowel de grafische voorstelling als de daarbij behoorende tabel zijn hier gereproduceerd. De uitkomsten zijn van genoegzaam belang om er hier nog even in het kort op terug te komen.

Men kan nl. alle mogelijke paren van stoffen karakterizeeren door de waarden van θ en π, en het zal ten slotte alleen van deze waarden afhangen, welk der drie hoofdtypen zal optreden. Om hiervan een overzicht te verkrijgen, is het van belang na te gaan voor welke combinatie (θ, π) het eene type in het andere overgaat. Wat den

---

[1]) Opgenomen in de Arch. Néerl. van Mei 1906.

[2]) Deze uitkomsten werden later (Deze Verslagen van 7 Febr. 1906; zie ook in de Engelsche vertaling de Noot op blz. 749) door VERSCHAFFELT bevestigd.

overgang van type I tot II (III) betreft, zijn het juist die combinaties voor welke de plooipuntslijn een dubbelpunt heeft. In fig. 1 (zie de plaat hierachter) stelt nu elk punt van het vlak een combinatie (θ, π) voor, waaraan telkens een bepaald stoffenpaar zal beantwoorden.

$\theta = \frac{T_2}{T_1}$	$\pi = \frac{p_2}{p_1}$	x	v/b
1,00	7,50 en 0,13	0,96 en 0,040	2,57 en 2,57
1,19	7,21 » 0,13	0,94 » 0,036	2,49 » 2,60
1,71	6,26 » 0,13	0,84 » 0,025	2,26 » 2,68
1,88	5,76 » 0,13	0,78 » 0,021	2,18 » 2,71
2,04	5,42 » 0,12	0,72 » 0,018	2,11 » 2,74
2,22	4,94 » 0,12	0,63 » 0,014	2,02 » 2,79
2,89	2,89 » 0,12	0,24 » 0,003	1,73 » 2,87
9,90	1,00 » 0,11	0,01 » 0,001	1,00 » 2,95
∞	— » 0,11	— » 0,000	— » 3,00

In genoemde fig. dan geeft de lijn $C'APB$ de correspondeerende waarden van θ en π aan van $\theta = 0$ tot $\theta = 9{,}9$. Bij C' is $\theta = 0$. $\pi = 9$, bij A is $\theta = 1$, $\pi = 7{,}5$; met $\theta = 2{,}22$ correspondeert $\pi = 4{,}94$ (Geval $\pi = \theta^2$ of $a_2 = a_1$); bij P is $\pi = \theta = 2{,}89$ (Geval $\pi = \theta$ of $b_2 = b_1$); bij B is $\theta = 9{,}9$, $\pi = 1$. Bij waarden van $\theta > 9{,}9$ zou het dubbelpunt aan de zijde der lijn $v = b$ komen te liggen, waar $v < b$ is. Uit de figg. 23, 24 en 25 van de genoemde Verhandeling blijkt, dat alsdan de lijn BD ($\pi = 1$) de afscheiding vormt tusschen type I en II (III). Immers, uitgaande van een punt waar $\pi < 1$ (hoe weinig ook) en θ betrekkelijk laag, waar men zich dus zeker in het gebied II (III) bevindt, zoo is het duidelijk dat men dit gebied niet kan verlaten, wanneer men bij die waarde van π de waarde van θ laat toenemen. Want men kan nooit tot type I overgaan, wanneer niet voor *realizeerbare* waarden van v (dus $< b$) een dubbelpunt bereikt wordt, en nu leert een eenvoudige beschouwing (zie de geciteerde Verhandeling), dat voor $\pi < 1$ een dubbelpunt altijd zou beantwoorden aan een waarde van $v < b$.

Nu is het duidelijk, dat $\theta = 0$, $\pi = 9$ hetzelfde is als $\theta = \infty$, $\pi = {}^1/_9$; dat $\theta = \pi = 2{,}89$ identiek is met $\theta = \pi = {}^1/_{2{,}89} = 0{,}35$; enz. enz. (de beide componenten zijn dan eenvoudig verwisseld), zoodat met de lijn $C'A$ zal correspondeeren de lijn CA', terwijl met AB correspon-

deert $A'B'$. Beschouwt men nu alleen waarden van θ, welke > 1 zijn, neemt men m. a. w. altijd $T_2 > T_1$ aan, dan kan men zeggen dat het gebied van het normale type II (III) praktisch begrensd is door de lijnen ABD, AA' en $A'C$. Rechts van ABD heeft men het abnormale type I ($C_2H_6 + CH_3OH$, aether $+ H_2O$); links van $A'C$ eveneens type I. Maar terwijl in het eerste gebied van I de takken der plooipuntslijn C_2C_0 en C_1A zijn, zijn deze in het tweede gebied van I C_1C_0 en C_2B (zie figg. 23—25 l. c.). Men kan nl. gemakkelijk aantoonen (l. c.), dat bij $\pi > 1$ de takken der plooipuntslijn òf C_1C_2 en C_0A (type II en III), òf C_1A en C_0C_2 (type I) zijn, terwijl bij $\pi < 1$ deze takken zijn C_1C_2 en C_0B (type II en III) of C_2B en C_0C_1 (type I). De lijn $\pi = 1$ verdeelt dus het gebied van type II (III) in twee stukken, waar men resp. het aangeduide verloop der plooipuntslijn-takken zal hebben (n.l. bij $\theta > 1$). Maar in de praktijk zal het wel nimmer voorkomen, dat bij $\theta > 1$ een waarde van π correspondeert, welke veel kleiner dan 1 is, want met een hoogere kritische temperatuur stemt meestal ook een hoogere kritische druk overeen. Men kan dus zeggen, dat bij een gegeven waarde van π het abnormale type I intreedt, wanneer θ *betrekkelijk groot* is [grooter dan de met die waarde van π correspondeerende dubbelpunts (van de plooipuntslijn) waarde van θ], terwijl het normale type II (of III) intreedt, wanneer θ *betrekkelijk gering* is. (kleiner dan de genoemde dubbelpuntswaarde).

Het is alsnu van het grootste belang na te gaan, wanneer het type II overgaat in III, waar de plooipuntslijn C_1C_2 tweemaal door een spinodale lijn (in R_1 en R_2') wordt geraakt. Dit onderzoek vormt het slot van de laatste Verhandeling in de Arch. Teyler.

De berekeningen worden echter zoo uiterst ingewikkeld, dat deze voor het geheel algemeene geval $a_2 \gtrless a_1$, $b_2 \gtrless b_1$ praktisch onuitvoerbaar bleken. Alleen de bijzondere gevallen $\beta = 0$ ($b_2 = b_1$ of $\pi = \theta$) en $\pi = 1$ waren voor berekening vatbaar, hoewel deze dan nòg vrij gecompliceerd was.

Het bleek dan, dat bij $\beta = 0$ het gebied van het type III juist $= 0$ is, dat het gelijktijdig verschijnt en verdwijnt in het dubbelpunt P, waar $\pi = \theta = 2{,}89$ is. Maar in het geval $\pi = 1$ is het gebied gelegen tusschen $\theta = 4{,}44$ en $\theta = 9{,}9$ (het dubbelpunt). Dit is dus QB in fig. 1. D. w. z. bij waarden van $\theta > 1$ en $< 4{,}44$ heeft men type II (zie fig. 2^a); bij $\theta = 4{,}44$ (in Q) verschijnt een buigpunt in de plooipuntslijn (zie fig. 2^b), terwijl van $\theta = 4{,}44$ tot $\theta = 9{,}9$ het type III optreedt (fig. 2^c) met twee raakpunten R_1 en R_2' der spinodale lijnen aan de plooipuntslijn. Dit type verdwijnt in het dubbelpunt P, waar $\theta = 9{,}9$, en R_2 en R_2' samenvallen in P (fig. 2^d),

en gaat voor waarden van $\theta > 9{,}9$ over in het type I (fig. 2^e). Wij merken op, dat de figg. 2^a—2^e geteekend zijn voor een tusschengelegen geval (d. w. z. tusschen $\pi = \theta$ en $\pi = 1$, zie fig. 1), want bij $\pi = 1$ zou de tak AR_2C_0 met AB ($v = b$) samenvallen. Daarom is de speciale waarde 4,44 vervangen door θ_q (de waarde van θ bij Q) en de waarde 9,9 door θ_p (de waarde van θ bij P).

Van de kromme, die het type II van het type III afscheidt, kennen wij dus tot dusver slechts de punten P en Q (zie fig. 1) en is het verdere verloop dezer lijn nog geheel onbekend, waarom wij die voorloopig door een stippellijn hebben aangeduid.

In elk geval is door de onderzoekingen, in het stuk in de Arch. Teyler neergelegd, *bewezen*, dat dit zeer abnormale type III *bij mengsels van normale stoffen mogelijk is.* Zijn de kritische drukken der beide komponenten gelijk ($\pi = 1$), dan komt het type voor zoodra θ inligt tusschen 4,4 en 9,9. De kritische temperaturen moeten dus ver uiteen liggen, maar niet (zie fig. 1) zoover als noodig zou zijn voor het optreden van type I.

Wij willen er nogmaals met nadruk op wijzen, dat de *numerieke* uitkomsten van ons onderzoek natuurlijk zullen gewijzigd worden, wanneer b niet onafhankelijk van v en T wordt aangenomen, of wanneer een of beide componenten associeerende stoffen mochten zijn. Daardoor zullen de typen III en I *eerder* optreden, dan boven is afgeleid (d. w. z. bij geringere waarden van θ bij overigens gelijke waarden van π), maar dat *kwalitatief* alles hetzelfde zal blijven. Dit blijkt reeds hieruit, dat het vervangen van de vereenvoudigende onderstelling $b_1 = b_2$ door de geheel algemeene aanname $b_1 \lessgtr b_2$ (in het eerste stuk in de Arch. Teyler) niets aan het bestaan van een dubbelpunt in de plooipuntslijn bij bepaalde correspondeerende waarden van θ en π heeft veranderd, en dat ook de berekeningen voor de begrenzing van het type III (in het tweede stuk in de Arch. Teyler) kunnen geschieden voor het geheel algemeene geval $b_1 \lessgtr b_2$. De verschijnselen blijven dus kwalitatief geheel dezelfde bij zeer verschillende waardeparen van b_1 en b_2, en zullen dus ook niet *in wezen* veranderen, wanneer één bepaald waardepaar, geldende bv. bij de kritische omstandigheden van een der componenten, veranderingen ondergaat, hetzij door associatie, hetzij door andere oorzaken, wanneer v of T veranderen — evenmin als bv. de kritische verschijnselen bij een enkelvoudige stof *in wezen* zullen veranderen, wanneer b niet meer konstant is, maar van v en T afhankelijk wordt ondersteld, of wanneer die stof complexe moleculen vormt.

De Lengteplooi.

2. In vroegere Verhandelingen is aangetoond, dat zoowel bij type I in de lijn C_0C_2, als bij type II in de lijn C_0A in de nabijheid van C_0 een minimum-plooipuntstemperatuur optreedt, en dat er dus *van uit* C_0 bij een bepaalde temperatuur T_0 (de plooipuntstemperatuur in C_0) bij temperatuursverlaging een *afzonderlijke plooi* begint uit te gaan, welke zich later (bij de minimale plooipuntstemperatuur) in een homogeen dubbelpunt met de hoofdplooi (of de nevenplooi daarvan) zal vereenigen. Gevolg hiervan is, dat bij type I bv. bij lagere temperaturen de hoofdplooi altijd naar de zijde der kleine volumina zal *geopend* zijn, zoodat drukverhooging de beide gesplitste phasen nooit kan doen samenvallen.

Beschouwen wij echter speciaal het geval van type II. Hier is de gewone gang van zaken, o.a. geteekend in de laatst geciteerde Akademieverhandeling van 10 Jan. 1906, deze. Bij een bepaalde temperatuur, gaande van hoogere naar lagere temperaturen, raakt een spinodale lijn in R_2 aan den tak der plooipuntslijn AC_0. Er begint zich op de bekende wijze binnen de eigenlijke connodale lijn een gesloten connodale lijn te vormen, die bij lagere temperatuur buiten de oorspronkelijke connodale treedt, en het aanzijn geeft aan een nieuwe (neven)-plooi, en tegelijk aan een driephasenevenwicht (fig. 3^a en 3^b). Deze nevenplooi is in vele gevallen reeds opgetreden vóór bij iets lagere temperatuur de plooi van uit C_0 zich begint te ontwikkelen. Beide plooien vallen later samen (bij de minimumtemperatuur in D), en vormen daarna weer een doorloopende nevenplooi (fig. 3^c). [1])

Nu ligt het punt D voor het bijzondere geval $b_2 = b_1$ altijd zeer dicht bij C_0 (zie het onder *b.* in § 1 geciteerde Akademiestuk). Is alsdan bv. $T_2/T_1 = 2^1/_4$, dan is $T_m/T_0 = 0{,}96$, wanneer T_m de temperatuur in het minimum bij D voorstelt. De eigenlijke lengteplooi rondom C_0 bestaat dan slechts bij zeer hooge drukken (fig. 3^b), terwijl de geopende plooi van fig. 3^c moeilijk een lengteplooi kan genoemd worden, maar veeleer de met de oorspronkelijke lengteplooi samengegroeide nevenplooi der dwarsplooi is. Drukverhooging heeft hier altijd een toenadering der beide coëxisteerende vloeistofphasen tengevolge, tenzij bij zeer hooge drukken, waar die phasen weer uiteenwijken.

Berekening leert nu, dat in het geheel algemeene geval $b_1 \lessgtr b_2$

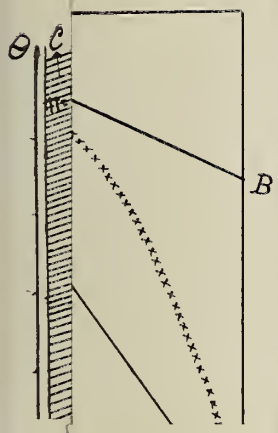
[1]) In deze en eenige volgende figuren schijnen de spinodale lijnen in het homogene dubbelpunt D elkaar te raken in plaats van te *snijden*, zooals het behoort.

het punt D veel dichter in de nabijheid van R_2 kan komen, en ook dat de temperatuur in het plooipunt C_0 betrekkelijk hoog kan uitvallen, zoodat de lengteplooi in tegenstelling van het in fig. 3^a voorgestelde reeds rondom C_0 aanwezig is lang voor zich een driephasenevenwicht bij M heeft gevormd. (fig. 4^a en 4^b). Het samenvallen van deze lengteplooi, die dan reeds een groote uitbreiding heeft verkregen, met de nevenplooi heeft dan ook veel meer in de nabijheid van de lijn 1, 2 van den driephasendriehoek plaats, zoodat na de samenvloeiïng de plooi de in fig. 4^c geteekende gedaante verkrijgt, waardoor zij het karakter der eigenlijke lengteplooi grootendeels behoudt. Aanvankelijk heeft dus drukverhooging een toenadering der phasen tengevolge (dit gedeelte kan uiterst gering zijn, maar het zal in het algemeen altijd bestaan); daarna doet verdere drukverhooging de phasen 1 en 2 wederom uiteenwijken, totdat x_1 en x_2 bij $p = \infty$ tot grenswaarden naderen, zonder dat de lengteplooi — zooals vroeger wel mogelijk werd geacht [zie o.a. VAN DER WAALS, Cont. II, blz. 190 (1900)] — zich ooit weer sluit. Want tengevolge van het minimum bij D omsluit de lengteplooi altijd het punt C_0. Alleen bij temperaturen hooger dan T_0, waarbij de lengteplooi nog niet bestaat, kan er van blijvende homogeniteit bij hooge drukken sprake zijn. Maar dan behoort het plooipunt P tot de *nevenplooi* van de *dwarsplooi*, en *niet* tot de lengteplooi. Dit wordt aangegeven o. a. door fig. 3^a, *nadat* de gesloten connodale in M door de eigenlijke connodale der dwarsplooi is heengebroken; of door fig. 3^b, *voordat* zich een lengteplooi rondom C_0 heeft ontwikkeld.

Natuurlijk kan ook het geval zich voordoen, dat de plooi rondom C_0 met de nevenplooi samenvalt op het oogenblik dat deze met haar plooipunt juist uit de dwarsplooi te voorschijn treedt, zooals fig. 5^a te zien geeft, maar dit involveert noodzakelijk een *betrekking* tusschen θ en π en is dus altijd een *zeer bijzonder geval.* Het naar buiten treden van de nevenplooi heeft dan toevallig juist in het minimum bij D plaats. Na het samenvallen vertoont de plooi dan de gedaante als in fig. 5^b is geteekend. Thans doet drukverhooging de beide phasen 1 en 2 *van den aanvang af* uiteengaan.

Maar het kan ook voorkomen, dat de lengteplooi rondom C_0 de connodale lijn der dwarsplooi treft, *voordat* de gesloten connodale lijn naar buiten is getreden (fig. 6^a). Het driephasenevenwicht ontwikkelt zich dan niet, zooals bij fig. 4^a, aan de dwarsplooi (waaruit een nevenplooi te voorschijn treedt), maar aan de *lengteplooi* rondom C_0. Deze boort zich dan verder in de dwarsplooi in, tot zij in D de geïsoleerde gesloten connodale ontmoet (fig. 6^b), waarna de samenvloeiïng met deze in het irrealizabele gebied plaats heeft (fig. 6^c).

J.



het punt D veel dichter in de nabijheid van R_2 kan komen, en ook dat de temperatuur in het plooipunt C_0 betrekkelijk hoog kan uitvallen, zoodat de lengteplooi in tegenstelling van het in fig. 3^a voorgestelde reeds rondom C_0 aanwezig is lang voor zich een driephasenevenwicht bij M heeft gevormd. (fig. 4^a en 4^b). Het samenvallen van deze lengteplooi, die dan reeds een groote uitbreiding heeft verkregen, met de nevenplooi heeft dan ook veel meer in de nabijheid van de lijn 1, 2 van den driephasendriehoek plaats, zoodat na de samenvloeiïng de plooi de in fig. 4^c geteekende gedaante verkrijgt, waardoor zij het karakter der eigenlijke lengteplooi grootendeels behoudt. Aanvankelijk heeft dus drukverhooging een toenadering der phasen tengevolge (dit gedeelte kan uiterst gering zijn, maar het zal in het algemeen altijd bestaan); daarna doet verdere drukverhooging de phasen 1 en 2 wederom uiteenwijken, totdat x_1 en x_2 bij $p = \infty$ tot grenswaarden naderen, zonder dat de lengteplooi — zooals vroeger wel mogelijk werd geacht [zie o.a. VAN DER WAALS, Cont. II, blz. 190 (1900)] — zich ooit weer sluit. Want tengevolge van het minimum bij D omsluit de lengteplooi altijd het punt C_0. Alleen bij temperaturen hooger dan T_0, waarbij de lengteplooi nog niet bestaat, kan er van blijvende homogeniteit bij hooge drukken sprake zijn. Maar dan behoort het plooipunt P tot de *nevenplooi* van de *dwarsplooi*, en *niet* tot de lengteplooi. Dit wordt aangegeven o. a. door fig. 3^a, *nadat* de gesloten connodale in M door de eigenlijke connodale der dwarsplooi is heengebroken; of door fig. 3^b, *voordat* zich een lengteplooi rondom C_0 heeft ontwikkeld.

Natuurlijk kan ook het geval zich voordoen, dat de plooi rondom C_0 met de nevenplooi samenvalt op het oogenblik dat deze met haar plooipunt juist uit de dwarsplooi te voorschijn treedt, zooals fig. 5^a te zien geeft, maar dit involveert noodzakelijk een *betrekking* tusschen θ en π en is dus altijd een *zeer bijzonder geval*. Het naar buiten treden van de nevenplooi heeft dan toevallig juist in het minimum bij D plaats. Na het samenvallen vertoont de plooi dan de gedaante als in fig. 5^b is geteekend. Thans doet drukverhooging de beide phasen 1 en 2 *van den aanvang af* uiteengaan.

Maar het kan ook voorkomen, dat de lengteplooi rondom C_0 de connodale lijn der dwarsplooi treft, *voordat* de gesloten connodale lijn naar buiten is getreden (fig. 6^a). Het driephasenevenwicht ontwikkelt zich dan niet, zooals bij fig. 4^a, aan de dwarsplooi (waaruit een nevenplooi te voorschijn treedt), maar aan de *lengteplooi* rondom C_0. Deze boort zich dan verder in de dwarsplooi in, tot zij in D de geïsoleerde gesloten connodale ontmoet (fig. 6^b), waarna de samenvloeiïng met deze in het irrealizabele gebied plaats heeft (fig. 6^c).

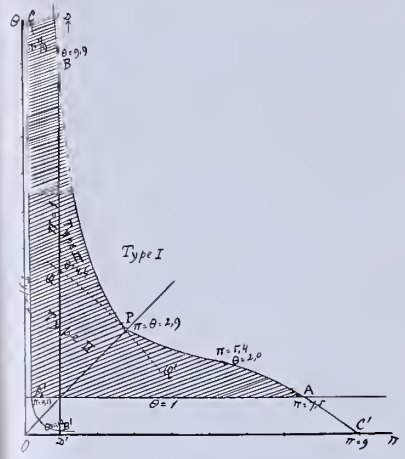


Fig. 1.

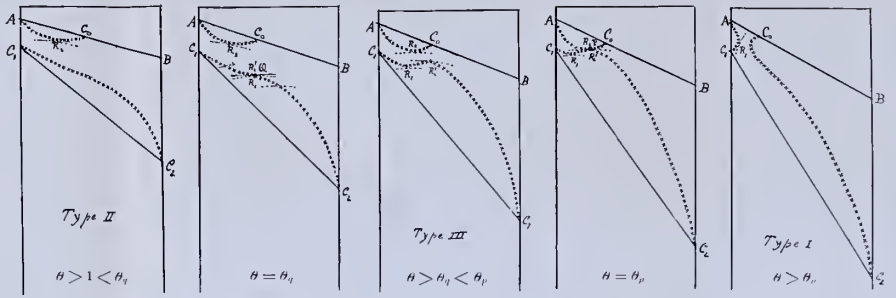


Fig. 2a. Fig. 2b. Fig. 2c. Fig. 2d. Fig. 2e.

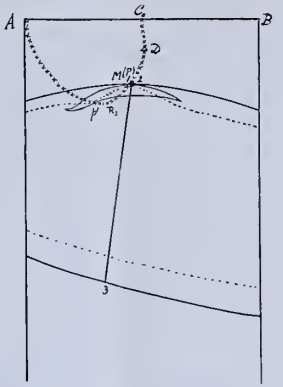


Fig. 3a.

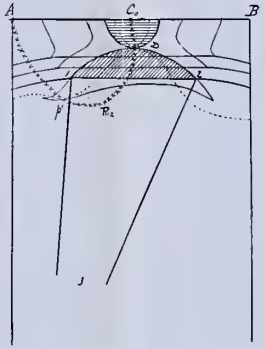


Fig 3c.

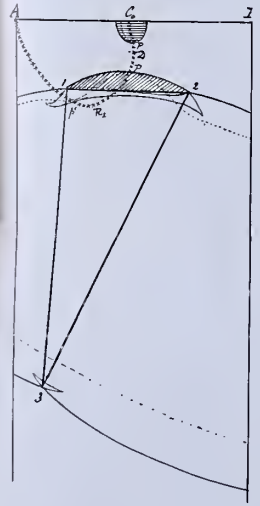


Fig. 3b.

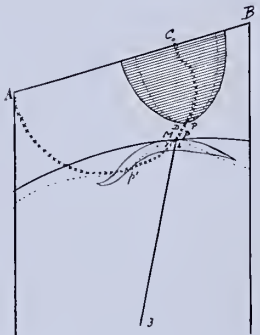


Fig. 4a.

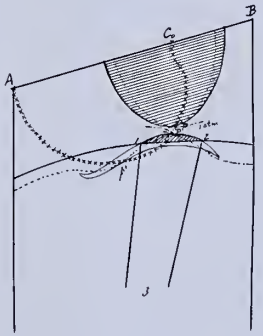


Fig. 4b.

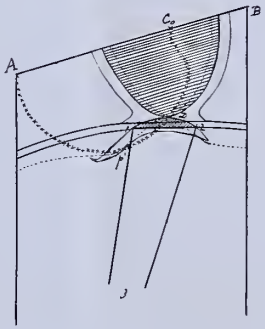


Fig. 4c.

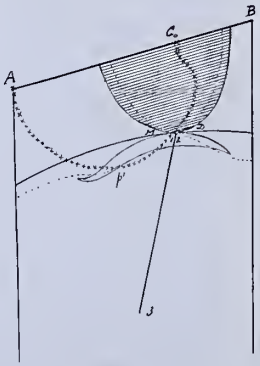


Fig. 5a.

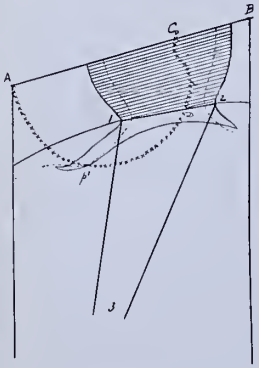


Fig. 5b.

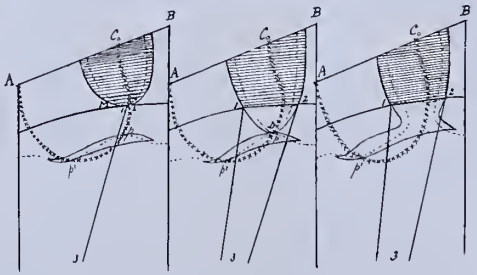


Fig. 6a. Fig. 6b. Fig. 6c.

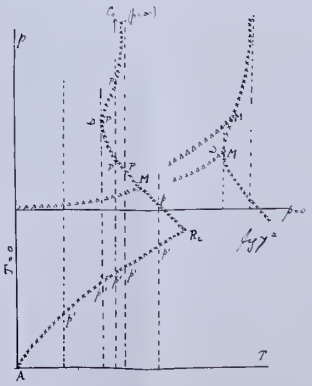


Fig 7.

Deze plooi is dan de *eigenlijke lengteplooi*, waarvan bij mengsels van moeilijk mengbare stoffen meestal sprake is. Maar men vergete daarbij niet, dat zich evengoed het boven behandelde geval van fig. 4 kan voordoen, met dat van fig. 5 als overgangsgeval.

De berekening leert, dat het overgangsgeval intreedt, wanneer de verhouding θ der kritische temperaturen der beide componenten in de nabijheid is van 1, terwijl de verhouding τ der kritische drukken tegelijk vrij groot is.

Van deze verschillende verhoudingen geven ook de beide p, T-voorstellingen van fig. 7 en fig. 7ª een duidelijk beeld. (De temperatuur van C_0 is daar lager aangenomen dan die van R_2, maar zij kan evengoed hooger zijn). De plooipunten p' op het gedeelte R_2A beneden het keerpunt zijn de onrealizeerbare plooipunten (zie ook fig. 3—6); de plooipunten p op het gedeelte R_2M vóór M evenzoo. (de geïsoleerde gesloten connodale is dan nog niet naar buiten getreden); terwijl de plooipunten P voorbij M alle realizeerbaar zijn.

Wij komen dus na het bovenstaande tot de conclusie, dat in al de gevallen, waarin een duidelijke lengteplooi optreedt van den vorm als in fig. 4^c of 6^c (wanneer dus het minimum D dicht bij R_2 ligt), het kritische mengpunt M der drie phasen niet altijd op de lengteplooi behoeft te liggen (zie fig. 4^a), en ook dat de lengteplooi met haar plooipunt P niet altijd zal samenvallen met de dwarsplooi zelf, maar ook met de nevenplooi van deze kan samenvallen, zoodat op dat oogenblik geen driephasenevenwicht, d. w. z. geen dampphase aanwezig is (zie fig. 4^c). Wel vallen dan de beide vloeistofphasen 1 en 2 samen.

Het geval, in fig. 5^a en 5^b geteekend, blijft natuurlijk hooge zeldzaamheid, en men kan de voorwaarden voor het optreden daarvan berekenen (zie boven). Maar deze berekening, alsook die welke in het algemeen de ligging der punten R_2, D en M aangeeft, zal elders (in de Arch. Teyler) worden gepubliceerd. Het spreekt echter van zelf, dat de bovenstaande algemeene beschouwingen in geenen deele van deze speciale berekeningen afhankelijk zijn.

Het is wellicht niet overbodig op te merken, dat de samenstelling x_3 der dampphase, nòch in fig. 4^a, nòch in fig. 5^a of 6^a, gelijk is aan de samenstelling der beide samenvallende vloeistofphasen $x_{1,2}$, zooals VAN DER LEE in zijn Akademisch Proefschrift (1898) ten onrechte meent te hebben aangetoond [zie bl. 66—69, 73—74 en Stelling III; ook VAN DER WAALS, Cont. II, bl. 181 (1900)]. Wij weten nl. thans, dat wanneer x_3 bij lagere temperaturen tusschen x_1 en x_2 inligt, dit niet behoeft te blijven totdat x_1 en x_2 zijn samengevallen. Dit laatste zou zeer toevallig zijn; in het algemeen zal het eene der

beide maxima, bv. in de p,x-lijn, welke in het labiele gebied tusschen x_1 en x_2 inliggen, *naar buiten treden voordat* x_1 en x_2 zijn samengevallen. Zie de figg. 12^a tot 12^f in mijne Verhandeling in Deze Verslagen van 5 April 1905 en § 8 bl. 669—670, benevens de Noot op bl. 665. Reeds in een vroeger stuk (Deze Verslagen van 27 Juni 1903) had ik dit uitvoerig aangetoond, en KUENEN kwam iets later (Deze Verslagen van 31 Oct. 1903) onafhankelijk van mij tot het zelfde inzicht. [1]) En in 1900 had SCHREINEMAKERS (Z. f. Ph. Ch. **35**, p. 462—470) dit naar buiten treden proefondervindelijk aangetoond, juist bij het zelfde mengsel (phenol en water), waarvoor VAN DER LEE theoretisch meende te kunnen bewijzen, dat $x_3 = x_{1,2}$ zou wezen. [2])

Ten slotte wil ik er nog even op wijzen, dat in het eigenaardig verloop der p,T-voorstelling van de plooipuntslijn (fig. 7) in de nabijheid van het punt D, en in het *niet* samenvallen der beide kritische momenten, door fig. 4^a en 4^c aangegeven (daar D en M in het algemeen *niet* samenvallen), wellicht de sleutel ligt ter verklaring van een hoogst raadselachtig en tot nu toe onverklaard verschijnsel, dat zoowel GUTHRIE als ROTHMUND [Z. f. Ph. Ch. **26**, p. 446 (1898)] [3]) bij hunne proeven hebben waargenomen, nl. het optreden en weder verdwijnen van een duidelijke troebeling bij verhitting boven de „kritische mengtemperatuur", welke troebeling dikwijls tot 10° boven deze temperatuur bleef bestaan.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. F. MULLER: *„De placentatie van Sciurus vulgaris"*.

(Medeaangeboden door den Heer L. BOLK).

I. Allerjongste stadia. De eerste stadia van ontwikkeling maakt het ei van Sciurus door in den oviduct.

Inmiddels heeft de twechoornige uterus zich op de komst van het eitje voorbereid: anti-mesometraal heeft beneden het éénlagige epitheel de mesometraal zeer dun blijvende mucosa zich zeer sterk verdikt, zoodat een spleetvormig excentrisch lumen van T-vorm

[1]) Zie ook KUENEN: Theorie der Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen. Leipzig 1906, bl. 170, Noot.

[2]) De aanname $x_3 = x_{1,2}$ in het punt M voert trouwens, zooals de berekeningen leeren, niet alleen tot vreemde, maar tot hoogst absurde gevolgtrekkingen.

[3]) Zie ook FRIEDLÄNDER, Ueber merkwürdige Erscheinungen in der Umgebung des kritischen Punktes. Z. f. Ph. Ch. **38**, p. 385 (1901).

(dwarsstuk : mesometraal) overblijft. Een voorbereiding speciaal van de aanhechtingsplaats der eieren is nergens aantoonbaar. Wel is een sub-epitheliaal liggende zone kernrijker dan het losse bindweefsel dat deze laag scheidt van de muscularis.

II. Praeplacentaire stadia. (Van de aankomst van het eitje in den uterus tot den eersten aanleg der allantoide placenta).

De eitjes fixeeren zich in verschillend aantal, rechts veelal meer dan links, op ongeveer gelijke afstanden aan den anti-mesometralen (i. e. anti-placentairen) uteruswand en wel met hun vegetatieven pool. Een zona pellucida is afwezig, daarentegen omgeeft het ei zich met een massa, gevormd uit kliersecreta, transsudatievloeistof van cellige afkomst van den uteruswand.

De eitjes nemen vrij snel in grootte toe, voor 't grootste deel door uitzetting van de navelblaas, die in deze stadia nog het voornaamste deel van het ei uitmaakt. Eigenaardig is dat de area vasculosa zoo klein blijft, dat alleen entoderm en trophoblast over 't grootste deel van de navelblaas de kiemblaaswand vormen.

De uteruswand vertoont in dit tijdperk krachtige actie, vele processen spelen zich hier snel na en naast elkaar af. Alle beginnen zij op de plaats waar het eitje zich heeft genesteld en breiden zich van dit punt naar alle richtingen uit, meer en meer zoowel de tusschen de fixatieplaatsen der eieren overgebleven ruimten van den uterushoorn, als de mesometraal gelegen deelen bereikend; alle beginnen zij verder subepitheliaal, gaandeweg dieper en dieper doordringend. De opeenvolging dier processen geeft zoo aanleiding tot het ontstaan van schotelvormige lagen van verschillenden bouw, die het ei aan de anti-mesometrale zijde omgeven, en wier meest uitgesproken karakter telkens te vinden is in de het verst van het mesometrium afgelegen punten. Door de uitzetting van het anti-mesometrale deel van het lange einde van het T-vormige lumen ontstaat hier een verbreeding, die, meer en meer mesometraalwaarts voortschrijdend, ten slotte een ruimte doet ontstaan, waarvan de vorm op een dwarsdoorsnede overeenkomt met die van een kegel, mesometraalwaarts afgeknot door het oude dwarsstuk van de T, anti-mesometraalwaarts begrensd door een cirkelsegment conform aan de navelblaas. De hierdoor gevormde eikamers zijn ontstaan ingevolge van groei en uitzetting van den anti-mesometralen wand van den uterus, waardoor de deze verbindende stukken van den hoorn ingeplant zijn aan de mesometrale zijde der vruchtkamers en tevens naar dezen kant zijn afgebogen. De woekering in stromaweefsel, in de subepitheliale laag beginnend, dringt de mondingen der klieren uiteen. Later degenereert het epitheel

hierin, de wanden verkleven, ten slotte vindt men nog maar klierresten onder de muscularis in het meer normale stroma.

De processen, waardoor de eerste vorming van schotelvormige lagen plaats heeft, welke echter steeds een relatief kort bestaan hebben, zijn de met woekering van de subepitheliale, kernrijke zone gepaard gaande, oedemateuze imbibitie van 't weefsel en oplossing van cellige elementen, waardoor ten slotte een holtesysteem ontstaat, begrensd door dunne celbalken en gevuld met producten van oedeem en oplossing van weefsel. Deze laag is van buiten omgeven door lagen, die den overgang vormen tot het nog normale, alleen gewoekerde weefsel, terwijl zij aan 't lumen meer en meer gescheiden wordt door producten van een later proces.

Zeer merkwaardig is het in dezen tijd optreden van „reuzencellen", plasmaklompen van verschillende grootte, die zich donker kleuren en vele reuzenkernen met een grooten nucleolus bevatten. Individueel verschillend vindt men samenhangende lagen of meer afzonderlijke groepen, naar 't schijnt. Zij liggen meestal oppervlakkig, vaak in verband met den trophoblast, niet met de vaten. Oppervlakkig zou men ze gaarne houden voor foetale „zuigwortels" van den trophoblast, door Rejsek bij Spermophilus beschreven. Daar men alle overgangen vindt tusschen het mucosaweefsel en deze elementen, soms zelfs den overgang kon vervolgen; daar zij verder aan 't ei worden gevonden, bezig zich op te lossen in de dit omgevende massa; echter nooit een ontstaan uit den trophoblast kon worden waarschijnlijk gemaakt, zijn de reuzencellen om deze en andere redenen m. i. te beschouwen als een degeneratieve materne vorming, als een symplasma. Met de „monstre cells" van Minot, Schoenfeld, e. a. bij 't konijn beschreven, zijn zij niet te identificeeren, daar deze elementen ook bij Sciurus te vinden zijn, echter veel later. Ten slotte spreken vergelijkend anatomische beschouwingen vóór mijn opvatting (zie beneden).

Het uteres-epitheel verdwijnt gaandeweg overal waar de kiemblaas er mede in aanraking is. Van woekering er van is nu nooit sprake.

Reeds betrekkelijk snel (zelfs met een zeer uitgebreid materiaal zijn de overgangen moeilijk te volgen!) ontstaat een tweede stadium, waarin van de oppervlakte af door woekering van de stromacellen een schotel ontstaat van cubische cellen met gegranuleerd plasma (decidua), die zich meer en meer uitbreidt, terwijl, waarschijnlijk door resorptie onder invloed van den druk, de boven beschreven holten verdwijnen. Intusschen veranderen de deciduacellen aan de oppervlakte weer verder en worden (wel door de navelblaas, daar hierin en in de cellen van den wand een dergelijke stof is te vinden)

geresorbeerd, waarbij een fijn maaswerk ontstaat, doordat de peripherie der cellen blijft bestaan; door den druk wordt dit maaswerk tot een dunne laag van lamelleuze structuur samengeperst, die in zijn jongste deelen steeds nog de mazen vertoont. Vaten zijn in de decidua niet of nauwelijks te vinden. De scheiding tusschen de decidua en het er buiten gelegen, nog weinig of niet veranderde, subdeciduale weefsel is de grens tot waar de differentiatieprocessen in den wand zijn voortgeschreden, tevens ongeveer die tot waar de verkleving van de kiemblaas met den wand tot stand kwam; zij kan daarom „differentiatiegrens" heeten.

In dezen tijd worden de boven beschreven reuzencellen minder en minder in aantal, zien er steeds meer degeneratief uit, om spoedig geheel te verdwijnen. Aan de mesometrale zijde heeft vooral door epitheelwoekering een vermeerdering en vergrooting van crypten plaats (niet klieren !).

Een tweede tijdperk in deze praeplacentaire stadia kenmerkt zich voor het ei door het ontstaan van 't amnion etc. De vergrooting van het embryo doet dit plaats zoeken in een impressie van het bovendeel van de navelblaas, die zich meer en meer accentueert. Aan de navelblaas begint, weer aan het 't verst van 't embryo verwijderde deel aanvangend, een uitgroeien van de trophoblastcellen met hun kernen, welk proces eveneens steeds meer naar de embryonale pool voortschrijdt.

Kenmerkend voor dit stadium is het optreden van verschillende processen, die aan het ei zoowel als aan den uterus in aequatoriale banden boven de differentiatiegrens beginnen van hieruit eveneens van alle zijden mesometraalwaarts voortschrijden. Deze processen bestaan voor het ei in een woekering van den trophoblast, die later het buitenblad van de amnionplooi zal bekleeden; er ontstaan onregelmatig geplaatste, donkere, polygonale cellen, duidelijk begrensd, op de oppervlakte van den trophoblast verheffen zich overal celhoopjes.

Aan den uteruswand ontstaat op de correspondeerende plaats eerst een progressief proces: vorming van crypten door woekering van het epitheel, tevens verdikking van het tusschengelegen stroma; later is door dit proces een ring ontstaan, die in het lumen boven de differentiatiegrens overal een weinig naar binnen inspringt, de holte van de vruchtkamer verdeelend in een mesometraal gelegen, placentair deel en daaronder gelegen omphaloïd deel, terwijl door deze insnoering de inmiddels voltooide diplotrophoblast (chorion) met zijn zeer sterk verdikte trophoblastlaag uitpuilt. Het hyperplastische stroma van den uitspringenden ring is door crypten overal rijk doorploegd.

Inmiddels is dit woekeringsproces op den voet gevolgd door een

van regressieven aard; het epitheel begint aan de oppervlakte, later dieper en dieper in de gevormde crypten doordringend, te degenereeren; plasma en kernen worden donkerder, homogener, kleiner; later lossen de pycnotische kernen in het plasma op en er ontstaat een massa: symplasma epitheliale, waarin ten slotte overal kleine en grootere vacuolen optreden. Overal zijn korte epitheeluitloopers in het stroma doorgedrongen, die spoedig in degeneratie overgaan. Ook het stroma zelf ondergaat later dergelijke veranderingen.

Overal waar deze degeneratie eenigszins is voortgegaan, begint een derde bandvormig uitgebreid proces: de verdikte trophoblast dringt met zijn uitloopers een eindweegs in de crypten binnen, later ook daartusschen in de gedegenereerde massa. Hier en daar verandert daarbij de foetale massa na vergrooting en bleeker worden van de elementen in een syncytium, waarvan de kernen goed contrasteeren tegen die van het symplasma materna. In deze ring van verbinding verdwijnt spoedig weer het syncytium; de rekking maakt de verdikte trophoblast met zijn in de crypten indringende holle uitloopers weer éénlagig; de area vasculosa blijft een tijdlang juist hier nog in verband met den trophoblast: alles spreekt m. i. voor de hypothese, dat dit als een rudiment is te beschouwen en wel van een omphaloïde placentatie (bij Sorex, die onder de Insectivoren het dichtst bij de Rodentia staat, wordt een duidelijke omphaloïde placentatie aangetroffen!).

De producten van de crypten en klieren, transsudaten en symplasmamassa's, worden uitgestort over den koepel van den diplotrophoblast en waarschijnlijk door deze geresorbeerd.

De vaten woekeren intusschen sterk in den wand van het mesometrale, nog onveranderde deel der vruchtkamer tusschen de crypten; hun wand blijft bestaan uit enkelvoudig endotheel, zonder perivasculaire scheede.

III. Placentaire stadia. (Na den aanvang van den aanleg der allantoïde placenta).

In het omphaloïde deel der vruchtholte wordt door rekking en resorptie van weefsel de wand meer en meer verdund, ofschoon de lagen steeds als voren te herkennen blijven. De vroeger reeds begonnen vergrooting der trophoblastcellen van de navelblaas leidt nu tot de vorming van echte „monster cells", wier cellichaam vaak concentrische ringen vertoont en andere eigenaardigheden, terwijl de groote kern dikwijls als een halve maan om een vacuole ligt. Steeds meer nadert dit proces de mesometraal gelegen vormingen. Het entoderm, dat deze monstercellen bedekt is zeer smal en kleincellig;

waar het de area vasculosa bekleedt, bestaat het daarentegen uit cubische, krachtige cellen. In de navelblaas ligt steeds een coagulummassa. Het groote embryo stulpt meer en meer het bovendeel van de navelblaas in. Tusschen de monstercellen en het entoderm ontwikkelt zich een soort cuticula.

De processen, die in aequatoriale banden zich uitbreiden, schrijden steeds verder voort naar de mesometrale pool der vruchtkamer, tevens in de scheidingsstukken der vruchtkamers waardoor ze meer en meer in deze laatste worden opgenomen. Hierdoor ontstaan, vooral op doorsneden, uiterst gecompliceerde beelden.

De uitzetting treft nu het placentaire deel der vruchtkamers, zoowel als hun onderlinge verbindingsstukken, zeer sterk, zoodat het omphaloïde deel minder en minder groot wordt, terwijl de vroeger bestaande kamvormige afscheiding tusschen beide verdwijnt.

Het progressieve proces bereikt eindelijk de mesometrale pool der placentaire ruimte en dringt steeds verder in de verbindingsstukken der vruchtkamers door: het eerst koepelvormige, nog intacte stuk wand wordt later 8-vormig, ten slotte gereduceerd tot twee ronde vlakken, die meer en meer door de woekering tot de verbindingsstukken worden beperkt. Het progressieve proces vormt nu crypten, die, elders smal en diep, op de placentairplaats breed en wijd zijn door dilatatie en excessieve woekering van het stroma. Het epitheel is veellagig, verheft zich nog overal als papilletjes aan de oppervlakte. In het stroma bereikten niet alle cellen tegelijkertijd hun volmaaktheid als deciduacel, waardoor een eigenaardig gereticuleerd aspect ontstaat. Ook de vaten vermeerderen.

In dezen bodem treedt nu het degeneratieve proces op, ook weer centripetaal naar de mesometrale pool voortgaand. Het epitheel wordt tot een symplasma, geheel als boven beschreven, echter nu in overgroote massa, overal de trophoblast bedekkend. In het stroma vormt zich een conjunctivaal symplasma en wel, evenals het hyperplastische proces, niet overal gelijktijdig, zoodat balkjes van symplasma nog meer gezonde groepen omgeven. Buiten den placentairen trophoblast gaat dit alles voort tot het ontstaan van één massa symplasma epitheliale et conjunctivale, in het bereik van den placentairen trophoblast evenwel is vóór dien tijd reeds de trophoblast ingedrongen. Bij deze degeneratie worden ook vaten geopend, zoodat extravasaten nu geen zeldzaamheid zijn en veranderd bloed tegen den trophoblast wordt gevonden.

Het derde proces, dat van verbinding van den trophoblast met den uteruswand, bestaat nu in holle, éénlagige instulpingen in de crypten, welke trophoblastpapillen door kappen symplasma zijn bedekt; tus-

schen de crypten is de trophoblast door rekking uiterst dun, vaak niet herkenbaar, ook indien later de vorming van reuzencellen tot hier is doordrongen : deze zijn dan zeer lang en smal.

Eindelijk legt zich de placentaire trophoblast, die den sluitsteen a. h. w. vormt van den koepel van den diplotrophoblast en nu uit een duidelijk te onderscheiden basale laag cellen van één cel dikte en een, vaak 20 cellen dikke laag daarboven bestaat, overal tegen de in degeneratie begrepen papillen van den mesometralen koepel van de placentaire vruchtkamerruimte, waarbij eveneens de trophoblastpapillen nog door het symplasma zijn bedekt, als dit tusschen deze reeds is opgeslorpt.

Nu komt het, centraal boven beginnend en centrifugaal naar beneden voortgaand, tot de vorming van een foetaal syncytium uit de oppervlakkige lagen van den verdikten placentairen trophoblast, waarbij de kernen, die eerst klein en donker waren, grooter en helderder worden, één grooten nucleolus bevatten en duidelijk van alle materne elementen zijn te onderscheiden. Dit syncitium dringt overal in het materne weefsel binnen in strengen, zoodat een innige doorvlechting van matern en foetaal weefsel ontstaat, die centripetaal in de papil voortgaat. Dan ontstaan overal (waarschijnlijk nu eerst ten koste van moederlijk weefsel) „vacuolen" in deze massa, die bij hun vergrooting de basale trophoblastlaag (cytotrophoblast) uitbochten naar binnen en zich ten slotte met moederlijk bloed vullen. De allantois is intusschen in de trophoblastpapillen binnengedrongen en wordt door den groei van telkens twee uitbochtingen van den cytotrophoblast in lobjes verdeeld. Foetale vaten dringen weldra in elk lobje rijkelijk binnen.

De aanleg der placenta als geheel heeft geen ronden vorm, de naar de verbindingsstukken der vruchtkamers gekeerde randen zijn naar deze zijden concaaf, in overeenstemming met den vorm van het door de progressieve en regressieve processen hier ingenomen vlak.

Langzamerhand wordt al het materne weefsel door foetaal vervangen, zoodat ten slotte de eerst geheel moederlijke papillen geheel foetaal zijn. Door verdere uitzetting der door syncytium foetale omgeven „vacuolen" (ook groei ten koste van een zich nu overal vormend symplasma foetale !) en onderverdeeling weer van deze, gepaard aan een verder en verder gaande omscheiding der allantoisvlokjes door deze, moederlijk bloed voerende holten, ontstaan ten slotte papilvormige lobben met secundaire zijlobjes, alle gescheiden door allantoisbalken met foetale vaten ; deze worden omgeven door den cytotrophoblast, welke op zijn beurt de, door een eerst breede, later steeds smaller wordende laag syncytium omsloten „vacuolen" (nu =

moederlijk bloed voerende holten) omringt. De zoo ontstane placenta rust op een onderbouw van matern weefsel, dat uit dezelfde elementen als vroeger (decidua, etc.) is samengesteld ; de deciduacellen groeien vaak sterk uit, terwijl de grens tusschen foetaal en matern weefsel op vele plaatsen door een smalle strook symplasma wordt aangegeven. De vorming van trophoblast-reuzencellen bereikt langzamerhand ook de supraplacentaire gedeelten, zoodat ook hier de enorme cellen (ook hier later vaak vrij) in het moederlijk weefsel liggen.

Extraplacentair komt spoedig een stadium, waarbij de progressieve en regressieve processen, boven beschreven, in de mucosa uteri hun uiterste grens hebben bereikt. Oppervlakkig is alles veranderd in symplasma, alleen in de diepte bestaan nog deciduacellen, die intusschen, daar de degeneratie niet zoover in de diepte reikt, vrij groot zijn geworden. De nog door deze processen vrij gelaten deelen der mucosa zijn alleen het slijmvlies van de, nu geheel in de vruchtkamers opgenomen, gedilateerde verbindingsstukken, wier door rekking dunne mucosa alleen nog platgedrukte crypten en een vrij dik epitheel bezit, dat voor een deel in symplasma overgaat. Tegen al deze extraplacentaire deelen ligt de extraplacentaire trophoblast, nu geheel uit reuzencellen bestaand, welke thans vaak losraken en vrij te midden van decidua komen te liggen.

Het embryo heeft bij zijn verderen groei plaats gevonden in de langzamerhand geheel ingestulpte navelblaas, waarvan de wanden elkaar nu bijna raken. De randen van de zoo ontstane, het embryo omvattende kom, worden niet gevormd door den sinus terminalis: deze ligt verder beneden in den binnensten wand. De kleine ruimte in de navelblaas is nog steeds gevuld met coaguleerende massa's, terwijl het de area vasculosa bekleedende entoderm, dat nu vaak papillen gaat vormen, nog zeer krachtig van uiterlijk is. De buitenwand van dezen kom verdwijnt nooit,

Bij den verderen groei van de placenta bereikt deze de randen van de navelblaaskom, nog later groeit zij er in binnen en vergroeit met den binnenwand: de sinus terminalis ligt dan op de helft van de dikte der placenta, terwijl een plooi van het entoderm er in schijnt opgenomen te zijn.

In het laatste deel der graviditeit groeit van uit de boven beschreven, door de progressieve en regressieve processen vrijgelaten deelen epitheel tusschen het gedegenereerde en het normale deel van de mucosa, vereenigt zich misschien met de intusschen woekerende klierresten in de diepte: de navelblaas wordt van de mucosa afgelicht. Iets later begint dit ook circulair om de placenta, zoodat aan het eind der zwangerschap dit orgaan min of meer gesteeld is en

na den partus het grootste deel van den uteruswand reeds met een nieuw epitheel is voorzien.

Vergelijkende Beschouwingen. Onder de Rodentia geeft de studie van den tijd van optreden van verschillende processen en organen van het ei (niet foetus!) aanleiding tot het opstellen van een rij: Sciurus — Lepus — Arvicola — Meriones — Mus — Cavia, waarin de eerste de meest primitieve vormen heeft bewaard, Lepus in vele opzichten een overgang tot de laatste vormt, bij welke meer en meer door het op den voorgrond treden van nieuwe processen, de oude, primitieve op den achtergrond worden gedrongen, in elkaar loopen en veranderen, in 't kort bijna onherkenbaar worden. Van dit laatste geeft de studie der literatuur over de verhouding van ei en uterus bij de Rodentia genoegzaam bewijzen; hier is het tevens dat blijkt, hoe groot de steun is, die het vergelijkend anatomisch onderzoek geeft, ja, dat allerlei problemen zonder deze niet zijn op te lossen.

Duidelijk blijkt de progressie in de eigenaardigheden van de navelblaas bij de verschillende dieren: bij alle wordt het bovendeel in het benedendeel ingestulpt, bij Sciurus eerst laat, bij Cavia als een der eerst optredende processen; de distale wand blijft bij Sciurus steeds bestaan, bij Lepus verdwijnt hij laat, bij Cavia reeds heel in 't begin; het entoderm bekleedt den binnenwand bij Sciurus reeds zeer vroeg, bij Mus zeer laat, bij Cavia nooit geheel.

In dezelfde volgorde verschijnt de antimesometrale fixatie en treedt de allantoïde placenta vroeger op, en daarmee de, deze vormende, trophoblastverdikking. De merkwaardige praeplacentaire processen, die bij Mus en Cavia zoo nauwkeurig zijn bestudeerd, zijn het juist, die door deze verdringing de groote moeilijkheden opleveren.

Bij alle Rodentia treedt de vegetatieve eipool in verbinding met den antimesometralen wand van den uterus. Deze verbinding eindigt bij Sciurus eerst tegen den partus, bij Mus en Cavia zeer vroeg reeds, bij Lepus tusschenbeide: door onderschuiving van epitheel van uit de verbindingsstukken der vruchtkamers.

Bij deze fixatie wordt de navelblaas omgeven door gewoekerd mucosaweefsel, dat later degenereert, opgelost en geresorbeerd wordt door het ei. Het epitheel verdwijnt reeds spoedig na lichte progressieve veranderingen, het stroma verandert in decidua door zeer sterke woekering, welke bij Mus, Cavia etc., overeenkomstig de kleinheid van de navelblaas (en dus van het ei), zich als reflexa om het ei verheft. Overeenkomstig een, in den zin van bovengenoemde volgorde, optredende neiging om de voeding door stromaproducten

te vervangen door matern bloed, is de vascularisatie van de decidua bij den Eekhoorn zeer gering, bij Cavia uiterst sterk en overeenkomstig de extravasaten, die het ei omgeven, bij Sciurus zeer zeldzaam, bij Mus on Cavia regel en rijkelijk.

Bij deze processen treden bij Sciurus moederlijke reuzencellen op (symplasma) en later foetale, als de eerste reeds verdwenen zijn. Bij Lepus zijn, overeenkomstig de meergemelde rij, door SCHOENFELD e.a. de foetale reuzencellen (monster cells) reeds in vroegere stadia gevonden; alle dan voorkomende worden voor foetaal aangezien, waarschijnlijk treden echter de materne in hetzelfde tijdperk op en is een deel der beschreven reuzencellen moederlijk, symplamatisch van oorsprong. Bij Mus zijn in veel vroeger stadia door JENKINSON beide reeds gevonden en onderscheiden, KOLSTER zag niet de foetale, DUVAL niet de materne! Bij Cavia moeten zij dus nog eerder optreden; de foetale zijn dan waarschijnlijk de woekerende „Gegenpolcellen" van v. SPEE, die de zona aan de vegetatieve pool doorboren; de materne komen overeen met de producten van de processen in den „Implantationshof" van v. SPEE. Ook het weer verdwijnen van deze vormsels gaat sneller en sneller. (Door dit alles wordt het reeds uit een phylogenetisch oogpunt zeer gewaagde der vergelijking van Cavia en Mensch door v. SPEE, nog scherper belicht).

In het licht der vergelijkende studie kunnen deze foetale „monster cells" worden beschouwd als rudimenten van een bij de voorouders der Rodentia krachtig ontwikkeld orgaan.

De het ei omgevende massa („coagulum") bestaat bij Sciurus vooral uit weefselproducten; deze treden in de volgorde der rij meer op den achtergrond en worden vervangen door bloed.

Van de bij Sciurus reeds rudimentaire omphaloïde placentatie kan bij de anderen niet veel terugverwacht worden, ofschoon de tot nu toe verwaarloosde studie van de morphologie der extraplacentaire deelen van de vruchtkamer misschien licht zou kunnen verschaffen.

De nu volgende aanleg der allantoïde placenta treedt het laatst op bij Sciurus, het eerst bij Cavia. De neiging, in de bekende volgorde toenemend, om zooveel mogelijk een voeding zonder weefselproducten der uterusmucosa en allantoid-placentaire wisseling tusschen foetaal en moederlijk bloed tot stand te brengen, doet de processen veranderen, die bij de placentatie in het spel zijn: bij Sciurus nog een zeer sterke hyperplasie van stroma-epitheel, later degeneratie, oplossing en resorptie met doordringing van den trophoblast in deze massa, alles tijdelijk duidelijk gescheiden en relatief langzaam in zijn werk gaande, bij Cavia bijna uitsluitend vaatwoekering terwijl proliferatie en degeneratie hand in hand gaan, evenals de invasie van

den trophoblast deze op den voet volgt, en (daar het doel: amener une hémorrhagie maternelle á être circonscrite par des tissus foetaux (DUVAL), spoediger bereikt is), niet ver gaat en zeer snel afgeloopen is. Bij de andere dieren alle tusschenstadia!

De latere processen in de ontwikkeling der placenta zijn bij alle verschillend, ofschoon in principe gelijk: onderverdeeling van moederlijk en foetaal bloed voerende holten, resp. vaten. De allantois blijft hierbij passief, de foetale massa omgroeit verder en verder bij zijn steeds meer doordringen in de vruchtkamerholte, de allantois-takjes.

De vorming van foetale reuzencellen gaat bij alle Rodentia voort over den geheelen trophoblast van de vegetatieve naar de placentaire pool; ook de deciduacellen worden grooter, zoodat ook de reuzencellen, die bij alle supraplacentair zijn gevonden (zooals JENKINSON reeds voor de Muis aangaf) deels van maternen, deels van foetalen oorsprong zijn; bij Sciurus blijven beide steeds goed te onderscheiden.

De min of meer geïsoleerde plaats, die in sommige opzichten, volgens de opgaven der auteurs, Lepus zou bezitten, zal misschien verdwijnen, indien de tot nu toe meer verwaasloosde studie van het praeplacentaire tijdvak (ook wat betreft de morphologie van de vruchtkamer) uitvoeriger zal zijn onderzocht.

Ten slotte heb ik mij evenwel niet kunnen overtuigen, dat ook voor de morphologie van de vruchtkamerholten de eenheid in het bouwplan voor alle Rodentia zoover gaat als FLEISCHMANN dat wil; de verschillen, die ik vond aangegeven zullen echter wellicht verdwijnen indien aan een omvangrijker materiaal dit alles is onderzocht, ofschoon FLEISCHMANN's opvattingen, om gelijke redenen, in hun tegenwoordigen vorm zeker onjuist zijn.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: *„Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen"*.

(Mede aangeboden door den Heer PLACE.)

De methode der ware en valsche gevallen is door FECHNER aangegeven als hulpmiddel bij zijn psychophysische onderzoekingen. Hij gebruikte deze methode op verschillende wijzen: eerst ter bepaling van de nauwkeurigheidsmaat (Präcisionsmasz) bij het waarnemen van onderscheidsdrempels, later ter bepaling van die onderscheidsdrempels.

Reeds bij zijn eerste bepalingen deed zich de moeilijkheid voor, dat bij het herhaaldelijk pogen tot waarneming van een onderscheid tusschen twee gelijktijdig of achter elkander inwerkende prikkels niet alleen juiste en onjuiste waarnemingen gedaan werden, beantwoordende aan de „ware" en „valsche" gevallen, doch dat ook twijfelachtige gevallen voorkwamen, waarbij dus de waarnemer in het onzekere bleef omtrent den aard of het bestaan van een verschil der beide prikkels. Deze moeilijkheid heeft FECHNER zelf, en na hem verschillende andere onderzoekingen op verschillende wijzen trachten op te lossen. Hoe moest men handelen met die twijfelachtige gevallen?

FECHNER heeft verschillende methodes aangegeven en aan een uitvoerige kritiek onderworpen. Hij kwam tot de conclusie dat de beste methode die was, waarbij de twijfelachtige gevallen gelijkelijk over de valsche en ware gevallen verdeeld werden. Vond hij b.v. w ware gevallen, v valsche en t twijfelachtige dan berekende hij zijn precisiemaat alsof er $w + {}^1/_2 t$ „ware" gevallen en $\frac{1}{2}t + v$ valsche gevallen geweest waren.

Hij wijst er ook op dat een vooral bij de Amerikaansche experimenteel-psychologen gebruikelijke methode om bij de proeven den reagent op te dragen steeds een uitkomst te noemen, ook al verkeert hij in twijfel, feitelijk op hetzelfde neerkomt als op een gelijkmatige verdeeling der t-gevallen tusschen de ware en de valsche.

FECHNER heeft nog een andere methode aangegeven waarbij hij de drempelwaarde berekende, eerst uit de ware gevallen, dan uit de ware en twijfelachtige gevallen en uit die beide drempelwaarden de einduitkomst berekent.

G. E. MÜLLER heeft vervolgens een uiterst elegante methode aangegeven om de resultaten van de methode der valsche en ware gevallen te berekenen, waarbij hij uitgaat van de opvatting dat steeds de drie groepen van gevallen moeten voorkomen en recht van bestaan hebben; dat het aantal in elk dezer groepen door de waarschijnlijksrekening kon bepaald worden. Uit de getallen die hij afleidt uit zijn berekening kan dan later de drempelwaarde weder berekend worden.

Eenige andere methoden b.v. die van FOUCAULT, die van JASTROW, welke o.a. door FULLERTON en CATTELL warm wordt aanbevolen noem ik slechts ter loops, daar de methode van FOUCAULT ongetwijfeld onjuist is (zie o.a. G. E. MÜLLER), terwijl die van JASTROW niet van willekeur is vrij te pleiten.

Tegen al deze wijzen van behandeling van de methode der valsche en ware gevallen heb ik een principieel bezwaar, dat ik zal trachten hieronder nader toe te lichten.

Indien ik achtereenvolgens twee prikkels van verschillende physische intensiteit op een zintuig laat inwerken, dan zal de reagent omtrent het verschil dier prikkels al of niet eenige mededeeling kunnen doen. Kan hij geen mededeeling doen dan hebben wij een twijfelachtig geval voor ons, kan hij wèl een mededeeling doen dan kan nog deze mededeeling juist zijn — hetgeen dan een waar geval zou zijn — of onjnist zijn en wij hebben een valsch geval voor ons.

Wordt de proef een genoegzaam aantal malen herhaald, dan hebben wij ten slotte een zeker aantal ware gevallen *w*, valsche gevalen *v* en twijfelachtige gevallen *t* voor ons.

Algemeen wordt nu aangenomen, dat de reagent inderdaad *w*-malen goed heeft waargenomen, *v*-malen zich vergist heeft, *t*-malen heeft getwijfeld. Ware deze premisse juist, dan kon ook de opvatting van Fechner of die van G. E. Müller juist zijn, doch dit is niet het geval. In de premisse schuilt reeds een fout, zooals wij aanstonds zullen zien.

Omtrent de opvatting der twijfelachtige gevallen heerscht geen enkel meeningsverschil. Hiertoe behooren in de eerste plaats de gevallen waar de indruk van positieve gelijkheid door den reagent ontvangen is, en verder de gevallen, waar hij geen verschil waarnam, dus in twijfel bleef. Steeds hebben wij daarbij werkelijk alleen gevallen, waarbij een kleiner of grooter physisch verschil niet gepercipiëerd werd, zoodat twijfel ontstaat.

Ook omtrent de valsche gevallen behoeft geen meeningsverschil te bestaan. Hier heeft een zinsprikkel ingewerkt; hier werd een oordeel uitgesproken, doch door een reeks van omstandigheden onafhankelijk van den wil van den reagent is het oordeel niet in overeenstemming met de physische oorzaak. De physische oorzaak is dus *niet* waargenomen, maar toevallige omstandigheden hebben den reagent er toe gebracht, te meenen, dat hij wèl een oordeel kon uitspreken, waarbij weder toevallig dit oordeel onjuist was.

En nu komen wij tot het hart van de kwestie. Indien het mogelijk is, dat onder een reeks van proeven een aantal voorkomen, waarin de reagent feitelijk de physische oorzaak niet waarneemt, maar door het toeval er toe komt een oordeel uit te spreken, dat *onjuist* is, dan moeten er ook een aantal gevallen zijn, waarin eveneens de physische oorzaak niet wordt waargenomen, doch waarbij het toeval er toe voert om een oordeel uit te spreken, doch ditmaal een juist oordeel. Daar nu dit feit alleen afhankelijk is van toevallige omstandigheden buiten onzen wil gelegen, bestaat er evenveel kans dat een verkeerd oordeel als dat een juist oordeel wordt uitgesproken. Hadden wij dus *v* valsche gevallen, dan mogen wij redelijkerwijze

ook aannemen, dat er v gevallen zijn waarin feitelijk de physische oorzaak *niet* is waargenomen, doch waarin toch een oordeel, en ditmaal een goed oordeel is uitgesproken. Deze v gevallen zijn echter geprotocolleerd onder de ware gevallen, doch mogen niet als gevallen van juiste waarneming worden aangemerkt: slechts van w—v gevallen mogen wij veronderstellen, dat de physische oorzaak inderdaad en feitelijk is waargenomen: in alle overige gevallen, dus in $2v + t$ gevallen is geen waarneming van de werkelijke differentie der prikkels geschied.

En nu hebben wij inderdaad slechts met twee mogelijkheden te doen, die ik als *gepercipiëerde* en *niet gepercipiëerde* gevallen zal aanduiden en wier aantal ik met ξ en χ zal aangeven; reeds a priori is dan de veronderstelling gewettigd dat wij het recht hebben de principes der kansrekening hierbij toe te passen.

Deze veronderstelling wordt zekerheid, wanneer wij even in herinnering brengen welke mathematische betrekkingen door Fechner voor het aantal valsche en ware gevallen gegeven werden.

Zooals men weet telde Fechner bij het aantal ware gevallen dat het experiment opleverde de helft der twijfelachtige gevallen op: hij nam dus een gecorrigeerd aantal ware gevallen w' aan zoodat dus $w' = w + \frac{1}{2} t$. Op dezelfde wijze corrigeerde hij het aantal valsche gevallen door er eveneens de helft der twijfelachtige gevallen bij op te tellen: $v' = v + \frac{1}{2} t$.

Indien ik mijn aantal gepercipieerde gevallen bereken vind ik daarvoor $\xi = w$—v, terwijl het aantal niet gepercipieerde gevallen $\xi = t + 2v$ bedraagt. Nu zien wij onmiddellijk, dat ik voor het aantal gepercipieerde gevallen ook kan schrijven:

$$\xi = w^1 — v^1.$$

Daar door Fechner voor de relatieve grootte van het aantal gecorrigeerde ware gevallen de uitdrukking:

$$\frac{w^1}{w+t+v} = \frac{w+\frac{1}{2}t}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt$$

gegeven is, en voor het relatieve aantal gecorrigeerde valsche gevallen:

$$\frac{v^1}{w+t+n} = \frac{v+\frac{1}{2}t}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt$$

zoo vinden wij hieruit onmiddellijk voor ξ en χ de beide betrekkingen:

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt$$

en

$$\chi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt.$$

Wij zien dus dat de door mij voorgestelde verdeeling der ware, twijfelachtige en valsche gevallen ons in staat stelt voor de berekening gebruik te maken van de bekende tabellen van FECHNER.

Ik wensch hier met nadruk er op te wijzen, dat de formules van G. E. MÜLLER de zelfde uitkomst geven behoudens het bekende verschil in de integraal-grenzen: welke bij G. E. MÜLLER 0 en $(S_u \pm D)\, h_u$ zijn.

Het ligt in het minst niet in mijn bedoeling hier partij te kiezen usschen FECHNER en G. E. MÜLLER in de kwestie der „drempelwaarde": deze wordt door mijn opmerking zelfs niet aangeraakt.

Het blijkt uit het bovenstaande, dat de resultaten van een berekening eener voldoend uitgebreide proefreeks volgens mijne opvatting getallen moeten geven, die nauw te saam hangen met die van FECHNER of van G. E. MÜLLER — afhankelijk van de integratiegrenzen. Toch zou ik in het bijzonder nog er op willen wijzen dat G. E. MÜLLER's formules over de ware, valsche en twijfelachtige gevallen eerder de voorstelling zijn van een statistisch geconstateerde psychologische gebeurtenis, terwijl bij de door mij voorgestane opvatting der methode van de valsche en ware gevallen een meer physiologisch standpunt wordt ingenomen.

Ten slotte nog de opmerking dat het hier medegedeelde misschien een steun is voor de door CATTELL en FULLERTON voorgestelde opvatting van drempelwaarde. Zij nemen aan dat deze bereikt is als het aantal gecorrigeerde ware gevallen 75 pCt. bedraagt. In dat geval is ξ en χ beide 50 pCt. Zij nemen dus als drempelwaarde aan een zoodanig verschil tusschen 2 prikkels, dat er evenveel kans bestaat dat dit wèl als niet waargenomen wordt.

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN: *„Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia."*

Eenige maanden geleden richtte de Heer MAUNDER van het Observatorium te Greenwich het verzoek aan het Observatorium te Batavia om hem een lijst van de te Batavia opgeteekende storingen te verschaffen, met het doel daaraan zijne uitkomsten omtrent den invloed

van de synodische omwenteling der zon op het optreden der storingen te toetsen.

Maunder komt door een groepeering der Greenwich-storingen volgens den synodischen omwentelingstijd tot het besluit, dat zij een besliste neiging vertoonen om eens en soms zelfs meermalen terug te keeren en maakt deze gevolgtrekking:

„Our magnetic disturbances have their origin in the sun. The solar „action with gives rise to them does not act equally in all directions, „but along narrow, well defined streams, not necessarily truly radial. „These streams arise from active areas of limited extent. These active „areas are not only the source of our magnetic disturbances, but „are also the seats of the formation of sun-spots."

Zoo spoedig mij mogelijk was, ben ik tot het opmaken dier lijst overgegaan, en heb die over de jaren 1880 tot 1899 uitgestrekt. Zij bevat niet minder dan 1149 nummers. Dadelijk daarop heb ik eenige statistische berekeningen, op de lijst gegrond, uitgevoerd.

Het is altijd beter, dat de uitkomsten van dergelijke statistische berekeningen eerst door den maker zelven worden besproken, dan dat een ander, voor wien het onmogelijk is het gebruikte materiaal te raadplegen, hiertoe overgaat.

Ofschoon het mijn voornemen is, de lijst met de noodige reproducties van storingsbeelden te voorzien, wensch ik wegens de actualiteit van de betreffende vraagstukken, een voorloopige mededeeling hierover te doen.

Regels gevolgd bij het opmaken der lijst.

Een scherpe definitie van het begrip storing is nog nimmer gegeven; het bezit evenwel karakteristieke eigenschappen, te weten:

1. Een plotseling begin.
2. Eene aardmagnetische nastoring.
3. Eene verhoogde bewegelijkheid.

Wat de tweede eigenschap betreft, door mij aldus genoemd, kan in herinnering gebracht worden, dat het een bekend feit is, hoe bij een storing het gemiddelde niveau der componenten begint te dalen of rijzen tot een maximale verandering is bereikt, om vervolgens weer langzaam tot het oude niveau terug te keeren.

In 1895 [1]) vestigde ik de aandacht op dit verschijnsel en bestudeerde zijn voorkomen over de geheele aarde. Door dit onderzoek was het mij mogelijk de volgende beschrijving te geven:

Tijdens een magnetische storing ontwikkelt zich een kracht, tegenovergesteld aan de aardmagneetkracht, die evenwel gericht is volgens

de meridianen van het regelmatige deel van het aardmagnetisme en dientengevolge niet naar de magnetische pool, maar naar het magnetische aspunt wijst.

In overeenstemming met deze beschrijving vermindert gedurende het eerste gedeelte van een storing de horizontale component, terwijl de verticale toeneemt, en keeren deze componenten gedurende het tweede gedeelte weer langzaam tot hun oude waarden terug.

Daar nu de bovenvermelde eigenschappen sub. 1 en 2, niet aan iedere storing eigen zijn, of niet altijd ondubbelzinnig genoeg zich vertoonen, om eenige opvolging van bochten in de geregistreerde kromme al of niet als storing te kunnen beschouwen, zijn zij niet geschikt om als vaste maatstaf te dienen.

De verhoogde bewegelijkheid daarentegen begeleidt iedere storing en is dus in zooverre wel daarvoor geschikt en dientengevolge ook door mij aangenomen.

Ongelukkigerwijze is het evenwel onmogelijk een zekeren graad van bewegelijkheid vast te stellen, die als kriterium van storing kan aangenomen worden, want niet alleen de grootte van den uitslag, maar ook de steilheid en veelvuldigheid der bochten bepalen de mate van bewegelijkheid.

Om de nadeelen, voortvloeiende uit het in 't spel komen van persoonlijk oordeel, zooveel mogelijk onschadelijk te maken, is de lijst opgemaakt:

1e. door één persoon;
2e. in zoo kort mogelijken tijd;
3e. volgens de opteekening van een en dezelfde component (in casu de horizontale intensiteit, welke te Batavia het sterkst gestoord wordt);
4e. voor een tijdperk met zooveel mogelijk gelijke schaalwaarde der krommen (m.m. = ± 0.00005 C. G. S.);

Voor iedere storing is opgeteekend:

1e. het aanvangsuur;
2e. het einde;
3e. de tijd van maximale storing;
4e. de intensiteit.

In de gevallen van een storing beginnende met een plotselingen stoot, is de tijd tot op tienden van uren nauwkeurig vermeld; bij een geleidelijk begin slechts in uren.

Maunder spreekt bij plotseling begin van een S-storing; in analogie zal ik de geleidelijk aanvangende G-storingen noemen.

---

[1]) Die erdmagnetische Nachstörung. Meteorol. Zeitschrift 1895.

Het begin van een G-storing is niet gemakkelijk aan te geven. Ik heb daarvoor het uur van het eerste toenemen in bewegelijkheid gekozen en niet het uur, waarin de bewegelijkheid een onmiskenbaar storingstype begint te krijgen.

Naderhand werd het mij duidelijk, dat ik een groote voorkeur aan de even uren had toegekend, wat te verklaren valt uit het feit, dat op de Bataviasche magnetogrammen alleen de even uren van een tijdsein en bijgeschreven uurgetal zijn voorzien.

Ter elimineering van deze ongelijkmatigheid, heb ik de aantallen voor de oneven uren voor de eene helft bij het voorgaande, voor de andere bij het volgende uur gebracht.

Bij het geleidelijk uitsterven, aan de magnetische storingen eigen, is het meestal onmogelijk eenigszins nauwkeurig den eindtijd aan te geven. Ik heb altijd den duur zeer ruim genomen en dientengevolge zijn vele dagen op een groote storing volgende, als gestoord aangenomen, die anders als ongestoord zouden voorbijgegaan zijn.

Voor den tijd van het maximum heb ik het uur van grootste bewegelijkheid genomen. Dat valt niet altijd samen met dat van grootste nastoring. Dit laatste is misschien een passender tijdmaat, maar om het te bepalen zou een groote reken- en meetarbeid noodig zijn, daar de verandering in niveau meestal door de gewone dagelijksche variatie verborgen wordt.

De intensiteit is opgegeven volgens een schaal van vier graden: 1 = zwak, 2 = matig, 3 = sterk, 4 = hevig.

Het is onmogelijk een nadere definitie van deze sterktegraden in woorden te geven; een reproductie van typische gevallen is daarvoor noodig.

Verdeeling van de aanvangsuren over den dag.

Het is een bekend feit, dat de beginstoot gelijktijdig over de geheele aarde optreedt. De twee lijsten voor Batavia en Greenwich geven 53 gevallen van overeenkomstige beginstooten, en als de gelijktijdigheid absoluut is, moet hier uit het lengteverschil Grw.—Bat. afgeleid kunnen worden.

Ik vond nu voor dat tijdsverschil:

in 6	gevallen	$7^u 12^m$
„ 19	„	7 0
„ 28	„	7 6
	gemiddeld	$7^u\ 7^m 15^s$

Het ware lengteverschil bedraagt $7^u 7^m 19^s$.

Om uit 53 gevallen, waarbij de tijd ruwweg tot op slechts een tiende uur is gemeten, zulk een groot lengteverschil tot op 4 secunden nauwkeurig te verkrijgen, is zeker hoogst merkwaardig.

Deze gelijktijdigheid over de aarde zou een gelijkmatige verdeeling van de beginstooten over alle uren van het etmaal in zich sluiten, indien elke beginstoot ook over de geheele aarde zich verbreidde. Dit nu is, zooals door de twee storingslijsten bewezen wordt niet het geval, en het is dientengevolge begrijpelijk, dat de beginstoot een ongelijkmatige verdeeling vertoont.

Verdeeling van den beginstoot over het etmaal.

Uur	Aantal in %	Uur	Aantal in %
0 a. m.	4.1	12	4.7
1	2.5	13	5.0
2	3.0	14	3.3
3	2.2	15	3.9
4	4.1	16	4.4
5	3.9	17	3.6
6	6.3	18	4.1
7	4.5	19	5.5
8	5.1	20	3.6
9	5.8	21	3.9
10	6.1	22	3.6
11	5.0	23	3.3

De beginstoot is dns het veelvuldigst des morgens om 6 en 10 uur en 's avonds om 7 uur; het zeldzaamst om 3 uur 's morgens en 2 uur 's middags.

Diezelfde verdeeling vinden wij in de G-storingen terug, maar veel meer uitgesproken.

Verdeeling der G-storings-aanvangstijden over het etmaal (in %).

Uur		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Intens:	1	6.0	6.0	5.1	6.7	18.7	17.9	7.4	4.7	6.0	8.0	6.5	7.1
	2	4.5	4.9	4.2	5.7	20.8	16.4	7.3	5.6	5.4	9.2	8.4	7.6
	3 en 4	7.1	3.5	4.3	7.5	18.5	13.4	3.9	5.5	5.1	9.1	11.8	10.2
	Alle	5.4	5.1	4.6	6.3	19.7	16.5	6.8	5.2	5.6	8.7	8.3	7.8

Hier hebben wij een hoofdmaximum om 8 uur 's morgens en een secundair maximum om 6 uur 's avonds, en het blijkt dus, dat het aanvangsuur der G-storingen afhankelijk is van den stand der zon ten opzichte van het waarnemingsstation en ook dat de uren, die het meest geeigend zijn voor den aanvang van een G-storm, evenzoo het ontstaan van een beginstoot begunstigen.

Verdeeling van den tijd van maximumstoring over het etmaal (in %).

	Uur	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
S-stor.	Intensiteit 1	11.5	6.7	5.5	1.8	4.7	12.8	12.6	5.3	6.1	6.1	10.9	16.2
	» 2	16.9	9.1	5.9	1.2	1.4	7.3	7.6	3.9	7.6	10.8	13.5	15.2
	» 3 en 4	11.2	4.0	2.4	1.6	0.8	4.0	7.2	6.8	12.0	13.6	17.2	19.2
	Alle	14.1	7.4	4.9	1.5	2.4	8.6	9.2	4.8	7.8	9.7	13.3	16.3
G-stor.	Intensiteit 1	12.3	16.7	10.9	5.8	4.3	13.8	5.8	2.9	2.9	5.1	10.1	9.4
	» 2	11.3	7.7	3.6	5.6	3.3	8.5	11.3	8.5	6.1	5.2	14.1	14.9
	» 3 en 4	12.2	9.3	5.8	3.2	3.5	7.7	9.0	6.4	8.0	7.7	10.3	17.0
	Alle	11.9	10.2	6.0	4.6	3.6	9.2	9.2	6.5	6.3	6.3	11.6	14.8

De verdeeling van den tijd waarop de storing haar grootste intensiteit bereikt is dus voor alle soorten van storingen dezelfde en vertoont een hoofdmaximum 's avonds om 10 uur, een secundair maximum om 11 uur 's morgens, en minima om 8 uur 's morgens en 3 uur 's middags. Derhalve is de ontwikkeling van een storing sterk afhankelijk van den stand van de zon ten opzichte van het waarnemingsstation en wel op dezelfde wijze voor S- en G-storingen.

Vergelijken wij deze verdeeling met die van de aanvangstijden, dan blijkt: *dat op de uren, waarop de kans voor een maximum van storing begint te stijgen, de grootste kans voor het aanvangen van een storing bestaat.* Dientengevolge mogen wij besluiten: *dat de ontvankelijkheid van het aardmagneetveld voor gestoordheid aan een dagelijksche en een halfdagelijksche periode onderhevig is, hoe ook de oorsprong der gestoordheid moge wezen, 't zij plotseling of geleidelijk.*

Dezelfde uitkomst volgde al uit het doorzien van de honderdtallen van dagkrommen bij het opmaken der storingslijst. De bewegelijkheid bleek, na een groote rust in de morgenuren, ongeveer te 8 uur

te ontstaan en ongeveer op den middag een hoogtepunt te bereiken, daarna weer af te nemen tot een rust in den namiddag, die evenwel minder uitgesproken was dan die in den morgen, en vervolgens weer sterk toe te nemen tot kort voor middernacht, om ten slotte snel tot groote rust af te nemen.

De dagbochten waren gewoonlijk kleiner en sneller, de nachtbochten grooter en langduriger, ook regelmatiger van vorm. Deze regelmatige nachtbochten bleven soms tot één geïsoleerde beperkt. Zulk een solitaire golf is zeer geschikt voor het onderzoek omtrent de oorzaak dier golven.

Verdeeling van de eindtijden over het etmaal.

Uur	Aantal malen	Uur	Aantal malen
0 a. m.	163	12	66
2	172	14	60
4	204	16	43
6	140	18	50
8	60	20	46
10	36	22	49

Het is duidelijk, dat een voorkeur aan 0 uur a. m. — het eind van den dag — is gegeven.

Verder is — volkomen in overeenstemming met de boven vermelde gevolgtrekkingen — de verdeeling bijna geheel het omgekeerde van die van het maximum.

Samenvattende leert dus de statistiek der Batavia-storingen :

primo, *dat de oorsprong der* S-*storingen kosmisch is.*

secundo, *dat de oorsprong der* G-*storingen mogelijkerwijze ook kosmisch is, maar dat de aanvang van den plaatselijken tijd van den dag afhankelijk is,*

tertio, *dat de ontwikkeling van alle storingen op dezelfde wijze van den plaatselijken tijd afhangt.*

Storingen en zonnevlekkenaantal.

In onderstaande tabel is het jaar van 1 April tot 1 April gerekend, met uitzondering van 1882, daar van Dec. '82 tot Maart '83 geen diagrammeu verkregen zijn. De storingsaantallen voor de niet vol-

ledige jaren '80—'83 zijn in verhouding met het aantal ontbrekende dagen vergroot.

Aantallen storingen in %.

Jaar	Zonnevlekken getal	Intensiteit							
		1		2		3 en 4		Alle	
		S	G	S	G	S	G	S	G
1880/81	37.5	2.7	4.2	1.5	6.6	1.2	2.3	1.6	5.1
81/82	56.9	1.4	6.7	0.0	5.9	1.2	2.3	0.8	5.6
82	70.8	1.4	2.8	5.3	6.6	13.0	6.1	7.9	5.2
83/84	68.8	6.8	7.8	7.5	5.4	6.9	5.3	7.1	6.2
84/85	59.5	2.7	4.6	9.8	6.4	9.3	6.1	8.2	5.7
85/86	45.7	4.1	1.4	9.8	4.1	10.6	6.9	9.0	3.6
86/87	19.6	0.0	1.1	2.3	5.9	1.9	7.6	1.6	4.5
87/88	11.6	2.7	7.8	3.0	4.3	3.7	4.6	3.3	5.6
88/89	6.4	5.4	5.7	4.5	4.1	2.5	3.1	3.8	4.5
89/90	5.9	10.8	4.9	5.3	3.3	1.2	4.6	4.6	4.1
90/91	13.0	13.5	8.1	2.3	3.8	0.6	3.1	3.8	5.2
91/92	47.4	6.8	4.6	5.3	5.1	6.9	8.4	4.7	5.5
92/93	74.5	9.5	6.4	8.3	3.3	12.4	4.6	10.3	4.6
93/94	85.2	9.5	6.0	9.0	3.8	11.8	5.3	10.3	4.8
94/95	74.2	5.4	4.6	8.3	7.7	3.7	6.9	5.7	6.5
95/96	57.4	6.8	5.3	5.3	6.9	5.0	8.4	5.4	6.6
96/97	38.7	4.1	4.2	5.3	5.4	2.5	3.1	3.8	4.6
97/98	26.5	4.1	5.3	3.0	5.4	3.7	7.6	3.5	5.7
98/99	22.9	2.7	8.5	4.5	5.9	1.9	3.8	3.0	6.5

Uit deze procentgetallen blijkt dat S-storingen *wel*, de G-storingen *niet* met de zonnevlekkenperiode medegaan; ook dat de overeenstemming met de zonnevlekken aantallen bij de S-storingen met de intensiteit toeneemt. Maar bovendien, dat bijna als regel elk maximum van S-storingen staat tegenover een minimum van G-storingen en omgekeerd.

Dit nu is wel alleen daarvan het gevolg, dat deze storingen elkaar wederkeerig verbergen, zoodat tijdens een S-storm een nieuw optredende G-storm niet wordt opgemerkt en omgekeerd niet een S-storm te midden van een G-storm optredende. Tijdens groote zonsactiviteit zullen evenwel de G-stormen meer door de langdurige S-stormen worden opgeslokt, en zelfs zullen dan de S-stormen van intensiteit 1 door hun sterkere broeders worden geëclipseerd. De S_1-storingen vertoonen dan ook een omkeering der zonnevlekken periode.

Verdeeling der storingen over het jaar.

Maand	(Aantal storingen (1 April '83—1 April '99	
	S.	G.
Januari	31	54
Februari	31	53
Maart	29	60
April	24	57
Mei	24	61
Juni	27	51
Juli	31	61
Augustus	29	47
September	32	55
October	31	64
November	22	58
December	18	58

Hier treedt een beslist onderscheid tusschen G- en S-storingen op; de S-storingen vertoonen een uitgesproken jaarlijkschen gang en de G-storingen niet.

Evenals voor de aanvangstijden wijst dit, òf op een verschil van oorsprong van beide soorten van storingen òf op een gedurende den dag en het jaar veranderlijke ontvankelijkheid voor het ontstaan van den beginstoot.

Vergelijking met de Greenwich-storingen.

De verdeeling der aanvangsuren over het etmaal vertoont voor beide stations een opmerkelijk verschil. MAUNDER vindt uit de storings-

reproducties, in de jaarlijksche publicatie van het Greenwich-observatorium voorkomende, een maximum te 6 uur 's avonds en uit de oorspronkelijke diagrammen een maximum te 1 uur namiddags. De reden van deze ongelijkmatigheid vindt hij in de wijze, waarop dat aanvangsuur werd opgezocht. Hij schrijft:

„The times when the phases are most strongly marked are naturally most often taken as the times of commencement." Die phasen (van bewegelijkheid) zijn nu te Greenwich te 1 uur p. m. en 6 uur p. m. het meest uitgesproken. Daar ik evenwel het eerste begin van verhooging der bewegelijkheid als aanvangsuur heb aangenomen, zullen dus mijn aanvangsuren vroeger zijn.

Het verschil tusschen Greenwich en Batavia, wat de aanvangsuren aangaat, is derhalve hoofdzakelijk aan verschil van opvatting toe te schrijven.

De verdeeling der storingen over het jaar blijkt voor beide plaatsen geheel dezelfde te zijn; maar de Greenwich-storingen, die aan een volledigen magnetischen kalender voor de periode 1848—1902, door Ellis opgemaakt, ontnomen zijn, laten geen scheiding toe tusschen S- en G-stormen. Het is dus niet te beoordeelen of te Greenwich bij de G-storingen de jaarlijksche schommeling ook afwezig is.

De beginstoot.

Het materiaal te Batavia aanwezig om dit verschijnsel ook voor andere plaatsen op aarde te onderzoeken, is zeer spaarzaam, maar desniettegenstaande kan reeds de gevolgtrekking gemaakt worden, dat *de beginstoot overal standvastig van eigenschappen is, en derhalve een verschijnsel van groote belangrijkheid, dat ons waarschijnlijk omtrent de wijze waarop de S-stormen de aarde bereiken, leering kan geven.*

Beschrijving voor eenige plaatsen.

Greenwich. Volgens de verkleinde reproducties van storingskrommen in de deelen der „Greenwich Observations", bestaat de stoot uit een plotselinge beweging in H, D en Z, onmiddellijk gevolgd door een beweging in tegenovergestelden zin, die veel grooter is, dan de eerste.

De richting is standvastig.

Voor den hoofdstoot vond ik voor 34 gevallen gemiddeld:

$H\angle D = 25\gamma W$; $\Delta H = +77\gamma$; $\Delta Z = +39\gamma$ ($1\gamma = 0.00001$ C.G.S.).

Batavia. De voorstoot treedt te Batavia bij H en Z niet op, alleen bij de Declinatie, maar in geringere mate.

De richting is ook geheel standvastig.

35 gevallen uit de jaren 1891 en '92 gaven:

Grootte van den uitslag $H\Delta D = 9\gamma W$; $\Delta H = +45\gamma$; $\Delta Z = -16\gamma$.
Duur 5 min.; 305 min.; 12 min.

De beweging in de verticale intensiteit is zoo veel langzamer, dat men niet meer van stoot kan spreken.

In de reproducties van de Potsdam en Zi Ka Wei krommen vond ik ook verscheidene stooten, die een opmerkelijke standvastigheid in richting bezitten. Drie gevallen van Kaap Hoorn waren ook onderling van dezelfde richting. Hier volgt een overzicht van deze richtingen.

Station	D	H	Z
Potsdam	W	+	—
Greenwich	W	+	+
Zi Ka Wei	E	+	—
Batavia	W	+	—
Kaap Hoorn	W	+	—

Wij vinden dus, met één uitzondering voor declinatie en één voor de verticale intensiteit, dat: *de beginstoot van een S-storing is tegengesteld aan den nastoringsvector, evenwel met een afwyking naar het Westen.*

Onderstelling omtrent den oorsprong der storingen.

Het bestaan van begrensde conische stroombundels van electrische energie welke de aarde treffen is wel niet geheel nieuw, maar heeft door MAUNDER's uitkomsten verhoogde aannemelijkheid verkregen. Volgens de storingen te Batavia opgeteekend, zou men mogen onderstellen, daf het voornamelijk de S-stormen zijn, die ontstaan, als de aarde door zulk een bundel wordt getroffen. Daar nu de aarde het eerst langs den boog van zonsondergang wordt getroffen en de G-stormen juist meestal 's morgens aanvangen, zoo is er waarschijnlijkheid voor, dat de G-stormen hieraan maar gedeeltelijk hun ontstaan te danken hebben.

Kunnen wij bij de stroombundels aan de voortbeweging van negatieve electronen denken, zoo zouden de G-stormen door de rechtstreeksche lichtbestraling of de voortdrijving van geladen deeltjes door den lichtdruk veroorzaakt kunnen worden, in den geest van de onderstellingen door SV. ARRHENIUS opgeworpen.

Verder mogen wij onderstellen, dat als de aarde eenmaal een lading heeft ontvangen, het verder verloop van de storiug hetzelfde is, omdat dit alleen van het plaatselijke uur afhankelijk is. ARRHENIUS

heeft in dien zin reeds een verklaring van het nachtelijke maximum gegeven.

Het is in den laatsten tijd vaak beproefd om de magnetische schommelingen te verklaren door de beweging van electrische ladingen door de hoogere lagen der atmospheer (SCHUSTER, VAN BEZOLD, SCHMIDT, BIGELOW).

De opmerkelijke analogie welke overal tusschen de stroomvelden der atmospherische circulatie en de krachtvelden der magnetische schommelingen ontmoet wordt, leidt tot dergelijke beschouwingen.

Daarom meen ik dat het geoorloofd is zulk een beschouwing te wagen, betreffende de oorzaak van den beginstoot en de nastoring.

Wij mogen onderstellen, dat de stroombundels negatieve electronen bevatten, en dat als de aarde door hen wordt getroffen, de allerbuitenste lagen der atmospheer met negatieve electronen geladen zullen worden.

Deze lagen evenwel blijven bij de dagelijksche omwenteling achter, en wel hoe hooger zij zijn hoe meer. Dientengevolge treedt een negatief geladen tegenstrooming in oostwestelijken zin op, die een toeneming van de horizontale intensiteit en een afneming van de verticale intensiteit zal veroorzaken.

De electronen zullen evenwel, wanneer zij in het magnetische veld der aarde treden, langs de krachtlijnen naar de magnetische zuidpool (de + pool) gedreven worden. Deze beweging is door de noorderlichtstralen bewezen.

De oostwestelijke beweging verandert daardoor in een noordoost-zuidwestelijke en de overeenkomstige magnetische kracht zal naar het westen afwijken.

Op deze wijze zou wellicht de beginstoot een verklaring kunnen vinden.

De plotselinge lading van de buitenste lagen der atmospheer met negatieve electriciteit zal de positieve ionen, wier tegenwoordigheid in de minder hooge lagen bewezen is, naar hoogere lagen trekken. Deze positieve ionen komen daardoor in een snellere tegenstrooming en een positieve oostwestelijke stroom wordt dientengevolge geboren.

De positieve ionen bewegen zich maar zeer langzaam langs de krachtlijnen naar het noorden toe, en geven dus geen noemenswaardige oostelijke afwijking van de optredende magnetische kracht. Die kracht zal dezelfde richting hebben als de nastoringskracht, vermindering der horizontale intensiteit en vermeerdering der verticale. Dat zij veel minder plotseling dan de beginstoot aangroeit is begrijpelijk, ook dat zij langzaam weer verdwijnt, naarmate de negatieve electronen òf de aarde weer verlaten òf zich met de positieve ionen

verbinden. Alleen zou men verwachten, dat de positieve strooming evenwijdig met de aardparalellen ware en dus de nastoringsvector naar de zuidelijke pool der aarde gericht en niet naar het zuidelijke magnetische aspunt. Misschien kunnen wij evenwel in den invloed van het regelmatige gedeelte van het aardmagnetisme op de verdeeling der positieve ionen de reden van dit feit vinden.

Hoe ruw ook deze verklaring van beginstoot en nastoring moge zijn, zij heeft toch een groot voordeel, n. l. dat zij de moeilijkheid ontgaat, die volgens Lord KELVIN daarin ligt, dat de uitwerping van energie door de zon, noodig om de magnetische storingen op aarde te veroorzaken, veel te groot moet genomen worden om eenigszins aannemelijk te zijn.

CHREE (Terrestrial Magnetism X, p. 9) toont aan, dat MAUNDER's beperkte stroombundels die moeilijkheid niet uit den weg ruimen.

Volgens mijn verklaring evenwel is het noodig om alleen de ontvangen lading op het oogenblik van ontmoeting in rekening te brengen en is het niet noodig om die over den geheelen tijd tusschen het een of meer terugkeeren van den stroombundel te integreeren.

Het is bij terugkeering mogelijk een intermitteerende emissie van energie aan te nemen. Ook wordt een gedeelte van de energie door de rotatie-energie van de aarde geleverd en een merkwaardige gevolgtrekking zou zijn, dat de omwentelingstijd der aarde door een magnetische storing met een zeer kleine fractie verlengd moet worden.

Batavia, 31 Augustus '06. W. VAN BEMMELEN.

Scheikunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer R. A. WEERMAN over: „*Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide*".

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT).

Uit de proeven van BAUCKE [1]) bij het propiolzuuramide en van FREUNDLER [2]), VAN LINGE [3]) en JEFFREYS [4]) bij het kaneelzuuramide schijnt te volgen, dat bij deze onverzadigde zuren de HOFMANN'sche reactie om met halogeen en alkali uit een amide een amine te maken niet gelukt.

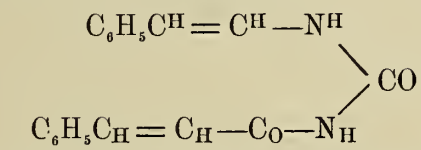
Men kan over het niet gelukken twee onderstellingen maken; in

---

[1]) Rec. 15, 123.
[2]) BULL [3] 17, 420.
[3]) Proefschrift VAN LINGE, Bazel 1896.
[4]) Am. Chem. Journ. 22, 43.

de eerste plaats, dat de dubbele binding de intramoleculaire atoomverschuiving, die bij de HOFMANN'sche reactie moet worden aangenomen, verhindert [1]) en in de tweede plaats, dat het amine dat zou moeten ontstaan, in dit geval het $C_6H_5CH=CHNH_2$ in de gegeven omstandigheden verandering ondergaat [2]).

Het eerste is nu *niet* het geval, daar het gelukte uit het kaneelzuuramide te maken het ureumderivaat:



waarbij dus de helft van het amide de omzetting heeft ondergaan.

Waar het hier een onverzadigd amide geldt, is het aangewezen om gebruik te maken van de wijziging van HOOGEWERFF en VAN DORP en niet met vrij halogeen te werken. Verder moet de hypochlorietoplossing geen extra alkali bevatten en werd wegens de onoplosbaarheid van het kaneelzuuramide en de daardoor veroorzaakte onwerkzaamheid, in alcoholische oplossing gewerkt.

Kan het op het eerste gezicht ook eenigszins vreemd lijken, dat in alcoholische oplossing het ureumderivaat en niet het urethaan ontstaat, zoo wordt dit toch verklaarbaar door de proeven van STIEGLITZ en EARLE [3]) dat isocyanaten zeer gemakkelijk met halogeenamiden [4]) reageeren.

Ter bereiding van het ureumderivaat lost men het kaneelzuuramide op in de achtvoudige hoeveelheid 96 pCt. alcohol, laat tot gewone temperatuur afkoelen en druppelt langzaam de KOCl oplossing toe, bereid volgens GRAEBE [5]) en waarbij de overmaat alkali onmiddellijk voor het gebruik door 2N HCl is geneutraliseerd (op 2 mol. amide 1 mol. KOCl). De vloeistof verwarmt zich en spoedig scheidt zich een kristalbrij van zeer fijne naalden af. Na eenige uren wordt afge-

---

[1]) Bij de groote analogie, die er bestaat tusschen de LOSSEN'sche omlegging van hydroxamzuren en de HOFMANN'sche reactie was deze eerste onderstelling wel niet waarschijnlijk daar THIELE toch uit het geacyleerde kaneelhydroxamzuur het urethaan $C_6H_5CH=CH-NH-CO_0C_2H_5$ bereidde. Een tweede aanwijzing, hoewel minder bewijzend, bij de meer verwijderde analogie tusschen de BECKMANN'sche omzetting en de HOFMANN'sche reactie, was het ontstaan van isochinoline uit het oxim van kaneelaldehyd (Ber. 27, 1954).

[2]) Zie THIELE, Ann. 309. 197.

[3]) Amer. Chem. Journ. 30, 412. C 1904, I, 239.

[4]) Dit is ook de reden, waarom bij de bereiding van urethanen volgens JEFFREYS het Na alcoholaat in eens toegevoegd moet worden.

[5]) Ber. 35, 2753.

zogen, hetgeen door de fijne verdeeling vrij lastig gaat. De geel gekleurde massa wordt nu met warme alcohol behandeld en daarna met water gewasschen. Het ureumderivaat blijft dan reeds vrij zuiver achter smpt. ± 218. Door één à tweemaal omkristalliseeren uit ijsazijn verkrijgt men het zuiver in naalden van smpt. 225—226.

0,1733 gr. stof geven 0,0894 gr. H_2O en 0,4682 gr. CO_2
0,1654 „ „ „ 0,1863 „ „ „ 0,4467 „ „
0,1654 „ „ „ 13,9 CC.N bij 19½° en 765 m.M.

Gevonden: 73,68 pCt. C 5,78 pCt. H 9,70 pCt. N
73,66 5,85

Berekend voor $C_{18}H_{16}N_2O_2$: 73,95 pCt. C 5,51 pCt. H 9,59 pCt. N

De verbinding is in de koude onoplosbaar in water, ligroin, aethylalcohol, methylalcohol, aether, zwavelkoolstof en benzol; bij kookhitte een weinig in alcohol en benzol en vrij gemakkelijk in ijsazijn, chloroform en aceton, onoplosbaar in alkaliën of zuren.

Scheikundig Laboratorium der T. H.

Scheikunde. — De Heer Holleman biedt, mede namens den heer H. A. Sirks, eene mededeeling aan over *„de zes isomere dinitrobenzoëzuren"*.

Volledige stellen van isomere benzolderivaten $C_6 H_3 A_2 B$ zijn nog zeer weinig bestudeerd; toch moet het voor het dieper indringen in de kennis dier derivaten van groot belang worden geacht de eigenschappen der zes mogelijke isomeren waaruit zulke stellen bestaan, aan een vergelijkend onderzoek te onderwerpen. Eene bijdrage hiertoe is het onderzoek der zes isomere dinitrobenzoëzuren, hetgeen de heer Sirks onder mijne leiding heeft uitgevoerd.

De overwegingen, die mij bij de keuze van deze serie isomeren hebben geleid waren de volgende. Vooreerst waren alle zes de isomeren bekend, hoewel de bereidingswijze van eenige hunner veel te wenschen overliet. Ten tweede bestond bij deze serie de gelegenheid om V. Meyers „esterwet" aan een veel breeder materiaal te toetsen, dan tot nu toe het geval was geweest en om te bestudeeren welken invloed de aanwezigheid van twee groepen, op verschillende plaatsen in de kern aanwezig, op de esterificatiesnelheid hebben en deze te vergelijken met die snelheid in de monogesubstitueerde benzoëzuren. Ten derde konden de dissociatieconstanten dezer zuren aan een vergelijkend onderzoek worden onderworpen en hunne waarden in verband gebracht worden met die der esterificatieconstanten. Eindelijk

konden de smeltpunten en spec. gew. der zuren en van hunne esters, in hun verband met diezelfde constanten bij andere zoodanige seriën, onderzocht worden.

Omtrent de bereiding der zes dinitrobenzoëzuren zij het volgende medegedeeld. Het symmetrische zuur (1, 3, 5, met 1 wordt steeds de plaats der carboxylgroep aangegeven) werd door nitratie van benzoëzuur of van *m*-nitrobenzoëzuur verkregen. Alle overige werden door oxydatie van de overeenkomstige dinitrotoluolen bereid. Deze oxydatie werd ten deele uitgevoerd met permanganaat in zwavelzure oplossing, ten deele door lang voortgezet koken met salpeterzuur 1.4 sp. gew. aan een opstijgenden koeler.

De bereiding der dinitrotoluolen moest voor drie hunner, nl. (1,3,4). (1,3,6) en (1,3,2), (CH_3 op 1) zelf ter hand worden genomen; (1.2,4) en (1,2,6) toch zijn in den handel te verkrijgen, terwijl (1,3,5) niet noodig was, omdat het overeenkomstige zuur, zooals reeds werd gemeld, door directe nitratie van benzoëzuur gemakkelijk toegankelijk was. Zooals men ziet, zijn alle drie de dinitrotoluolen, die moesten bereid worden, derivaten van *m*-nitrotoluol en werd dus beproefd welke dezer door verdere nitratie hiervan zouden kunnen verkregen worden.

Het *m*-nitrotoluol, hetgeen thans door DE HAEN in zuiveren toestand tegen billijken prijs in den handel wordt gebracht, werd daartoe met een mengsel van zwavelzuur en salpeterzuur bij ca 50° behandeld. Bij afkoeling van het verkregen nitratieproduct krystalliseerde eene belangrijke hoeveelheid 1,3,4 dinitrotoluol uit, welke nog kon vermeerderd worden door gefractioneerde distillatie in vacuo van het vloeibare deel; de hoogste fracties werden telkens vast en leverden weder dit dinitrotoluol, zoodat ten slotte uit 100 gr. *m*-nitrotoluol ca 65 gr. dinitrotoluol (1,3,4) verkregen werden.

Daar de lager kokende fracties, niettegenstaande zij grootendeels van dinitrotoluol (1,3,4) bevrijd waren, ook bij afkoeling niet vast werden, was het waarschijnlijk dat hierin, behalve een weinig van genoemd dinitrotoluol, nog meer dan één der andere isomeren zou voorkomen, wier vorming bij de nitratie van *m*-nitrotoluol theoretisch mogelijk is. Bedenkt men nl. dat de aanwezigheid van 1% van een isomeer in de vele gevallen die door mij onderzocht werden, ongeveer eene depressie van 0.5° in het smeltpunt geeft, dan was het feit dat de olie eerst aanzienlijk onder 0° vast werd en bij geringe temperatuurverhooging reeds weder smolt, terwijl de zuivere isomeren eerst bij 60° en hooger vloeibaar worden, niet te verklaren door de aanwezigheid van betrekkelijk geringe hoeveelheden (1,3,4) dinitrotoluol in de olie naast één ander bestanddeel, maar moet ondersteld wor-

den, dat zij uit een ternair systeem bestond. Dit werd bevestigd, toen het fractioneeren nog verder werd voortgezet; weldra begonnen nl. de laagst kokende fracties bij afkoeling, of ook langzaam bij gewone temperatuur, vast te worden en bleek deze zich afscheidende vaste stof het (1,2,3) dinitrotoluol te zijn. Het fractioneeren, gecombineerd met het uitvriezen der verschillende fracties, deed toen verder nog een derde isomeer tot afscheiding komen, nl. het (1,3,6) dinitrotoluol, waarmede dus de drie isomere dinitrotoluolen die bereid moeten worden, alle door het nitreeren van *m*-nitrotoluol waren verkregen. Het vierde mogelijke isomeer (1,3,5) werd ook bij voortgezet fractioneeren en uitvriezen, niet waargenomen.

Wat de relatieve hoeveelheden betreft, waarin de drie in het nitratieproduct van *m*-nitrotolual aangetoonde isomeren ontstaan, kan worden gemeld, dat dit product voor meer dan de helft uit (1, 3, 4) diditrotoluol bestaat, terwijl (1, 2, 3) in grootere hoeveelheid dan (1, 3, 6) schijnt voor te komen, daar de afzondering van dit laatste in voldoende hoeveelheid nog de meeste moeite kostte.

De *gecorrigeerde stolpunten* van de dinitrotoluolen (het zesde, symmetrische, werd ter completeering, volgens de methode van Beilstein A. **158**, 341 bereid) werden als volgt gevonden. Ook die der dinitrobenzoëzuren en van hunne aethylesters vindt men in onderstaande tabel.

	3.4	3.5	2.3	2.5	2.6	2.4
Dinitrotoluolen	58.3	92.6	59.3	50.2	65.2	70.1
Dinitrobenzoëzuren	163.3	206.8	204.1	179.0	206.4	180.9
Aethylesters	71.0	92.9	88.4	68.8	74.7	40.2

De *specifieke gewichten* der dinitrotoluolen en der aethylesters werden met behulp van Eykmans pyknometer bij 111°.0 bepaald met onderstaand resultaat:

CO_2H op 1 of CH_3	toluolen	esters
3.4	1.2594	1.2791
3.5	1.2772	1.2935
2.3	1.2625	1.2825
2.5	1.2820	1.2859
2.4	1.2860	1.2858
2.6	1.2833	1.2923

Water van 4° als eenheid. Gecorrigeerd voor opwaartschen luchtdruk en voor de uitzetting van glas.

Geleidingsvermogen. Dit werd op de gebruikelijke wijze met Wheatstone-brug en telephoon bij 25° en bij 40° bepaald. Aangezien de zuren in water moeielijk oplosbaar zijn, werd als begin-concentratie $v = 100$ of 200 genomen; de eindconcentratie was $v = 800—1600$. In onderstaande tabel zijn de dissociatie-constanten vereenigd.

Dinitrobenzoëzuren ⇒	3.4	3.5	2.3	2.5	2.4	2.6
$K = 100\,k$ bij 25°	0.163	0.163	1.44	2.64	3.85	8.15
$K = 100\,k$ bij 40°	0.171	0.177	1.38	2.16	3.20	7.57

Bij de vergelijking dezer cijfers valt terstond in het oog, dat de zuren met ortho-standige nitrogroep een veel grootere dissociatie-constante bezitten dan de twee andere, zoodat zij in dit opzicht in twee groepen te verdeelen zijn. Bij de zuren zonder orthostandige nitrogroep is de waarde der dissociatie-constante vrijwel dezelfde. Bij de vier andere blijkt daarentegen de plaats der tweede groep vrij groote verschillen te weeg te brengen. Het meest vergroot die tweede groep genoemde constante wanneer zij ook ortho staat; het 2-6-dinitrobenzoëzuur is in $^1/_{100}$ normaal oplossing reeds voor 90 % geioniseerd. Dan echter verhoogt eene NO_2-groep op paraplaats de dissociatie constante meer dan wanneer deze groep op meta staat; en voor de twee zuren 2,3 en 2,5 die beide de tweede groep op meta hebben, is K voor 2,5, dus voor het niet vicinale zuur aanzienlijk grooter dan voor het vicinale; zoodat ook hier niet alleen de plaats der groepen op zichzelf, maar ook hunne plaats ten opzichte van elkander invloed uitoefent. Daaruit volgt dan verder, dat de methode van Ostwald, ter berekening van de dissociatie constante van digesubstitueerde zuren uit die der overeenkomstige monogesubstitueerde zuren, niet juist kan zijn, zooals uit onderstaande tabel ook blijkt:

Dinitrobenzoëzuur CO_2H op 1	K berekend	K gevonden
3.4	0.23	0.16
3.5	0.20	0.16
2.4	4.1	3.8
2.5	3.6	2.6
2.3	3.6	1.4
2.6	64	8.1

Bij de twee vicinale zuren 2,3 en 2,6 zijn de afwijkingen van de berekende waarde bijzonder groot, zooals ik vroeger (Rec. **20**, 363) voor andere vicinaal gesubstitueerde zuren ook aantoonde.

Met het oog op de vergelijking der cijfers voor de dissociatie constanten dezer zuren en voor hunne esterifatie-constanten scheen het wenschelijk, om ook een oordeel te hebben omtrent de moleculaire geleidbaarheid dezer zuren in alcoholische oplossing, Daartoe werden zij tot $^1/_{200}$ N. in alcohol van 95% (vol.) opgelost en bij 25° het geleidingsvermogen dier oplossingen bepaald. Onderstaande tabel vereenigt de gevonden waarden met die van waterige oplossingen van dezelfde concentratie en temperatuur :

dinitrobenzoëzuren ⇛	3.4	3.5	2.3	2.5	2.6	2.4
μ_{200} in alcoh. opl.	1.1	1.15	1.75	2.25	2.7	2.9
μ_{200} in waterige opl.	161.5	162.5	293	321	355.5	335.5

waaruit blijkt, dat ook in alcoholische oplossing de zuren met orthostandige nitrogroep meer geioniseerd zijn, dan de andere.

Esterificatiesnelheid. De gevolgde methode was die van Goldschmidt, die het zuur in eene groote overmaat van alcohol oploste en als katalysator chloorwaterstof aanwendde. Het hier gebruikte alcoholische zoutzuur was 0,455 N. Bij gewone temperatuur bewaard, veranderde het zijn titre gedurende vele maanden niet merkbaar. Daar Goldschmidt aantoonde, dat de constanten evenredig zijn met de concentratie van den katalysator, werden alle omgerekend op eene concentratie van normaal zoutzuur. Door de groote overmaat van alcohol kon de vergelijking voor monomoleculaire reactie worden toegepast. De snelheidsmetingen werden bij 25°, 40° en 50° uitgevoerd. Bij deze laatste temperaturen ging het titre van het alcoholische zoutzuur (door chlooraethylvorming) zeer langzaam terug en moest dus daarvoor eene correctie worden aangebracht. De gebruikte alcohol was van 98.2 vol. %.

Om niet alleen de esterificatieconstanten E der dinitrobenzoëzuren onderling, maar ook deze met de constanten van benzoëzuur en zijne mononitro-derivaten te kunnen vergelijken werden, althans bij 25°, die constanten voor laatstgenoemde zuren bepaald, onder geheel dezelfde omstandigheden als bij de dinitrozuren. In onderstaande tabel zijn de verkregen resultaten vereenigd :

Zuren	E bij 25°	E bij 40°	E bij 50°
benzoëzuur	0.0132	—	—
m. NO_2 »	0.0071	—	—
o. » »	0.0010	—	—
3.4 dinitro »	0.0086	0.033	0.077
3.5 » »	0.0053	0.028	0.060
2.3 » »	0.0005	0.0025	0.0071
2.5 » »	0.0003	0.0027	0.0076
2.4 » »	0.0002	0.0017	0.0056
2.6 » »	onmeetbaar klein		

Zooals men ziet, is E voor benzoëzuur zelf verreweg het grootst, en doet iedere verdere substitutie zijne waarde dalen.

Ook bij de beschouwing van deze tabel valt het terstond op, dat bij de dinitrobenzoëzuren twee groepen te onderscheiden zijn. Degene met ortho-standige nitrogroep hebben hier eene veel *kleinere* constante dan de twee andere. *Terwijl dus de dissociatieconstante voor zuren met orthostandige nitrogroep het grootst is, is hunne esterificatieconstante het kleinst.* Zooals uit onderstaande tabel blijkt, gaat dit verschijnsel volkomen parallel: de zuren wier dissociatie constante het grootst is hebben de kleinste esterificatie constante en omgekeerd.

Dinitrobenzoëzuren	diss. const. bij 40°	esterif. const bij 40°
3.4	0.171	0.033
3.5	0.177	0.028
2.3	1.38	0.0025
2.5	2.16	0.0027
2.4	3.20	0.0017
2.6	7.6	< 0.0001

Bij een onderzoek in de literatuur is ons gebleken, dat deze regelmatigheid niet alleen in deze serie van dinitrobenzoëzuren bestaat, maar in een betrekkelijk groot aantal gevallen wordt waargenomen: De sterkste zuren worden het langzaamst veresterd. Men zoude

daaruit moeten besluiten, dat het bij de esterificatie door alcoholisch zoutzuur niet de geioniseerde, maar de ongesplitste moleculen der zuren zijn, die aan de reactie deelnemen.

Amsterdam
Groningen } Sept. 1906, Lab. d. Univ.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens den heer J. HUISINGA, eene mededeeling aan: *„over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur"*.

Van het phtaalzuur zijn twee isomere mononitroderivaten mogelijk die ook beide bekend zijn, in het bijzonder door een onderzoek van MILLER (A. **208**, 223). Het isophtaalzuur kan drie isomere mononitrozuren geven. Van deze is het symmetrische zuur, dat in verreweg de grootste hoeveelheid bij de nitratie ontstaat, goed bekend. Over de hierbij ontstaande monogenitreerde bijprodukten heerscht in de literatuur verschil van meening; in ieder geval is er slechts één tweede mononitrozuur vermeld, welks structuur echter twijfelachtig is gebleven.

Het onderzoek der nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur werd door ons ter hand genomen om ook hier de relatieve hoeveelheid der gelijktijdig ontstaande isomeren te bepalen, daar hieromtrent, voor de mononitrophtaalzuren, slechts een ruwe schatting (door MILLER) bekend was, terwijl voor de mononitroisophtaalzuren ook eerst nog moest worden uitgemaakt, welke isomeren daarbij ontstaan.

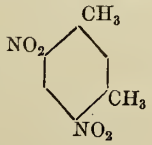
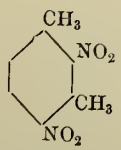
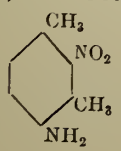
Wij zijn begonnen met de vijf mononitrozuren, afgeleid van phtaalzuur en isophtaalzuur, in geheel zuiveren toestand te bereiden. Voor de α- en β-nitrophtaalzuren leverde dit geene moeielijkheden op, daar de indicaties van MILLER, met slechts enkele ondergeschikte wijzigingen, geheel konden worden gevolgd. De zuren werden dus door nitratie van phtaalzuur, en scheiding der isomeren, verkregen.

Het *symmetrische nitro-isophtaalzuur werd* door nitratie van isophtaalzuur *bereid*. Het krystalliseert met 1 mol. H_2O en smelt bij 255—256° terwijl in de literatuur wordt opgegeven, dat het met $1^1/_2$ mol. H^2O krystalliseert en bij 248° smelt. Aanvankelijk hoopten wij, dat uit de moederloogen van dit zuur de twee andere nitro-isophtaalzuren zouden te verkrijgen zijn. Daartoe moest eerst het isophtaalzuur zelf in volkomen zuiveren toestand verkregen worden, daar het anders twijfelachtig was, of de gevormde bijprodukten inderdaad van isophtaalzuur afkomstig waren. Door oxydatie van zuiver *m*-xylol (van KAHLBAUM) werd een isophtaalzuur verkregen, hetgeen nog terephtaalzuur bevatte, dat er door omzetting in de barytzouten uit verwijderd kon worden.

In de moederloogen van het sym. mononitro-isophtaalzuur bleek echter van de bijprodukten slechts zulk eene kleine hoeveelheid aanwezig te zijn, dat aan eene bereiding der nitrozuren (1, 3, 2) en (1, 3, 4) (1 en 3 =carboxyl) hieruit niet kon gedacht worden. Daartoe werd de volgende weg ingeslagen.

Bereiding van asymmetrisch nitro-isophtaalzuur (1, 3, 4). Bij voorzichtige nitratie van *m*-xylol bij 0° met een salpeterzuur van 1.48 spec. gew. ontstaat een mengsel van mono- en dinitroxylol, hetgeen ook nog onveranderd *m*-xylol bevat. Door distillatie met waterdamp gaat dit laatste eerst over; wanneer de mededistilleerde vloeistofdruppels in water beginnen onder te zinken verwisselt men van ontvanger, waarin naast water nu het as-nitro-metaxylol wordt opgevangen. Het einde der distillatie herkent men daaraan, dat zich in den koeler krystallen van dinitroxylol beginnen te vertoonen; 100 gr. xylol gaven ca. 85 gr. mononitroxylol (1, 3, 4).

Na rectificatie van dit mononitroxylol (kookpunt 238°) werd het in alkalische oplossing met een kleine overmaat van permanganaat geoxydeerd, waarbij uit 20 gr. 12 à 13 gr. zuur gewonnen werd, dat echter uit een mengsel van nitrotoluylzuur en nitro-isophtaalzuur bestond, die door krystalliseeren uit water konden gescheiden worden. Zoo werd het a.s. nitro-isophtaalzuur gewonnen met een smeltpunt van 245°. In water is het veel meer oplosbaar dan het symm. zuur, nl. bij 25° tot een bedrag van ca. 1 %. Het krystalliseert, in tegenstelling van het symmetrische zuur, zonder krystalwater in kleine, tamelijk dikke, plaatvormige krystallen. In heet water, alcohol en aether is het zeer gemakkelijk oplosbaar.

Bereiding van het vicinale nitro-isophtaalzuur (1, 3, 2). Door Grevingk is opgemerkt, dat bij de nitratie van m-xylol met salpeterzwavelzuur er naast symmetrische dinitro-m-xylol  als hoofdprodukt ook het vicinale isomeer  ontstaat. Door reductie met zwavelwaterstof gaan beide dinitroxylolen over in nitroxylidienen, die betrekkelijk gemakkelijk te scheiden zijn. Het nitroxylidien  geeft door eliminatie der NH_2-groep vicinaal

nitro-m-xylol. Terwijl echter GREVINGK aangeeft, dat hij van het vicinale nitroxylidien eene opbrengst van 25 % verkreeg, werd door ons nooit meer dan eenige procenten van dit lichaam waargenomen, zoodat de bereiding van het vicinale nitro-m-xylol langs dezen weg, althans voor grootere hoeveelheden, tamelijk omslachtig blijft. Toen het bleek, dat de „fabrique de produits chimiques de Thann et Mulhouse" dit nitroxylol in den handel bracht, is de oxydatie, naast die met eigen vervaardigd matriaal, grootendeels met dit handelsprodukt doorgevoerd. Ook deze oxydatie werd in alkalische oplossing met permanganaat uitgevoerd. Het vicinale nitro-isophtaalzuur is een in heet water tamelijk en in koud water zeer moeilijk oplosbare, in fraaie glinsterende naaldjes krystalliseerende verbinding, die bij 300° smelt. Zij krystalliseert zonder krystalwater en is gemakkelijk oplosbaar in alcohol en aether, waaruit zij zich in naaldjes weer afzet.

Nu de drie mogelijke mononitro-isophtaalzuren verkregen waren, kon het vraagstuk ter hand worden genomen om den aard van het bijprodukt uit te maken,dat bij de nitratie van isophtaalzuur ontstaat. Nadat de hoofdmassa van het gevormde nitro-isophtaalzuur door krystallisatie verwijderd was, bleef een rest over, die in water veel meer oplosbaar dan dit zuur was, hetgeen op de aanwezigheid van het asymmetrische nitrozuur duidde. Inderdaad kon er dit ook door gefractioneerde kristallisatie uit afgezonderd worden. Hoe werd uitgemaakt, dat het nitratiemengsel werkelijk enkel een mengsel was van het symmetrische en het asymmetrische zuur, zal straks nader blijken.

Daar bij de bepaling van de relatieve hoeveelheden, waarin de nitratie-producten ontstaan, van oplosbaarheidsbepalingen werd gebruik gemaakt, volgen hier eerst de oplosbaarheden, bij 25°, in procenten, der vijf nitrophtaalzuren in water.

α-nitrophtaalz.	β-nitrophtaalz.	symm. nitro-isophaalz
2.048	zeer oplosbaar	met krystalwater
		0.157
asymm. nitro-isophtaalz.		vic. nitro-isophtaalz.
0.967		0.216

Quantitatieve nitratie van phtaalzuur. Deze werd met reëel salpeterzuur uitgevoerd. Het bleek, dat zij zelfs bij 30° zeer langzaam verliep, zoodat het phtaalzuur gedurende drie weken met de zesvoudige hoeveelheid salpeterzuur in aanraking werd gelaten. Het laatstgenoemde zuur werd nu, na verdunning met water, op een waterbad verdreven, of wel door verdamping boven kalk weggenomen. Het vaste residu werd zeer fijn gewreven en door langdurig verwarmen op 110° van de laatste sporen salpeterzuur bevrijd. Daar

onder de bovengenoemde omstandigheden de mononitrophtaalzuren niet verder genitreerd worden, kon door titratie worden uitgemaakt of alle phtaalzuur in mononitrozuur was overgegaan; het product was slechts zeer weinig geel gekleurd, zoodat eene verontreiniging geheel te verwaarloozen was. Van het aldus voor de analyse gereed gemaakte produkt werden verschillende hoeveelheden afgewogen, deze telkens in 100 gr. water gebracht, en na toevoegen van een overmaat α-nitrophtaalzuur in het schudtoestel gebracht. Het gehalte aan opgelost zuur werd door titratie bepaald en uit deze cijfers het gehalte aan β-zuur berekend, door gebruik te maken van eene tabel, die eerst vervaardigd was en waarin was aangegeven welke gehalten aan β-nitrozuur met een bepaald titre eener zoo verkregen oplossing overeenkomen.

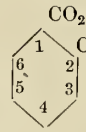
Zoo werd in vier goed met elkander overeenstemmende waarnemingen als gemiddelde gevonden, dat bij de nitratie van phtaalzuur met reëel salpeterzuur bij + 30° gevormd wordt:

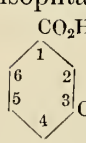
49.5 % α- en 50.5 % β-nitrophtaalzuur.

De quantitatieve nitratie van isophtaalzuur werd op dezelfde wijze uitgevoerd als die van phtaalzuur; ook hier waren voor de volledige nitratie bij 30° een paar weken noodig. De verontreiniging met gele bijmengselen was wederom geheel te verwaarloozen, daar een slechts zeer weinig gekleurd nitratieprodukt werd verkregen. Dit nitratieprodukt, zoo verkregen, bevat het watervrije α-nitro-isophtaalzuur, zoodat bij de oplosbaarheidsbepalingen, waardoor zijne samenstelling werd uitgemaakt, het krystalwaterhoudende zuur moest worden toegevoegd, daar het watervrije zuur zich slechts zeer langzaam hydrateert en eene grootere oplosbaarheid bezit. De bepaling van de totale hoeveelheid bijprodukt gaf aan, dat er slechts 3.1 % van gevormd was. Het qualitatieve onderzoek had reeds geleerd, dat dit het asymm. zuur bevat; dat het enkel hieruit bestaat werd op de volgende wijze uitgemaakt. Waren de gevonden 3.1 % inderdaad enkel asymm.-zuur, dan moest eene oplossing, verkregen door 100 gr. water te schudden met overmaat symm- en vicinaalzuur + 1 gr. nitratiemengsel (bevatte 31 mgr. asymm.-zuur), hetzelfde titre hebben als eene oplossing, verkregen door 100 gr. water met overmaat van beide genoemde zuren + 31 mgr. asymm.-zuur te schudden. Bevatte daarentegen het nitratieproduct ook vicinaal zuur, dus minder dan 31 mgr. asymm.-zuur, dan moest het titre lager worden gevonden. Dit nu was niet het geval, zoodat hieruit blijkt, dat het asymm.-zuur het eenige bijprodukt is. Het resultaat is dus, dat bij de nitratie van isophtaalzuur met reëel salpeterzuur bij 30°, gevormd wordt

96.9 % symmetrisch en 3.1 % asymmetrisch nitro-isophtaalzuur.

Vergelijkt men bovenstaande uitkomsten met het resultaat der nitratie van benzoëzuur, waarbij (bij 30°) 22.3 % ortho-, 76,5 % meta-, en 1.7% para-nitrobenzoëzuur ontstaat, dan blijkt het volgende.

Daar bij het phtaalzuur  de plaatsen 3 en 6 meta ten opzichte van het eene carboxyl staan en ortho ten opzichte van het tweede, de plaatsen 4 en 5 ook meta ten opzichte van één carboxyl, maar para ten opzichte van het andere, zou volgens de door mij ingevoerde onderstellingen te verwachten zijn, dat het α-zuur (het vicinale) hoofdproduct, het β-zuur daarentegen nevenprodukt is, omdat in dit laatste door één der carboxylen de nitrogroep naar para moet gericht worden en p-nitrobenzoëzuur slechts in zeer geringe hoeveelheid bij de nitratie van benzoëzuur ontstaat. Wat het isophtaalzuur betreft, ware te verwachten, dat verreweg in hoofdzaak



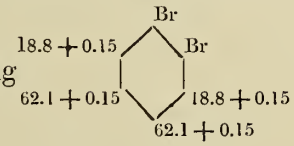
het symm. nitrozuur zal ontstaan, maar als nevenproducten zoowel (1, 3, 2) als (1, 3, 4) en wel het eerste in grootere hoeveelheid, hoewel anderzijds te bedenken is, dat eene nitrogroep een grooten weerstand schijnt te ondervinden als zij zich tusschen twee andere groepen moet plaatsen.

Wat de nitratie van het isophtaalzuur betreft, beantwoordt het resultaat van bovenstaand onderzoek vrij wel aan de verwachting, hoewel de geheele afwezigheid van het vic. nitro-isophtaalzuur toch opvallend is. Voor het phtaalzuur daarentegen is dit in mindere mate het geval, daar hier van de twee mogelijke isomeren ongeveer gelijke hoeveelheden gevormd worden.

De heer Huisinga heeft nu in zijn proefschrift eene poging gedaan om meer nauwkeurig dan tot nu toe het geval was, uit de verhoudingscijfers, waarin de isomeren C_6H_4AC en C_6H_4BC ontstaan bij invoering van C in C_6H_5A resp. C_6H_5B, te berekenen in welke verhouding de isomeren C_6H_3ABC ontstaan bij de invoering van C in C_6H_4AB. Hij merkt vooreerst op, dat er in een lichaam C_6H_5A twee ortho- en twee meta-plaatsen zijn, tegen één paraplaats, zoodat als de verhouding der isomeren C_6H_5AC p : q : r is (ortho : meta : para) voor ieder der ortho- en meta-plaatsen en voor de paraplaats deze verhouding $^1/_2$ p : $^1/_2$ q : r is. Verder geeft hij aan eene sommeering dezer verhoudingsgetallen de voorkeur boven eene vermenigvuldiging, die door mij bij de voorspelling der isomeren tot nu toe werd toegepast. Deze sommeering wordt daarom door hem verkozen, omdat hij de verhoudingsgetallen als evenredig met de „richtkrachten" beschouwt, die door de groepen A en B op de andere

plaatsen van de kern worden uitgeoefend en de samenwerking van twee zulke richtkrachten op één H-atoom door eene som dient te worden voorgesteld. Nu zijn echter enkel de verhoudingen dier richtkrachten bekend, niet hunne absolute waarde; bij de nitratie van nitrobenzol kan de kracht waarmede de NO_2-groep naar de m-plaats wordt gedreven, zeer goed van eene geheel andere orde zijn, dan waarmede diezelfde groep bij de nitratie van benzoëzuur eveneens naar de *m*-plaats wordt gericht. Men zal dus de cijfers, die de richtkrachten voorstellen (of er evenredig mede zijn) van twee verschillende groepen niet zonder meer mogen gaan optellen; dit zal enkel dan veroorloofd zijn als de twee aanwezige substituenten gelijk zijn.

Als voorbeeld zijner berekeningswijze zij het volgende aangevoerd. Daar bij nitratie van broombenzol 37.6% ortho, 62.1% para en 0.3% meta-nitrobroombenzol ontstaat, heeft de substitutie aan de afzonderlijke plaatsen van de benzolkern in de verhouding

plaats; voor de verhouding, waarin zich de isomeren bij de nitratie van o-dibroombenzol vormen geeft de berekening 

of 62.25 : 18.95; d. i. 76.7 % asymm. nitro-o-dibroombenzol
23.3 % vic. „ „ „
terwijl de waarneming aangaf 81.3 % asymm. en 18.3% vic.

Het valt nu niet te ontkennen, dat in een aantal gevallen deze berekeningswijze cijfers oplevert, die tot de waargenomene veel meer naderen, dan degene, die door de vroegere berekeningswijze werden verkregen, waarbij de niet gehalveerde verhoudingscijfers eenvoudig met elkander vermenigvuldigd werden. Maar daartegenover staan andere gevallen, vooral zulke, waarin een meta-gesubst. lichaam genitreerd wordt, waar de berekening van de waarneming nog zeer ver afstaat. Brengt men de verhoudingscijfers voor de enkele plaatsen in rekening, dan verkrijgt men daarenboven met de produkten in den regel eene veel betere nadering tot de waargenomen cijfers, dan met de sommen, ook voor het geval, dat de twee aanwezige substituenten ongelijk zijn, waarop Huisinga's berekeningswijze niet kan worden toegepast. Ten bewijze daarvan dient onderstaande tabel, waarin de verhoudingscijfers staan, in welke de isomere nitro-derivaten van de boven de kolommen staande

lichamen ontstaan, met de volgens de sommen en volgens de producten berekende waarden dier cijfers:

	Cl:Cl ortho	Cl:Cl meta	Br:Br ortho	Br:Br meta	$Co_2H:CO_2H$ ortho	$CO_2H:CO_2H$ meta
gevonden	7:93	4:96	18.3:81.7	4.6:95.4	49.5:50.5	3.1:96.9
product	18:82	9:91	23.3:76.7	13:87	82 :18	*10.6:89 4
som.	18:82	15:85	23.3:76.7	19:81	55.6:44.4	*38 :62

*totale hoev. bijprodukt.

	CO_2H : Cl ortho	CO_2H : Cl meta	CO_2H : Br ortho	CO_2H : Br meta
gevonden	16 0:84.0	8.7 : 91.3	19.7:80.3	11.4:88.6
product	17.7:82.3	17.7:82.3	23.3:76.7	23.3:76.7

Amsterdam, org. lab. d. Univ. 1906.

Scheikunde. — De Heer Holleman biedt namens den heer J. J. Blanksma eene medededeeling aan: „*Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen*"

(Mede aangeboden door den Heer v. Romburgh)

Voor eenige jaren[1]) heb ik aangetoond, dat door nitratie van meta-nitrophenol en van 3-5-dinitrophenol het tetra- en pentanitrophenol ontstaan. Hieruit bleek, dat de m-standige NO_2-groepen de verdere vervanging der o- en p-standige H-atomen door andere groepen niet verhinderen. Ik heb nu getracht deze twee gevallen met enkele te vermeerderen en daarom het gedrag van eenige m-gesubstitueerende phenolen onderzocht, die behalve een m-standige NO_2-groep nog een tweede m-standige groep bevatten, en wel van $C_6H_3 . OH . NO_2 . (CH_3,OH,OCH_3,OC_2H_5,Cl,Br)$ 1 . 3 . 5.

Van deze phenolen waren het 5-nitro-m-kresol[2]) en de monomethylether van het 5-nitroresorcine[3]) bekend. De nog onbekende gesubstitueerde phenolen werden gemaakt als volgt:

Het 5-nitroresorcine (Sp. 158°) uit zijn bovengenoemde monomethylether door verhitting (5 uren) met HCl (30%) op 160°, of door

[1]) Versl. Konk. Akademie 25 Jan. 1902. Rec. **21**. 241.

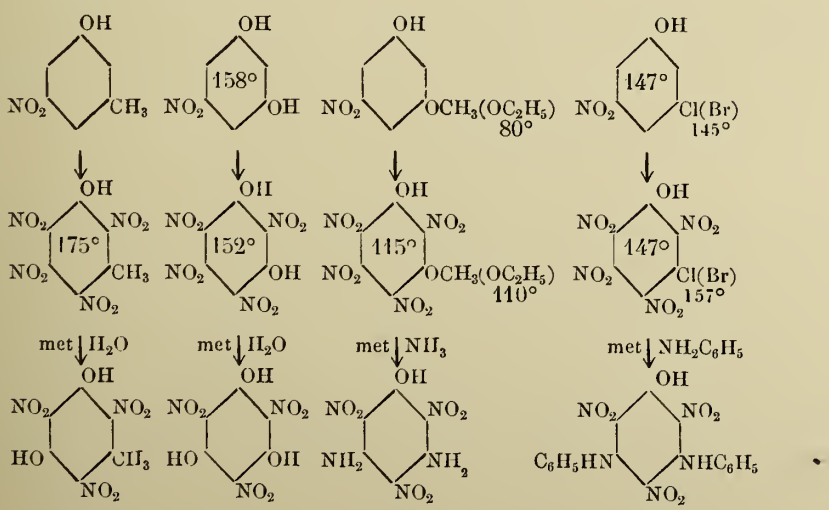
[2]) Nevile en Winther Ber. **15**. 2986.

[3]) H. Vermeulen Rec. **25**. 26.

reductie van 3-5-dinitrophenol met zwavelammonium tot 5-nitro-3-aminophenol (Sp. 165°) en vervanging van de NH_2-groep in dit lichaam door OH.

De monoethylether van het 5-nitroresorcine (Sp. 80°) werd bereid (volkomen analoog aan de methylether) uit 5-nitro-3-aminophenetol; het 3-Cl (Br) 5-nitrophenol werd verkregen door in het 5-nitro-3-aminoanisol de NH_2-groep volgens SANDMEYER door Cl (Br) te vervangen en daarna het aldus gevormde 3-Cl (Br)-5-nitroanisol Sp.(101° [1]) en 88°) met HCl (als boven) te verhitten waardoor naast CH_3Cl het gezochte 3-Cl (Br) 5-nitrophenol (Sp.147° en 145°) ontstaat.

De aldus verkregen 3-5-gesubstitueerde phenolen nemen door behandeling met Br-water gemakkelijk 3 atomen Br op; evenzoo worden door nitratie met HNO_3 (1.52) en H_2SO_4 3 nitrogroepen ingevoerd. Deze laatste verbindingen, die alle 4 NO_2-groepen bevatten gelijken op pikrinezuur, tetra- en pentanitrophenol. Uit een mengsel van salpeterzuur en zwavelzuur kristalliseeren ze als kleurlooze kristallen, die door eene geringe hoeveelheid water geel gekleurd worden; de stoffen smaken bitter, reageeren zuur, kleuren organische weefsels (o. a. de huid) sterk geel, sommige tasten de huid sterk aan, terwijl de aanwezigheid der 4 NO_2-groepen de lichamen tot explosiefstoffen maakt [2]).



In dit schema zijn alleen de smeltpunten aangegeven van de tot nu toe onbekende verbindingen.

---

[1]) DE KOCK, Rec. 20, 113 geeft als Sp. 91°.

[2]) Een vergelijkend onderzoek van deze eigenschappen bij deze verschillende verbindingen is nog niet uitgevoerd.

Het tetranitro-m. kresol geeft door koking met water het trinitro-orcine; op dezelfde wijze geeft het tetranitroresorcine [1]) trinitrophloroglucine; ook het tetranitrochloor- en broomphenol geven door koking met water (gemakkelijker met Na_2CO_3 oplossing) het trinitrophloroglucine. Door inwerking van NH_3 of $NH_2C_6H_5$ etc. in alcoholische oplossing krijgt men verschillende andere produkten, b. v. de in het schema opgenomen lichamen, die reeds vroeger uit het pentanitrophenol verkregen zijn [2]). Men ziet tevens, dat water of alcohol niet als oplosmiddel kunnen dienen om deze verbindingen om te kristalliseeren, daarvoor kunnen chloroform en tetrachloorkoolstof gebruikt worden.

Vervangt men in de bovengenoemde 3-5-gesubstitueerde phenolen de OH-groep door OCH_3 dan gelukt het niet drie nitrogroepen in te voeren. Zoo geeft bijv. de dimethylether van het 5-nitroresorcine twee isomere trinitroresorcinedimethylethers, (in hoofdzaak die met smeltpunt 195°, dus als bij de nitratie van 5-nitro-m-xylol) [3]) evenzoo geeft de methylether van 5-nitro-m-kresol (Sp. 70°) de methylethers van drie isomere trinitro-m-kresolen, voornamelijk de verbinding met Sp. 139°. De constitutie van deze lichamen is nog niet vastgesteld.

Amsterdam, September 1906.

Plantenkunde. — De Heer Went biedt eene mededeeling aan van den Heer W. Burck: „*Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen*".

(Mede aangeboden door den Heer J. W. Moll).

De overweging dat het openspringen der helmknoppen wordt voorafgegaan door een belangrijk waterverlies [4]) en dat bij zeer vele

---

[1]) Volgens Henriques (Ann. der Chem. **215**, 335) ontstaat tetranitroresorcine (Sp. 166°) door nitratie van 2-5-dinitrophenol. In het handboek van Beilstein (Bd. II, pg. 926) wordt terecht aan de juistheid van deze waarneming getwijfeld. Het verkregen lichaam is waarschijnlijk onzuiver trinitroresorcine geweest, ontstaan door inwerking van water op het primair gevormde tetranitrophenol. (Zie Rec. **21**, 258).

[2]) Rec. **21**, 264.

[3]) Rec **25**, 165.

[4]). Dit waterverlies bedraagt o.a. bij *Fritillaria imperialis* 20 % van het gewicht der helmknoppen, bij *Ornithogalum umbellatum* 86 %, bij *Diervilla floribunda* 87 %, bij *Aesculus Hippocastanum* 88 %, bij *Pyrus japonica* 80 %, bij verschillende gekweekte Tulpen 59—68 % enz. Bij planten wier meeldraden in den bloemknop openspringen is het waterverlies geringer; de helmknoppen en het stuifmeel blijven daarbij vochtig. Bij *Oenothera Lamarckiana* bedraagt het 41 %, bij *Canna hybrida grandiflora* 56 %. bij *Lathyrus latifolius* 24 %.

planten o. a. bij de *Compositae, Papilionaceae, Lobeliaceae, Antirrhineae, Rhinanthaceae, Fumariaceae* en voorts bij alle planten, die zich in den knop bestuiven zoowel chasmogame als cleistogame, dit openspringen plaats vindt binnen eene gesloten bloem, en derhalve niet door transpiratie aan de lucht, heeft mij aanleiding gegeven tot de vraag of wellicht de nectariën of andere suikerhoudende weefsels in de bloem, die geen nectar naar buiten doen uitvloeien, invloed uitoefenen op de wateronttrekking der helmknoppen.

Mijn vermoeden, dat er ook onder de planten, wier helmknoppen eerst openspringen na de ontluiking van de bloem, wel zouden gevonden worden, waarbij almede dit proces onafhankelijk is van den hygroscopischen toestand van de lucht, werd bevestigd. Brengt men de bloemen onder een glazen klok in eene met waterdamp verzadigde ruimte, dan springen de helmknoppen van vele planten ongeveer terzelfder tijd open als van bloemen, die buiten de vochtige kamer in de open lucht zijn neergelegd.

Dit heeft mij aanleiding gegeven tot het instellen van eenige proeven, die tot de hieronder volgende uitkomsten hebben geleid.

1°. Wanneer in eene bloem van *Diervilla* (*Weigelia*) *rosea* of *floribanda*, die bezig is zich te ontplooien, een der helmdraden met de pincet wordt geknepen, waardoor de waterafvoer uit den helmknop naar beneden wordt verstoord, dan springen de 4 helmknoppen wier helmdraden intact zijn gebleven open, maar de 5de blijft gesloten. Het is bij deze plant niet noodig om de bloem in eene vochtige kamer te brengen; men krijgt in den regel hetzelfde resultaat, wanneer de bloem, zonder meer, aan de plant bevestigd blijft.

Brengt men eene bloem in de vochtige kamer tegelijk met de losse helmknoppen van een tweede bloem, dan springen die, welke aan de bloem bevestigd zijn open; de losse helmknoppen niet. Brengt men alleen de bloemkroon met de daaraan verbonden meeldraden in de vochtige kamer, dan springen de helmknoppen even goed open als die uit de volledige bloem. Het nectarium, dat zich midden in de bloem, terzijde van het vruchtbeginsel bevindt, oefent derhalve op het openspringen der helmknoppen geen directen invloed uit. Praepareert men dan verder een meeldraad geheel vrij in zijn volle lengte en brengt hem dan in de vochtige ruimte naast enkele losse helmknoppen, dan springt de helmknop van den meeldraad open, terwijl de losse helmknoppen gesloten blijven.

Uit die proeven valt dus af te leiden, dat de helmknoppen openspringen onder den invloed van den met de kroon verbonden helmdraad. Een onderzoek met FEHLING's proefvocht leert nu, dat zoowel

de helmdraad als de geheele bloemkroon tot zelfs de kroonslippen de bekende reactie geven, die op glucose wijst.

Van *Digitalis purpurea* werden door eene snede twee der helmknoppen van eene bloem in de vochtige kamer vrij gemaakt van de bloemkroon. De niet losgesneden helmknoppen sprongen open, doch de beide andere bleven gesloten. Een in zijne geheele lengte vrij gepraepareerde meeldraad doet in de vochtige kamer den helmknop openspringen; losse helmknoppen blijven in de vochtige ruimte gesloten.

Een onderzoek met FEHLING's proefvocht leerde ook hier, dat de kroon overal glucose bevat, maar ter plaatse, waar de helmdraden met de kroon vergroeid zijn is die hoeveelheid bizonder groot. Verder zijn ook de helmdraden over hunne geheele lengte bizonder rijk aan suiker,

Van *Oenothera Lamarckiana* wier helmknoppen reeds in den knop openspringen, werd een bloemknop ontdaan van kelkslippen en bloembladen. Een der meeldraden werd in zijne geheele lengte uit de bloem losgemaakt; van een anderen meeldraad werd alleen de helmknop afgenomen. Deze drie voorwerpen werden naast elkander in de vochtige kamer gelegd. De helmknoppen der helmdraden, die aan de kelkbuis verbonden bleven en die van den lossen helmdraad sprongen open; de losse helmknop echter bleef gesloten. Het onderzoek met FEHLING, gaf hetzelfde resultaat als hierboven voor *Digitalis* aangegeven.

Soortgelijke proeven werden nog genomen met de bloemen van: *Antirrhinum majus* L., *Lamium album* L., *Glechoma hederacea* L., *Salvia argentea* L., *Nicotiana affinis* Hort. en *sylvestris* Comes., en *Symphytum officinale* L. die alle dezelfde uitkomsten gaven, terwijl met de bloemen van: *Ajuga reptans* L., *Stachys sylvatica* L., *Scrophularia nodosa* L., *Cynoglossum officinale* L., *Anchusa officinalis* L., *Echium vulgare* L., *Calceolaria pinnata*, *Hibiscus esculentus*, *Anoda lavateroides*, *Malva vulgaris* Tr., *Torenia asiatica*, *Corydalis lutea* Dc., *Colchicum autumnale* L., *Lysimachia vulgaris* L., *Atropa Belladona* L. en *Rhinanthus major* Ehrh. werd volstaan met de proef, die aantoonde, dat zij alle hunne helmknoppen doen opengaan in eene met waterdamp verzadigde ruimte. Bij alle deze planten geven de bloemkroon en meeldraden een zeer sterke reactie met FEHLING's suikerproefvocht.

Die proeven wijzen er op, dat het water aan de helmknoppen onttrokken wordt door een osmotische werking, die uitgaat van het glucosehoudende weefsel.

Ik moet hier opmerken, dat het voorkomen van glucose — voor

zoover men wel altijd tot glucose besluiten mag uit den neerslag van cuproöxyd na behandeling met FEHLING's proefvocht — in andere bloemdeelen dan de eigenlijke nectarien en vooral in de bloemkroon, een *zeer algemeen* verschijnsel is (waarop ik nader hoop terug te komen) en zich niet bepaalt tot die bloemen, waar meeldraden en bloemkroon met elkander vergroeid zijn. Er is hier veel eer sprake van een quantitatief verschil dan van eene bizondere eigenschap, die bij deze bloemen valt op te merken.

2. Bij *Stellaria media* zijn de epipetale meeldraden meestal geaborteerd, terwijl van de episepale in den regel slechts 3 zijn overgebleven. Deze 3 meeldraden dragen aan den voet, aan de buitenzijde, een klier, die nectar afscheidt.

Brengt men eene bloem in de vochtige kamer en kwetst men één der helmdraden met de pincet, dan springen later de helmknoppen der niet gekwetste meeldraden open doch de andere blijft gesloten. En wanneer men losse helmknoppen uit de bloem in de vochtige kamer brengt naast een intact gebleven bloem, dan blijven de losse helmknoppen gesloten, terwijl de helmknoppen uit de bloem openspringen. Zoowel de bloembladen als de meeldraden doen uit FEHLING's proefvocht cuproöxyd neerslaan; ook het weefsel aan den voet der kelkbladen reageert daarop. Maar het openspringen der helmknoppen staat niet hiermee in verband; verwijdert men de kroonbladeren, dan heeft dit geen invloed op de uitkomst van de zooeven vermelde proef.

De proef wijst er op, dat het water aan de helmknoppen wordt onttrokken door de osmotische werking, die uitgaat van het *nectarium*.

In verband hiermee verdient het opmerking, dat de nectariën van den epipetalen krans en ook die van de ontbrekende meeldraden uit den episepalen krans, tegelijk met de meeldraden geaborteerd zijn. Hetzelfde neemt men waar bij *Cerastium semidecandrum* L., *C. erectum* L. en *Holosteum umbellatum* L.; ook hier zijn de honigklieren der ontbrekende meeldraden doorgaans verdwenen.

Bij de *Papilionaceae* waarvan ik *Lupinus luteus L.*, *Lupinus grandifolius L.*, *Lathyrus odoratus L.*, *Lathyrus latifolius L.* en *Vicia Faba L.* onderzocht, springen zooals bekend is de helmknoppen reeds open in de gesloten bloem. De bloembladen doen uit FEHLING's proefvocht cuproöxyd neerslaan, doch oefenen geen invloed uit op het openspringen der helmknoppen. Bloemknoppen van *Lathyrus latifolius* en *Lathyrus odoratus* werden van bloembladen ontdaan, in de vochtige kamer gebracht tegelijk met losse helmknoppen. De losse helmknoppen bleven gesloten, doch de andere sprongen open.

Op dezelfde wijze als de bloemen van *Stellaria media* en der

genoemde *Papilionaceae* verhouden zich ten aanzien van het openspringen der helmknoppen in een met waterdamp verzadigde ruimte: *Stellaria Holostea L., St. graminea L., Cerastium Biebersteinii C. arvense L., Cochlearia danica L., Sisymbrium Alliaria Scop., Crambe hispanica L., Bunias orientalis L., Capsella Bursa pastoris Mnch., Hesperis violacea L., H. matronalis L., Thlaspi arvense L., Alyssum maritimum Lam.*, en verder *Lychnis diurna Sibth., Silene inflata* Sm. *Galium Mollugo L., Asperula ciliata Rochl., Campanula media L., C. latifolia L.*

Bij alle deze planten meen ik het openspringen der meeldraden te mogen toeschrijven aan den invloed der nectariën.

Bij *Hesperis* vindt men 2 groote nectariën aan de binnenzijde van den voet der 2 kleine meeldraden en tusschen deze en de 4 groote meeldraden. Brengt men van *Hesperis violacea* of *H. matronalis L.* eene bloem, na ze van kelk- en bloembladen te hebben ontdaan, in de vochtige kamer, dan springen bijna altijd alleen de 4 lange meeldraden open; de twee andere blijven gesloten.

Het is herhaaldelijk waargenomen, dat de nectar-afscheiding een aanvang neemt zoodra de meeldraden openspringen.

In verband met het bovenstaande zou men nu geneigd zijn daaruit af te leiden, dat de toevoer van water uit den helmknop de afscheiding van nectar veroorzaakt. Wanneer men echter bij *Stellaria media* de helmknoppen verwijdert vóór dat zij water naar de nectariën hebben doen afvloeien, dan vindt men desniettegenstaande bij het ontluiken der bloem de nectariën rijkelijk van honig voorzien. Hetzelfde laat zich waarnemen in de mannelijke bloemen van *Aesculus Hippocastanum*. In de nog zoo goed als gesloten bloemknop is het nectarium nog droog. Wanneer de bloem voortgaat zich te openen ziet men nog vóór dat de helmknoppen ter halver lengte uit den knop te voorschijn zijn gekomen, kleine droppeltjes vocht verschijnen op de oppervlakte van het nectarium, welke droppeltjes grooter worden naarmate de helmknoppen meer en meer naderen tot het oogenblik, waarop zij openspringen. Door weging laat zich bepalen, dat wanneer de eerste droppeltjes nectar op de oppervlakte van het nectarium zichtbaar worden, de helmknoppen reeds een deel van hun oorspronkelijk gewicht verloren hebben. Ook hieruit zou men geneigd zijn af te leiden, dat het water uit de helmknoppen weer in den vorm van nectar naar buiten komt. Wanneer men echter uit zeer jonge knoppen, wier nectarium nog niet vochtig is, de helmknoppen verwijdert, treedt toch op een verder stadium van de ontwikkeling van den bloemknop, de nectar-afscheiding evengoed op

als in bloemknoppen, die in 't bezit gebleven zijn der helmknoppen.

Bij *Fritillaria imperialis* is mij hetzelfde gebleken; doch was hier de nectarafscheiding niet zoo overvloedig als in knoppen, wier helmknoppen niet verwijderd waren geworden. Ik meen dat deze waarnemingen er op wijzen, dat de in de nectariën of andere suikerhoudende weefsels in de bloem opgehoopte glucose, wanneer zij begint hare osmotische werking uit te oefenen, niet alleen water tot zich trekt uit de helmknoppen, maar ook van elders uit de omgeving.

3. Bij de ondervolgende planten blijven de helmknoppen in eene met waterdamp verzadigde ruimte gesloten. Voor zoover zij in het bezit zijn van nectariën, bleken deze geen invloed op het openspringen der helmknoppen uit te oefenen.

Ranunculus acris L., R. bulbosus L., Aquilegia vulgaris L., Clematis Vitalba L., Chelidonium majus L., Brassica oleracea L., Geranium molle L., G. Robertianum L., G. macrorhizum L., Geum urbanum L., Rubus caesius L., Philadelphus coronarius L., Heracleum Sphondylium L., H. lanatum Michx, Aegopodium Podagraria Spr., Carum Carvi L., Pimpinella magna L., Valeriana officinalis L., Ligustrum vulgare L. Majanthemum bifolium Dc., en *Iris Pseudacorus L.*

Het meest opvallende is, dat *Brassica oleracea L.* eene uitzondering maakt op hetgeen overigens bij de Cruciferae werd waargenomen; de positie der meeldraden ten opzichte van de nectariën, die rijkelijk honig afscheiden, zou doen verwachten, dat zij zich in eene vochtige kamer evenzoo als de andere zou gedragen. Hetzelfde valt op te merken betreffende de soorten van *Geranium*.

De afscheiding van nectar in de bloem heeft reeds vele jaren vóór dat Sprengel zijne inzichten daarover heeft bekend gemaakt de aandacht getrokken van verschillende natuuronderzoekers. Ook na Sprengel in de eerste helft der vorige eeuw, is zij menigmaal het onderwerp geweest van onderzoek. Die natuuronderzoekers kwamen allen hierin met elkander overeen, dat zij overtuigd waren, dat, afgescheiden van de beteekenis der honigafscheiding voor de bevruchting der bloemen door de tusschenkomst van insecten, waarop Sprengel de aandacht gevestigd had de suikerhoudende weefsels en de afgescheiden vloeistof ook nog in ander opzicht van eenig direct nut waren voor de plant.

Nadat Darwin in 1859 de waarnemingen van Sprengel omtrent de biologische beteekenis der verschillende bloemeigenschappen — welke waarnemingen meer en meer in vergetelheid geraakten — op nieuw in 't licht had gebracht en de consequenties daarvan had gemeend te kunnen aanvaarden door ze in verband te brengen, eens-

deels met zijne inzichten omtrent de noodzakelijkheid der kruisbevruchting voor het behoud der levensenergie van de soort, anderendeels met de theorie der natuurlijke teeltkeus is het onderzoek naar nog eene andere (primaire) beteekenis der nectariën voor de plant, gedurende geruimen tijd, geheel op den achtergrond gekomen.

Eerst in 1878 is dit onderwerp op nieuw ter sprake gebracht door Bonnier [1]), die in zijne uitvoerige verhandeling over de nectariën, waarin zoowel de anatomische als de physiologische zijde van het vraagstuk aan een zeer uitgebreid onderzoek werd onderworpen, aan 't licht bracht, dat suikerhoudende weefsels in de bloem en vooral in de onmiddellijke nabijheid van het vruchtbeginsel niet alleen, worden aangetroffen bij die planten, die geregeld tijdens den bloei nectar afscheiden, maar ook bij zulke planten, die onder normale omstandigheden, nimmer een zoodanige vloeistof doen uitvloeien. Bij die bloemen, die in de literatuur „pollenbloemen" worden geheeten, omdat de insecten daarin geen nectar vinden, werden door hem evenzoogoed suikerhoudende weefsels aangetroffen als in de z.g. „insectenbloemen". Zelfs bij windbloemige planten vond hij „nectaires sans nectar" o. a. bij *Avena sativa*, *Triticum sativum* en *Hordeum murinum*. Een aantal planten, die onder gewone levensvoorwaarden geen nectar bevatten, kon hij tot nectar-afscheiding brengen door ze onder daartoe gunstige condities te stellen.

Aan het einde van zijn artikel brengt hij in herinnering, dat eene accumulatie van reservestoffen overal daar, waar een tijdelijke stilstand optreedt in de ontwikkeling, een zeer algemeen en goed gekarakteriseerd verschijnsel mag heeten. Wanneer eene plant aan het einde van de groeiperiode in hare verdere ontwikkeling stilstaat, heeft zij reservestoffen opgezameld in hare onderaardsche deelen en wanneer het zaad zijn ontwikkeling voltooid heeft, heeft het voedingsstoffen opgehoopt in het kiemwit of in de zaadlobben van het embryo. Die reservestoffen in assimileerbare verbindingen omgezet, dienen dan voor de allereerste voeding der nieuw gevormde deelen.

Hij komt nu tot het besluit, dat er in de nabijheid van het ovarium saccharose wordt geaccumuleerd en dat deze reservestof na de bevruchting en naar mate de vrucht zich ontwikkelt, geheel of grootendeels overgaat in het weefsel van de vrucht en in het zaad na vooraf, onder de werking van een oplosbaar ferment in assimileerbare verbindingen te zijn omgezet.

Ook mij heeft het onderzoek geleerd, dat eene ophooping van

---

[1]) Gaston Bonnier. Les nectaires. Étude critique, anatomique et physiologique. Annales des sciences naturelles. Tome VIII. 1878.

saccharose als reservestof in de bloem een zeer algemeen voorkomend verschijnsel is. [1])

Maar behalve de rol, die BONNIER aan 't licht heeft gebracht en de beteekenis van den afgescheiden nectar voor de bevruchting is het mij duidelijk geworden, dat zoowel de uit de saccharose gevormde glucose, als de naar buiten afgescheiden nectar, ook nog in andere opzichten voor de plant van groot belang zijn. De hier meegedeelde waarnemingen wijzen reeds op eene zeer belangrijke en primaire functie n.l. *om de meeldraden in staat te stellen te rechter tijd hun stuifmeel aan de oppervlakte te brengen, onafhankelijk van den hygroscopischen toestand van de lucht.*

Ik hoop eerlang op eene andere functie te kunnen wijzen.

De nectarafscheiding verschijnt nu in een ander licht. De meening, dat zij te beschouwen is als een excretie van schadelijke of overtollige bijproducten der stofwisseling, [2]) die omdat die vloeistof door de insecten gretig werd weggenomen, in den loop der tijden tot verdere ontwikkeling gekomen is onder de werking der natuurlijke teeltkeus, als nuttige aanpassing ter bevordering der kruisbevruchting, moet plaats maken voor de meening, dat zij, voorafgegaan aan alle aanpassing, in hare verdere ontwikkeling gelijken tred heeft gehouden met die der geslachtsorganen.

Pathologie. — De Heer SPRONCK biedt eene mededeeling aan van den Heer H. EYSBROEK, cand. arts: *„Over de Amboceptoren van een Antistreptococcenserum"*. (Uit het Pathologisch Instituut te Utrecht).

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING)

Zooals bekend is komt er in het serum van een dier, dat behandeld is met de bloedlichaampjes van een dier van een andere soort, een stof voor, welke in staat is met behulp van een andere stof, die reeds in normaal serum aanwezig is, de bloedlichaampjes van het tweede dier tot oplossing te brengen. Eerstgenoemde stof, welke slechts in immuunsera voorkomt, is thermostabiel en wordt door verschillende onderzoekers, al naar gelang de voor-

[1]) Men zie hierover ook: PAUL KNUTH, Über den Nachweis von Nektarien auf chemischem Wege. Bot. Centralbl. LXXVI. Band, 1898, p. 76 en ROB. STÄGER, chemischer Nachweis von Nektarien bei Pollenblumen und Anemophilen. Beihefte zum Bot. Centralbl. Band XII. 1901, p. 34.

[2]) CH. DARWIN. Origin of species. Sixth Edition. 1872. Chap. IV, p. 73 en The effects of Cross and Selffertilisation. Edition 1876. Chap. X, p. 402.

stelling, welke zij zich van hare werking maken, ook verschillend genoemd (Amboceptor van EHRLICH, Substance sensibilisatrice van BORDET, Fixateur van METCHNIKOFF). De andere stof, die normaliter in allerlei sera in grooter of kleiner hoeveelheid voorkomt, wordt door verhitten op 55—56° C. of door staan aan het licht zeer gemakkelijk ontleed. Het is verder gebleken, dat laatstgenoemde stof identiek is met een reeds vroeger door FODOR [1]) en FLÜGGE [2]) in normaal bloedserum aangetoonde bactericide stof, waaraan door BUCHNER de naam alexine gegeven is. Naast dezen naam worden tegenwoordig ook de benamingen komplement (EHRLICH) en cytase (METCHNIKOFF) gebruikt.

Had reeds in 1889 METCHNIKOFF op de analogie tusschen haemolyse en bacteriolyse gewezen, door latere onderzoekingen kon dit vermoeden volkomen bevestigd worden.

In 1901 publiceerden BORDET en GENGOU [3]) een methode om door middel van komplementbinding de aanwezigheid van een „substance sensibilisatrice" in sera van dieren, die tegen bepaalde micro-organismen geïmmuniseerd waren, aan te toonen. Tegelijk vonden ze, dat deze amboceptor een specifieke is; dat b.v. de in het bloed van dieren, welke tegen choleravibrionen geïmmuniseerd waren, voorkomende amboceptor wel werkzaam is tegenover de choleravibrionen zelf, maar niet tegenover andere bacteriën, b.v. typhusbacillen.

Omgekeerd is men dus in de gelegenheid om met behulp van een voorhanden amboceptor, door middel van komplementbinding, het daarbij behoorend micro-organisme van andere te onderscheiden.

Gebruik makende van genoemde methode van BORDET—GENGOU gelukte het aan BESREDKA [4]) ook in een door hem bereid antistreptococcenserum een amboceptor aan te toonen. Dit serum was verkregen van een paard, dat gedurende eenigen tijd intraveneus was ingespoten met een mengsel van 6—8 verschillende streptococcen, die op één uitzondering na direct — dus zonder passage door dieren, van pathologische processen van den mensch afkomstig waren. Verder heeft hij van de aanwezigheid van een amboceptor in zijn serum gebruik gemaakt, om na te gaan, of het misschien mogelijk zou zijn, met behulp van die stof, verschillende stammen van streptococcen van elkaar te scheiden.

Onder de voornaamste bezwaren, welke nog steeds bij de bereiding van een antistreptococcenserum worden ondervonden, dient in

[1]) Deutsche Med. Wochenschrift, 1887. N°. 34, S. 745.
[2]) Zeitschrift für Hygiene, Bd. IV, S. 208.
[3]) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 15, 1901, p. 289.
[4]) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 18, 1904, p. 363.

de eerste plaats het feit genoemd te worden, dat de direct van pathologische processen bij den mensch afkomstige — en voor dezen hoog virulente streptococcen (scarlatina, erysipelas, septicaemie) in het algemeen voor onze gewone proefdieren een betrekkelijk geringen graad van virulentie bezitten. Hierdoor wordt eenerzijds de bereiding van een krachtig werkend serum bemoeilijkt, aan den anderen kant is een contrôle van het verkregen serum bijna onmogelijk. In de tweede plaats doet zich echter de vraag gelden, of alle, uit verschillende ziekteprocessen gekweekte streptococcen moeten beschouwd worden als vertegenwoordigers van een en dezelfde soort en dus slechts als varieteiten op te vatten zijn, of dat de onderlinge verwantschap een veel geringere is. Een oplossing van deze vraag, zoo mogelijk in dien zin, dat men kon komen tot een rationeele onderverdeeling in de groote groep der pathogene streptococcen, zou voor de serotherapie van groot belang te achten zijn.

Voor enkele jaren heeft SCHOTTMÜLLER [1]) getracht in plaats van de oudere morphologische verdeeling in streptococcus longus en streptococcus brevis (VON LINGELSHEIM [2]), BEHRING [3]) een nieuwe, op biologische gronden gebaseerde indeeling te geven. Het was hem mogelijk bij het kweeken van verschillende streptococcenstammen op bloedagar, twee typen te onderscheiden: 1e. grauwe kolonies met doorzichtigen hof; 2e. groenachtige zonder hof. De tot de eerste groep behoorende streptococcen zijn voor den mensch zeer virulent, en worden dan ook gevonden bij erysipelas, septicaemie, scarlatina, phlegmone enz., terwijl de tot de tweede groep behoorende in het algemeen voor mensch en dier weinig pathogeen zijn. SCHOTTMÜLLER verdeelt de pathogene streptococcen dus als volgt:

1. Streptococcus pyogenes s. erysipelatos.
2. Streptococcus mitior s. viridans.
3. Streptococcus mucosus.

Tot een dergelijk resultaat zijn in den laatsten tijd, op ongeveer dezelfde wijze, ook verschillende andere onderzoekers (EUG. FRAENKEL [4]), SILBERSTROM [5]), BAUMANN [6]) gekomen.

BESREDKA [7]) daarentegen trachtte met behulp van de methode der komplementbinding verschillende streptococcen van elkander te onder-

[1]) Münch. Med. Wochenschrift, 1903, N°. 20, S. 849; N°. 21, S. 909.
[2]) Zeitschrift für Hygiene, Bd. X, S. 331.
[3]) Centralblatt. für Bakteriologie, Bd. 12, S. 192.
[4]) Münch. Med. Wochenschrift, 1905, N°. 12, S. 548; N°. 39, S. 1869.
[5]) Centralblatt für Bakt., 1e Abth., Orig., Bd. 41, S. 409.
[6]) Münch. Med. Wochenschrift, 1906, N°. 24, S. 1193.
[7]) l. c.

scheiden. De conclusie, waartoe hij komt, is dat de „substances sensibilisatrices" in zijn serum aanwezig „rigoureusement" specifiek zijn; dat het serum van een paard, geïmmuniseerd met een streptococcus *A*, slechts den met dien bepaalden streptococcus correspondeerenden amboceptor *A''* bevat. Toch vond hij echter dezen amboceptor *A''* niet alleen werkzaam tegenover den streptococcus *A*, maar ook tegenover eenige andere stammen (*B*, *C*), waaruit volgens Besredka de identiteit, of ten minste de nauwe verwandschap van de genoemde streptococcen *A*, *B* en *C* zou blijken.

Naar aanleiding van deze uitkomsten zijn door mij eenige proeven gedaan, om na te gaan in hoeverre werkelijk door de specificiteit der amboceptoren, een scheiding van verschillende pathogene streptococcen mogelijk is.

Het antistreptococcenserum, dat ik gebruikte, werd mij zeer bereidwillig verstrekt door Prof. Spronck, wien ik daarvoor en voor den verderen steun, bij mijn werk ondervonden, hartelijk dank zeg.

Genoemd serum was afkomstig van een paard, dat gedurende zeer geruimen tijd (van Januari 1905 tot Juli 1906) met een aantal exemplaren van streptococcen en staphylococcen van verschillende herkomst werd ingespoten en wel subcutaan. Deze inspuitingen geschiedden wekelijks; hiervoor werden in de eerste maanden stijgende hoeveelheden, later iedere maal gemiddeld 40—60 c.C. gebruikt van een mengsel, bestaande uit gelijke deelen van een ascitesbouilloncultuur van de verschillende streptococcen en van een bouilloncultuur van de staphylococcen. Het mengsel werd vooraf twee maal gedurende een half uur op 55° C. verhit. Zoowel strepto- als staphylococcen waren direct, dus zonder passage door dieren, van den mensch afkomstig.

Dat het serum werkelijk curatieve eigenschappen bezit, bleek naast waarnemingen in de kliniek, ook uit dierproeven. Konijnen, die ingespoten werden met een mengsel van strepto- en staphylococcen, konden door toediening van betrekkelijk geringe hoeveelheden antistreptococcenserum in het leven gehouden worden, terwijl contrôledieren binnen korten tijd stierven.

De methode, welke door mij gevolgd werd, is die van Bordet—Gengou [1]). Voor iedere proef werden zes buisjes gebruikt, die respectievelijk bevatten [2]):

[1]) l. c.

[2]) Als komplement werd het versche bloedserum van een cavia gebruikt. De te onderzoeken streptococcen werden op Loeffler's gestold bloedserum gekweekt, en na 24 uur in physiologische NaCl tot een homogene emulsie gesuspendeerd. Het antistreptococcenserum werd vooraf gedurende één uur verhit op 56° C., even-

N°. 1: $^2/_{10}$ c.C. komplement, $^1/_2$ c.C. emulsie van streptococcen, $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum.

N°. 2: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

N°. 3: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. physiologische NaCl, $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum,

N°. 4: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

N°. 5: $^2/_{10}$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum.

N°. 6: $^2/_{10}$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

Na omroeren laat men de buisjes 3 à 5 uur bij kamertemperatuur staan, daarna voegt men aan ieder toe: $^2/_{10}$ c.C. van een mengsel, bestaande uit 2 c.C. haemolytisch serum en 1 c.C. bloedlichaampjes van een konijn, die men eenige malen goed met physiologische NaCl gewasschen heeft, ter verwijdering van het aanhangende serum. Al spoedig, meestal binnen 10 minuten, vertoonen de buisjes 2, 3 en 4 zeer duidelijk het verschijnsel der haemolyse, die natuurlijk in de buisjes 5 en 6 niet tot stand komt wegens afwezigheid van komplement. Uit het al of niet tot stand komen der haemolyse in het eerste buisje, besluit men tot de af- resp. aanwezigheid van een amboceptor in het onderzochte serum.

Het is noodzakelijk telkens al deze contrôle-proefjes te herhalen, in de eerste plaats, omdat sommige streptococcen bij hun groei een haemolysine produceeren; in de tweede plaats, omdat bacteriën reeds normaliter, zonder hulp van een amboceptor, in staat zijn komplement te binden, zij het dan ook in veel geringere mate. Zeer duidelijk kan men dit in vitro waarnemen. In 6 buisjes werden achtereenvolgende verdunningen gemaakt van een cultuur van diphteriebacillen; bij ieder buisje kwam $^2/_{10}$ c.C. komplement. Na 3 uur werd aan ieder toegevoegd $^2/_{10}$ c.C. van een mengsel van 2 c.C. haemolytisch serum (verhit op 56° C.) en 1 c.C. gewasschen konijnenbloed. Een half uur daarna was het resultaat als volgt: geen haemolyse in het eerste (minst verdunde) buisje, geringe haemolyse in het 2de buisje, steeds meer haemolyse in de buisjes 3, 4 en 5, terwijl deze in het zesde (dus meest verdunde) buisje volkomen was.

---

zoo het als contrôle dienende versche, normale paardeserum en het haemolytische serum, dat afkomstig was van caviae, welke te voren 3 of 4 maal waren behandeld met 5 c.C. gedefibrineerd konijnenbloed. Als physiologische NaCl werd altijd een 0,9% oplossing gebruikt.

Dezelfde proef werd gedaan met verschillende andere bacteriën met een gelijksoortig resultaat.

Het is dus te begrijpen, dat het nog al eens voorkomt, dat men in het eerste der bij de methode van BORDET—GENGOU gebruikte buisjes geen haemolyse ziet tot stand komen tengevolge van een overmaat van bacteriën, blijkens het gelijktijdig absent zijn van de haemolyse in het tweede buisje. Zonder contrôlebuisjes zou men allicht uit het wegblijven der haemolyse besluiten tot de aanwezigheid van een amboceptor.

Allereerst werd nu nagegaan, of in het door mij gebruikte antistreptococcenserum een amboceptor tegenover een vijftal bij de immunisatie gebruikte streptococcen aanwezig was. Het resultaat was positief. Daarna werden verschillende andere streptococcen aan het onderzoek onderworpen. Deze streptococcen waren direct van zeer verschillende aandoeningen bij den mensch als scarlatina, cholecystitis, septicaemie, febris puerperalis, angina, afkomstig en hadden bij de immunisatie geen dienst gedaan. Onder deze streptococcen waren er enkele van patiënten, die tijdens het leven ingespoten waren geweest met hetzelfde antistreptococcenserum, evenwel zonder succes. De streptococcen werden dan post mortem uit het bloed of uit de milt gekweekt. Andere daarentegen waren gekweekt van patienten, waarbij inspuitingen van het serum een zeer duidelijke, curatieve werking hadden gehad. Vermoed werd nu, dat tegenover eerstgenoemde streptococcen geen amboceptor in het antistreptococcenserum zou gevonden worden.

Het onderzoek kon echter dit vermoeden niet bevestigen. *Alle streptococcen, onverschillig van welke herkomst ze waren, vertoonden onder invloed van het antistreptococcenserum een sterke komplementbinding.*

Vasthoudende aan de specificiteit der amboceptoren zou men nu kunnen komen tot dezelfde conclusie als BESREDKA [1]) en alle laatstgenoemde streptococcen als identiek of ten minste na verwant beschouwen aan de bij de immunisatie gebruikte. Voortgezette proeven met enkele, van dieren afkomstige, pathogene streptococcen leidden echter tot een andere opvatting. Gebruikt werden een streptococcus, die gekweekt was uit de longen van een cavia, die spontaan aan pneumonie gestorven was; verder den bekenden droesstreptococcus (Str. equi) en nog een tweetal andere streptococcen, die naast den Str. equi gekweekt waren uit etter, die afkomstig was van aan goed-

[1]) l. c.

aardige droes lijdende paarden. Ook tegenover de laatstgenoemde streptococcen kon in het gebruikte serum de aanwezigheid van een amboceptor ontwijfelbaar worden vastgesteld.

Aangezien nu de str. equi door zijne eigenschappen, wat o.a. blijkt uit zijn geheel afwijkenden groei op de gewone voedingsbodems, zeer duidelijke verschillen vertoont met de andere pathogene streptococcen, hetzij van mensch, hetzij van dier afkomstig, ligt de conclusie voor de hand, dat, ten minste in het door mij gebruikte antistreptococcenserum, van de specifieke werking van den amboceptor al heel weinig is overgebleven. Mogelijk zou echter de onderstelling nog zijn, dat alle, zoowel van mensch als dier afkomstige pathogene streptococcen zeer na verwant zijn, waardoor men ten minste nog aan de specificiteit van de amboceptoren zou kunnen blijven vasthouden.

Evenwel werd bij verdere proeven gevonden, dat het antistreptococcenserum ook werkzaam is tegenover micro-organismen, die in het geheel niet tot de streptococcen gerekend worden, n.l. pneumococcen en meningococcen.

Hiermede is dus voldoende bewezen, dat de specifieke werking van de amboceptoren in het serum van een paard, dat gedurende zeer geruimen tijd met groote hoeveelheden streptococcen is behandeld geworden, zeer sterk verminderd is en heeft plaats gemaakt voor een meer algemeene werking. Mogelijk zou men deze algemeene werking op rekening van een en denzelfden amboceptor kunnen stellen, hoewel men de aanwezigheid van meer amboceptoren in hetzelfde serum moelijk zal kunnen ontkennen.

Zelfs oefent genoemd serum nog — al is het dan ook in geringere mate — een duidelijke gevoeligmakende werking uit op miltvuur-, typhus- en tuberkelbacillen.

Uit het zooeven meegedeelde blijkt dus wel, dat de methode der komplementbinding van Bordet—Gengou niet te gebruiken is, als het er op aankomt na verwante, op andere wijze moeilijk te scheiden bacterien van elkaar te onderkennen. Al moet men nu wel aannemen, dat een dergelijke vermindering der specifieke werking alleen maar voorkomt bij sera van dieren, die zeer geruimen tijd behandeld zijn; dat dus de specifieke werking van den amboceptor meer op den voorgrond treedt, naarmate de dieren korteren tijd geïmmuniseerd zijn, toch is het duidelijk, dat van een scherpe methode hier geen sprake kan zijn, omdat men nooit weet — en dit geldt ook voor sera van kort geïmmuniseerde dieren, hoever zich de specificiteit wel uitstrekt. Zelfs indien men aanneemt, dat het paard, waarvan het antistreptococcenserum afkomstig is, al een bijzonder gunstig

proefdier is, wat betreft de vorming van immuunstoffen, dan nog zou het zooeven gezegde onveranderd doorgaan.

Onlangs heeft DOPTER[1]) gevonden, dat de amboceptor, aanwezig in het serum van een paard, dat gedurende 18 maanden met dysenteriebacillen (type SHIGA) was behandeld geworden, naast zijne werking op de echte dysenteriebacillen, ook een dergelijke werking vertoonde tegenover de z. g. pseudo- of paradysenteriebacillen (type FLEXNER, KRUSE). De specificiteit van den amboceptor op den voorgrond stellende, besluit hij hieruit tot „l'unité specifique" der dysenteriebacillen. Deze conclusie lijkt mij, met het oog op het boven vermelde, evenwel zeer gewaagd.

Tevens is het duidelijk, dat men aan de aanwezigheid van een amboceptor in een serum, niet al te veel gewicht mag hechten voor de werking van dat serum. Men mag toch niet aannemen, dat het antistreptococcenserum een gunstige werking zal uitoefenen bij lijders aan pneumonie, typhus, miltvuur enz., ofschoon er tegenover de respectievelijke verwekkers van die ziekten in vitro wel een zekere werking is waar te nemen. Opzettelijk heb ik dit voor miltvuurbacillen nagegaan. Verschillende caviae van ongeveer gelijk gewicht kregen deels een kleine hoeveelheid antistreptococcenserum (2—3 c. C.) waarin wat miltvuurbacillen (1 oogje van een verdunde, twaalf uur oude cultuur op bouillonagar) gebracht waren, deels normaal paardeserum (2—3 c.C.) met een gelijke dosis miltvuurbacillen. Van een gunstige werking van het antistreptococcenserum tegenover normaal serum was nooit iets te bespeuren. De dieren succombeerden altijd ongeveer gelijktijdig binnen 48 uur.

Wel meent PREDTETSCHENSKY[2]), die dergelijke proeven bij konijnen genomen heeft, een gunstige werking, zoowel van antidiphterisch als van antistreptococcenserum, te kunnen bespeuren, doch de kolossale hoeveelheden serum, welke hij gebruikte, rechtvaardigen het vermoeden, dat men hier slechts te doen heeft met de gunstige werking, die, zooals bekend is, ook reeds de inspuiting van normaal paardeserum in vele gevallen uitoefent.

Het is dus niet geoorloofd, zonder meer op grond van de aanwezigheid van een amboceptor een gunstige werking aan een serum toe te kennen, nog minder echter hierop een kwantitatieve methode te baseeren ter bepaling van de sterkte van zulk een serum, zooals KOLLE en WASSERMANN[3]) doen met betrekking tot een door hen bereid meningococcenserum. In het meningococcenserum van JOCHMANN

[1]) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 19, 1905, p. 753.

[2]) Centralblatt für Bakt, 1e Abth., Ref., Bd. 38, S. 395.

[3]) Deutsche Med. Wochenschrift, 1906, n° 16, S. 609.

(E. Merck) was de aanwezigheid van een amboceptor niet alleen tegenover meningococcen, maar ook — natuurlijk in geringere mate — tegenover enkele streptococcen duidelijk aan te toonen.

Op de vraag, of een dergelijke vermindering der specificiteit in verband met een langer voortgezette toediening van antigenen ook voor andere stoffen in immuunsera bekend is, moet het antwoord bevestigend luiden. Speciaal geldt dit met betrekking tot de praecipitinen. Bekend is, dat een absolute specificiteit hierbij niet te bereiken is. Zoo kon Nuttall [1]) zelfs met een zeer krachtig praecipitineserum, dat verkregen was met en tegenover een willekeurig zoogdiereiwit, een neerslag krijgen met het bloedserum van allerlei zoogdieren („mammalian reaction"). Hauser [2]) komt tot een dergelijk resultaat; er blijven nog slechts kwantitatieve verschillen bestaan.

Ook met betrekking tot den amboceptor schijnt mij een dergelijke vermindering der specifieke werking voldoende aangetoond.

Wiskunde. — De Heer Korteweg biedt eene mededeeling aan namens den Heer L. E. J. Brouwer: *„Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten."*

(Mede aangeboden door den Heer P. H. Schoute).

D [3]). *De sferische* R_2.

I. De stellingen onder C § I en II blijven voor de sferische en elliptische R_n's onveranderd geldig. Maar de eindigheid dezer ruimten brengt mee, dat we voor de volgende ontwikkelingen geen beperkende veldeigenschap behoeven te postuleeren. De sferische ruimten zullen we eerst nagaan.

Vooreerst merken we voor de algemeene lijnvectordistributie der sferische R_n op, dat de totale som der divergentie 0 is; immers de uitgaande vectorstroomen uit de verschillende ruimte-elementen vernietigen elkaar. Hieruit blijkt dus reeds, dat we als elementair-${}^1_0X$ slechts kunnen nemen het veld van een dubbelpunt.

Schering (Göttinger Nachrichten 1873) en Killing (Crelle's Journal

[1]) Blood immunity and blood relationship, Cambridge, 1904, p. 74, 135, 409.
[2]) Münch. Med. Wochenschrift, 1904, n° 7, S. 289.
[3]) A, B en C hebben betrekking op: „Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten." (Zie deze Verslagen, 30 Juni 1906).

1885) geven als elementairgradientenveld de afgeleide van de potentiaalfunctie $\int_r^{1/2\pi} \frac{dr}{sin^{n-1} r} \equiv v_n(r)$. [2])

Maar de afgeleide van dit veld bestaat uit twee gelijke en tegengestelde divergenties in twee tegenpunten; en het is duidelijk, dat een willekeurige integraal van zulke velden steeds in de tegenpunten gelijke en tegengestelde divergenties behoudt, dus niet de algemeene divergentiedistributie, die alleen gebonden is aan een totale divergentiesom $= 0$, kan geven.

II. Passen we bij een sferische R_n het theorema van GREEN toe over de geheele ruimte (d.w.z. over de beide helften, waarin zij door een willekeurige gesloten R_{n-1} verdeeld wordt, te zamen), en wel voor een scalarfunctie φ, die we onderstellen dat nergens divergentie heeft, en een scalarfunctie, die alleen in twee willekeurige punten P_1 en P_2 gelijke en tegengestelde divergenties heeft en verder nergens (zulke functies zullen we in het volgende afleiden), dan vinden we:

$$\varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = 0,$$

m. a. w. φ is een constante, daar de punten P_1 en P_2 willekeurig zijn gekozen.

Er is dus geen ${}^1_0X$ mogelijk, die nergens divergentie heeft, dus geen ${}^1X$, die nergens rotatie en nergens divergentie heeft, en hieruit volgt:

Een lijnvectordistributie in een sferische R_n is door haar rotatie en haar divergentie eenduidig bepaald.

III. De algemeene vectordistributie in een sferische R_n moet dus weer zijn te verkrijgen als willekeurige integraal van:

1°. velden E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. velden E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit in de punten van een ${}^{n-2}$bolletje en loodrecht op dat ${}^{n-2}$bolletje gelijkmatig gedistribueerde planivectoren.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn ook hier weer de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

IV. Voor de sferische R_2 bestaat nu een eenvoudig middel om

[2]) De ruimteconstante stellen we weer, evenals bij de hyperbolische ruimten $= 1$.

het veld E_1 te vinden, n.l. conforme afbeelding door stereographische projectie van een Euclidisch plat vlak met een dubbelpuntspotentiaal, welk dubbelpunt is gelegen in het raakpunt van den bol met het platte vlak. Voeren we op beide oppervlakken als coördinaten in den afstand tot het dubbelpunt en den hoek van den voerstraal met de dubbelpuntsas — op het platte vlak ϱ en φ, op den bol r en φ — dan hebben we:

$$\tfrac{1}{2}\varrho = tg\, \tfrac{1}{2} r$$

De potentiaal in het platte vlak: $\dfrac{cos\, \varphi}{\varrho}$ wordt dus op den bol:

$$\tfrac{1}{2} cos\, \varphi\; cot\, \tfrac{1}{2} r.$$

Deze potentiaal vertoont in het centrum van projectie op den bol niets bijzonders, is dus werkelijk de gezochte potentiaal van een enkel dubbelpunt, het veld E_1. (Plaatsen we in het tegenpunt van het dubbelpunt nog een dubbelpunt zóó, dat de ongelijknamige polen als tegenpunten correspondeeren, dan vinden we als potentiaal $\tfrac{1}{2} cos\, \varphi\, (cot\, \tfrac{1}{2} r + tg\, \tfrac{1}{2} r) = \dfrac{cos\, \varphi}{sin\, r}$, wat de Scheringsche potentiaal van een dubbelpunt is).

V. Ook hier kunnen we intusschen het veld van een dubbelpunt wel weer splitsen in twee fictieve „velden van een enkel agenspunt"; we hebben daarvoor maar te nemen $\displaystyle\int_r^\pi \tfrac{1}{2} cot\, \tfrac{1}{2} r\, dr = -\, l\, sin\, \tfrac{1}{2} r \equiv F(r)$; zoodat dan voor een willekeurige gradientendistributie geldt:

$$\overset{1}{_0}X = \overline{\nabla}^{1} \int \frac{\overline{\nabla}^{2}\, \overset{1}{_0}X}{2\pi} F(r)\, d\tau \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Het „veld van een enkel agenspunt" heeft echter overal op den bol divergentie.

VI. Uit het veld E_1 leiden we op analoge wijze, als onder B § VI af het veld E_2 van een rotatiedubbelpunt, loodrecht op het agensdubbelpunt van het veld E_1. Als scalarwaarde van de planivectorpotentiaal vinden we daar:

$$\tfrac{1}{2} sin\, \varphi\; cot\, \tfrac{1}{2} r,$$

zooals we moesten verwachten, volledig duaal met de scalarpotentiaal van het veld E_1.

Als fictief krachtveld van een eenheidsrotatie-element leiden we hieruit af (op de wijze van B § VI):

$\frac{1}{2}\,cot\,\frac{1}{2}\,r$,

gericht loodrecht op den voerstraal. Dit krachtveld heeft overigens weer overal in de R_2 rotatie.

VII. Hieruit vinden we dan weer (vgl. onder B § VII) voor de scalarwaarde der planivectorpotentiaal van een rotatieëlement:

$$\int_r^\pi \tfrac{1}{2}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,r\,dr \equiv F(r),$$

zoodat voor een willekeurige ${}^1_2X$:

$${}^1_2X = \sqrt[2]{\int \frac{\sqrt[1]{{}^1_2X}}{2\pi} F(r)\,d\tau}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En een willekeurig vectorveld is de ∇ van een potentiaal:

$$\int \frac{\nabla X}{2\pi} F(r)\,d\tau.$$

E. De sferische R_3.

I. Het doel is vooreerst, het veld E_1 te vinden; we zullen het samenstellen uit eenige bijzondere licht te construeeren potentiaalfuncties met eenvoudige divergentiedistributies.

Denken we een grooten bol B met polen P_1 en P_2, en in B een grooten cirkel C met polen Q_1 en Q_2, die op B meridiaancirkels M bepalen, C snijdend in punten H.

We kunnen dan vooreerst uit de bijzondere Scheringsche potentiaal construeeren de potentiaal van twee dubbelpunten, in P_1 en P_2, waarvan de positieve polen beide naar Q_1 zijn gericht (zoodat in tegenpunten ongelijknamige polen correspondeeren). Bepalen we een punt S van de hypersfeer door den afstand $PS = r$ en $\angle\, QPS = \varphi$ (waar voor P en Q de index 1 of 2 moet worden genomen, naarmate S met P_1 of met P_2 aan denzelfden kant van B ligt), dan wordt deze potentiaal (α):

$$\pm \frac{cos\,\varphi}{sin^2\,r},$$

waar het $+$ ($-$) teeken moet worden genomen voor de halve hypersferen tusschen P_1 (P_2) en B.

Dit veld heeft geen andere divergentie, dan die van de dubbelpunten P_1 en P_2.

Keeren we nu het teeken van de potentiaal om in de halve hypersfeer aan den kant van P_2, dan komt de potentiaal (β):

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2 r}.$$

De divergentie hiervan bestaat vooreerst uit twee dubbelpunten, één in P_1 gericht naar Q_1 en één in P_2 gericht naar Q_2 (zoodat dus nu in twee tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren); en verder uit een magnetische schaal (immers een potentiaalsprong) in den bol B, van sterkte varieerend volgens $\cos\varphi$.

II. Hiernaast gaan we zoeken een potentiaal, waarvan de divergentie bestaat uit alleen zulk een magnetische schaal in den bol B met een sterkte, evenredig aan $\cos\varphi$.

Nu is een veld van een magnetische schaal in B met een sterkte, die volgens een andere zonale bolfunctie varieert, eenvoudig te vinden. Nemen we n.l. in elken „meridiaanbol" PQH als potentiaal van een punt S den hoek $PHS = \frac{1}{2}\pi - \angle QHS$ (P en Q steeds op de boven aangegeven wijze naar de plaats van S van indices te voorzien) $= bg\,tg\{\cos\varphi\,tg\,r\}$, dan hebben we zulk een potentiaal; in de hypersfeer is zij een zonale bolfunctie om PQ als as; op den bol B heeft zij haar eenige divergentie in den vorm van een magnetische schaal, waarvan de sterkte wisselt volgens een zonale bolfunctie met pool Q.

Nemen we nu beurtelings alle punten van den bol B als pool Q' van zulk een potentiaalfunctie, en integreeren we al die potentialen over den lichaamshoek om P, elke potentiaal vermenigvuldigd met $\cos Q'Q$, dan is volgens een welbekende stelling over bolfuncties de integraal een zonale functie van den vorm $\cos\varphi\,f(r)$, waarin $f(r) = \int \cos\varphi\,.\,bg\,tg\{\cos\varphi\,tg\,r\}\,d\omega$. ($d\omega$ stelt voor het element van den lichaamshoek om P), terwijl dit integraalveld als eenige divergentie heeft een magnetische schaal in B met sterkte evenredig aan $\cos\varphi$.

De integratie uitvoerende, vinden we:

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi\cos\varphi\,bg\,tg\{\cos\varphi\,tg\,r\}\,d\varphi.$$

$$f(r) = 2\pi\left\{-\cot r + \frac{r}{\sin^2 r}\right\},$$

en voor de bijbehoorende potentiaalfunctie (γ) komt:

$$2\pi\cos\varphi\left\{-\cot r + \frac{r}{\sin^2 r}\right\}.$$

III. Nemen we het verschil van het veld (β) met $\frac{1}{2}$, en het veld (γ) met $\frac{1}{2\pi^2}$ vermenigvuldigd, dan valt de magnetische schaal in B weg, en we houden het veld (δ):

$$\frac{\cos\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\},$$

welk veld als eenige divergentie heeft twee dubbelpunten in P_1 en P_2, waarvan in de tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren.

De som van dit veld (δ), en het veld (α) met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd, moet nu geven een veld, dat als divergentie heeft een enkel dubbelpunt met eenheidsmoment in P_1, m. a. w. het gezochte veld E_1.

We vinden daarvoor dus op de halve hypersfeer van P_1:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{\pi-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\}$$

en op de halve hypersfeer van P_2:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\},$$

of, als we nu op beide helften de coördinaten r en φ definieeren van uit P_1 en $P_1 Q_1$, komt de volgende uitdrukking, geldig voor beide helften:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{\pi-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\}\equiv\psi(r)\cos\varphi.$$

IV. Om dit veld E_1 te splitsen in twee fictieve „velden van een enkel agenspunt" (die echter over de geheele hypersfeer divergentie hebben), nemen we voor de laatste maar $\int_r^\pi \psi(r)\,dr \equiv F_1(r)$.

Dan geldt voor een willekeurige gradiëntendistributie:

$${}^1_0X = \sqrt[1]{\int \frac{\sqrt[2]{{}^1_0X}}{4\pi} F_1(r)\,d\tau}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

V. Het veld E_2 van een kringstroompje volgens het aequatorvlak in den oorsprong, is buiten den oorsprong met bovenstaand veld E_1 identiek; maar nu is elke krachtlijn een gesloten vectordraad met een lijnintegraal van 4π langs zichzelf.

Volgens de methode van A § IX zoeken we van dit veld E_2 de planivectorpotentiaal H in het meridiaanvlak en onafhankelijk van het azimuth.

We vinden, als we $\pi - r = \beta$ schrijven :

$$\Sigma = \frac{1}{\pi} \sin^2\varphi \,(1 + \beta \cot r)\, d\vartheta.$$

$$H = \frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r},$$

verdwijnt dus langs alle groote cirkels in het tegenpunt.

Waaruit we weer afleiden voor de kracht van een stroomelement met eenheidssterkte in den oorsprong, gericht volgens de as van het sferisch coördinatenstelsel :

$$\frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r},$$

gericht loodrecht op het meridiaanvlak.

VI. Hieruit leiden we op de wijze van A § XI af een vectorpotentiaal V van een stroomelement, evenwijdig aan dat stroomelement, en een functie van r alleen. Voor de scalarwaarde U van die vectorpotentiaal hebben we de differentiaalvergelijking:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left\{U \sin\varphi \sin r\, d\varphi\right\} dr - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{U \cos\varphi\, dr\right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r} \,.\, dr \,.\, \sin r\, d\varphi.$$

Of:

$$U - \frac{\partial}{\partial r}\left\{U \sin r\right\} = \frac{1}{\pi}(1 + \beta \cot r),$$

waarvan de oplossing is:

$$U = \frac{c}{\cos^2 \frac{1}{2} r} + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} r} - \frac{\beta}{\sin r}\right\}.$$

We kiezen $c = 0$, en vinden dus als vectorpotentiaal V van een eenheidsstroomelement:

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} r} - \frac{\beta}{\sin r}\right\} = F_2(r),$$

gericht evenwijdig aan het stroomelement. De functie $F_2(r)$ verdwijnt in het tegenpunt.

Voor een willekeurige flux geldt nu:

$${}^1_2X = \overline{\nabla^2} \int \frac{\overline{\nabla^1}\, {}^1_2X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En het willekeurige vectorveld X ten slotte is de ∇ van de potentiaal:

$$\int \frac{\overline{\sqrt{^2}}X}{4\pi} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overline{\sqrt{^1}}X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau.$$

F. *De sferische* R_n.

I. Om het veld $E_{\bar{1}}$ te vinden, gaan we analoog te werk, als voor de sferische R_3. De groote bol B wordt hier een $^{n-1}$bol B; de groote cirkel C der punten H een groote $^{n-2}$bol C der punten H.

Voor de potentiaal (α) wordt gevonden:

$$\pm \frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r};$$

voor de potentiaal (β):

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r};$$

dit veld (β) heeft in den bol B een magnetische $^{n-1}$schaal.

De potentiaal (γ) wordt geïntegreerd uit velden $bg\, tg \{\cos\varphi\, tg\, r\}$ volgens $\cos\varphi$, de eerste zonale $^{n-1}$bolfunctie op B. Deze integratie geeft, als dw het element van den n-dimensionalen lichaamshoek om P voorstelt:

$$\cos\varphi\, f(r),$$

waarin:

$$f(r) = \int \cos\varphi\, bg\, tg \left\{\cos\varphi\, tg\, r\right\} dw = k_{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi \cos\varphi\, bg\, tg \left\{\cos\varphi\, tg\, r\right\} d\varphi =$$

$$= \frac{k_{n-1}}{n-1} \int_0^\pi \sin^n\varphi \frac{tg\, r\, d\varphi}{1 + tg^2 r \cos^2\varphi}$$

(k_n gedefinieerd als onder C § III).

Hierin nu onder 't integraalteeken een factor $\sin^2\varphi\, tg^2 r$ buiten haakjes brengend, en, door dien factor te schrijven als $\frac{1}{\cos^2 r} - (1 + \cos^2\varphi\, tg^2 r)$, de integraal schrijvend als som van twee integralen, op de eerste waarvan dezelfde verdeeling in tweeën wordt toegepast, enzoovoort, vinden we, als we $\int_0^\pi \sin^h r\, dr = S_h$ schrijven:

$$\frac{(n-1) f(r)}{k_{n-1}} \sin^{n-1} r = -\sin^{n-2} r \cos r\, S_{n-2} - \sin^{n-4} r \cos r\, S_{n-4} \ldots .$$

$$\ldots . - \sin^2 r \cos r\, S_2 + \pi (1 - \cos r)$$

(voor n even)

$$= - \sin^{n-2} r \cos r \, S_{n-2} - \sin^{n-4} r \cos r \, S_{n-4} \ldots .$$
$$\ldots . - \sin r \cos r \, S_1 + 2 r$$

(voor n oneven)

$$= \pi \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots.}{(n-2)(n-4)\ldots.} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr = (n-1) \, S_{n-2} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

(voor n even)

$$= 2 \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots.}{(n-2)(n-4)\ldots.} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr = (n-1) \, S_{n-2} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

(voor n oneven)

Schrijven we ξ_n voor $2 . \pi . 2 . \pi : 2 \ldots .$, tot n factoren toe, dan hebben we:

$$k_n = \frac{\xi_n}{(n-2)(n-4)\ldots.}, \quad \text{en} \quad \frac{k_{n+1}}{k_n} = S_{n-1}.$$

Derhalve:

$$f(r) \sin^{n-1} r = k_n \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr,$$

en de potentiaal (γ) wordt:

$$k_n \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

II. Het veld (δ) vinden we als het verschil van het veld (β) met $\frac{1}{2}$, en het veld (γ) met $\frac{1}{k_n S_{n-1}} = \frac{1}{k_{n+1}}$ vermenigvuldigd, als:

$$\cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \frac{\frac{1}{2} S_{n-1} - \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr}{S_{n-1}} = \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \frac{\int_r^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} r \, dr}{S_{n-1}};$$

dit veld heeft weer als eenige divergentie twee dubbelpunten in P_1 en P_2, waarvan in de tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren. Het veld E_1 komt, door hierbij op te tellen het veld (α), met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. We vinden:

Op de halve sferische R_n om P_1:

$$\frac{1}{S_{n-1}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \int_r^{\pi} \sin^{n-1} r \, dr.$$

Op de halve sferische R_n om P_2:

$$-\frac{1}{S_{n-1}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

Of, als we op beide helften de coördinaten r en φ definieeren van uit P_1 en $P_1 Q_1$, komt de voor beide helften geldige uitdrukking:

$$\frac{1}{S_{n-1}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \int_r^\pi \sin^{n-1} r \, dr \equiv \psi_n (r .) \cos\varphi.$$

III. Voor de potentiaal van het fictieve „veld van een enkel agenspunt" komt:

$$\int_r^\pi \psi_n (r) \, dr \equiv F_1 (r).$$

En voor de willekeurige gradientendistributie geldt:

$$^1_0X = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/} \, ^1_0X}{k_n} F_1 (r) \, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Van de divergentiedistributie van $F_1 (r)$ in punten van algemeene ligging weten we, dat ze, genomen voor twee geheel willekeurige centra (fictieve agenspunten) met tegengesteld teeken, en dan uit beide gesommeerd, 0 oplevert; die distributie is dus aan den eenen kant onafhankelijk van de ligging van het centrum, en aan den anderen kant ligt ze geometrisch aequivalent ten opzichte van alle punten; ze is dus een constante. Maar heeft de functie $F_1 (r)$ in punten van algemeene ligging constante divergentie, dan voldoet ze aan een differentiaalvergelijking, die de divergentie constant stelt. Hierin ligt dus een tweede middel om de functie F_1, en daaruit het veld E_1 te bepalen.

De differentiaalvergelijking wordt:

$$\frac{d}{dr}\left\{\sin^{n-1} r \cdot \frac{dF_1}{dr}\right\} = c \sin^{n-1} r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

$$\sin^{n-1} r \cdot \frac{dF_1}{dr} = c \int \sin^{n-1} r \, dr.$$

$$\frac{dF_1}{dr} = c \cdot \frac{\int \sin^{n-1} r \, dr}{\sin^{n-1} r}.$$

Zal uit de functie $F_1 (r)$ het veld E_1 zijn samen te stellen, dan mag het tegenpunt van het centrum geen eindigen uitgaanden vectorstroom hebben; we stellen dus daarvoor $\int \sin^{n-1} r \, dr = 0$, zoodat we

krijgen :

$$\frac{dF_1}{dr} = -\frac{c}{\sin^{n-1} r} \int_r^{\pi} \sin^{n-1} r \, dr,$$

hetgeen met de boven gevonden uitkomst overeenstemt.

IV. Het veld E_2 van een wervel-$^{n-2}$bolletje volgens de R_{n-1}, loodrecht op de as van het zooeven beschouwd dubbelpunt, is buiten den oorsprong met dat veld E_1 identiek; elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met lijnintegraal k_n langs zichzelf.

Volgens de methode van C § VII zoeken we van dit veld E_2 de planivectorpotentiaal H, die ligt in het meridiaanvlak, en alleen afhangt van r en φ; en die dus is een ${}^2_1X$. We vinden:

$$dh = c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi.$$

Kracht in r-richting:

$$(n-1)\cos\varphi \left\{ \frac{1}{(n-1)\,S_{n-1}} + \frac{\cot r}{S_{n-1}} \cdot \frac{\int_r^{\pi} \sin^{n-1} r \, dr}{\sin^{n-1} r} \right\} \equiv (n-1)\cos\varphi \,.\, \omega_n(r.)$$

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} (n-1)\cos\varphi\, \omega_n(r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi \,.\, \sin r \, d\varphi =$$

$$= \omega_n r \,.\, c\varepsilon \sin^{n-1} r \sin^{n-1}\varphi.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \omega_n(r) \sin r \sin\varphi \equiv \chi_n(r) \sin\varphi.$$

Hieruit volgt dan weer voor de kracht van een vlak wervelelement met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\chi_n(r) \sin\varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerende wervelelement, en zich op diens vlak projecteerend volgens de raaklijn aan een concentrischen cirkel; terwijl φ is de hoek van den voerstraal met de R_{n-2} loodrecht op het wervelelement.

V. Op de wijze van C § IX leiden we hieruit af de planivectorpotentiaal V van een wervelelement, die overal evenwijdig aan het wervelelement gericht is, en waarvan de scalarwaarde een functie van r alleen is. Die scalarwaarde U van die vectorpotentiaal is hier bepaald door de differentiaalvergelijking:

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{U\cos\varphi\,.\,dr\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi\right\}d\varphi\,-$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left\{U\sin\varphi\,.\,\sin r\,d\varphi\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi\right\}dr=$$

$$=\chi_n(r)\sin\varphi\,.\,\sin r\,d\varphi\,.\,dr\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi.$$

$$(n-2)\,U-\frac{dU}{dr}\sin r-(n-2)\,U\cos r=\chi_n(r)\sin r.$$

$$\frac{dU}{dr}-(n-2)\,U\,tg\,\tfrac{1}{2}r=-\chi_n(r).$$

$$U=\frac{1}{\cos^{2(n-2)\frac{1}{2}}r}\;.\;\int_r^{\pi}\cos^{2(n-2)\frac{1}{2}}r\;.\;\chi_n(r)\,dr,$$

een in het tegenpunt verdwijnende functie, die we $\equiv F_2(r)$ stellen.

We hebben dan voor een willekeurige flux:

$$\tfrac{1}{2}X=\overline{\backslash 2/}\int\frac{\overline{\backslash 1/}\,\tfrac{1}{2}X}{k_n}F_2(r)\,d\tau\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(II)$$

En een willekeurig vectorveld beschouwende als veroorzaakt, doordat zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels) zich voortplanten door de ruimte tot een potentiaal, volgens een in het tegenpunt verdwijnende functie van den afstand, hebben we:

$$X=\nabla\left\{\int\frac{\overline{\backslash 2/}X}{k_n}F_1(r)\,d\tau+\int\frac{\overline{\backslash 1/}X}{k_n}F_2(r)\,d\tau\right\}.$$

G. *De Elliptische R_n.*

I. Ook voor de elliptische R_n is de afgeleide eener willekeurige lijnvectordistributie een integraal van elementair-wervelstelsels W_y en W_z, die resp. de eerste en tweede afgeleide zijn van een geïsoleerden lijnvector. Voor elementair-$\tfrac{1}{0}X$ zal dus moeten komen het veld van een divergentiedubbelpunt.

De Schering'sche elementairpotentiaal $\int_r^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dr}{\sin^{n-1}r}\equiv v_n(r)$ is hier een meerwaardige functie (vgl. Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie), moet dus als zinloos worden beschouwd.

II. De eenzijdige elliptische R_n wordt door een vlakke R_{n-1}, tweemaal beschouwd met tegengestelde normaalrichting, als een tweezijdig enkelvoudig samenhangend R_n-segment door een tweezijdig

gesloten R_{n-1} omsloten. Passen we op de zoo omsloten R_n het theorema van GREEN toe voor een scalarfunctie φ, die nergens divergentie heeft, en een, die in twee willekeurige punten P_1 en P_2 gelijke en tegengestelde divergenties heeft en verder nergens (zulk een functie zal in het volgende blijken te bestaan), dan vinden we:

$$\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1} = 0,$$

m. a. w. φ is een constante, daar de punten P_1 en P_2 willekeurig zijn gekozen.

Er is dus weer geen ${}^1_0X$ mogelijk, die nergens divergentie heeft, dus geen ${}^1X$, die nergens rotatie en nergens divergentie heeft, en hieruit volgt:

Een lijnvectordistributie in een elliptische R_n is door haar rotatie en haar divergentie eenduidig bepaald.

III. We gaan dus na:

1e. het veld E_1, met als tweede afgeleide twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2e. het veld E_2, met als eerste afgeleide gelijkmatig gedistribueerde planivectoren in de punten van een $^{n-2}$bolletje, loodrecht op dat $^{n-2}$bolletje.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

IV. Om de potentiaal van het veld E_1 te vinden, gaan we het een-tweeduidig afbeelden op de sferische R_n; de afbeelding zal dan als divergentie hebben twee dubbelpunten in tegenpunten, waar gelijknamige polen als tegenpunten correspondeeren; het zal dus zijn het met 2 vermenigvuldigde veld (σ), afgeleid onder F § II:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \frac{\int_r^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} r \, dr}{\frac{1}{2} S_{n-1}} \equiv \lambda_n(r) \cos\varphi.$$

In het veld, dat in de elliptische ruimte hiermee correspondeert, gaan alle krachtlijnen van de positieve naar de negatieve pool van het dubbelpunt; een gedeelte snijdt de pool-R_{n-1} van den oorsprong: deze krachtlijnen zijn in het meridiaanvlak unilateraal; de overige snijden haar niet: deze zijn in het meridiaanvlak bilateraal.

De beide grenskrachtlijnen, die samen een dubbelpunt vormen in de pool-R_{n-1}, hebben de vergelijking:

$$sin^{n-1}\varphi \left\{ sin^{n-1} r + (n-1)\, cot\, r \int_r^{1/2\pi} sin^{n-1} r\, dr \right\} = \pm 1.$$

De R_{n-1} van nulpotentiaal bestaat uit de pool-R_{n-1} en de aequator-R_{n-1} van het dubbelpunt; haar snijlijn met het meridiaanvlak heeft een dubbelpunt in het krachtlijnendubbelpunt. Alle potentiaalkrommen in het meridiaanvlak zijn bilateraal.

V. Voor het fictieve „veld van een enkel agenspunt" komt de potentiaal $\int \lambda_n (r)\, dr$. Rationeel is, te zorgen dat zij 0 wordt in de pool-R_{n-1}; we krijgen dan:

$$\int_r^{1/2\pi} \lambda_n (r)\, dr \equiv F_1 (r),$$

en voor de willekeurige gradientendistributie geldt:

$${}_0^1X = \overline{\backslash 1/} \int \frac{\overline{\backslash 2/}\ {}_0^1X}{k_n} F_1 (r)\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$F_1 (r)$ was ook te vinden geweest uit de differentiaalvergelijking (H) van F § III, waaraan ze op dezelfde gronden als daar zijn aangevoerd, moet voldoen. Ook voor de elliptische R_n is:

$$\frac{dF_1}{dr} = c \cdot \frac{\int sin^{n-1} r\, dr}{sin^{n-1} r}.$$

Maar hier moet in de pool-R_{n-1}, die symmetrisch ligt ten opzichte van het centrum van het veld, de kracht, dus $\int sin^{n-1} r\, dr = 0$ zijn, zoodat we krijgen:

$$\frac{dF_1}{dr} = -\frac{c}{sin^{n-1} r} \int_r^{1/2\pi} sin^{n-1} r\, dr.$$

VI. Op de gewone wijze leiden we verder af de ${}_2^1X$, die planivectorpotentiaal is van het veld E_2.

$$dh = c\varepsilon\, sin^{n-2} r\, sin^{n-2} \varphi.$$

Kracht in r-richting:

$$(n-1)\, cos\, \varphi \left\{ \frac{2}{(n-1) S_{n-1}} + \frac{2\, cot\, r}{S_{n-1}} \cdot \frac{\int_r^{1/2\pi} sin^{n-1} r\, dr}{sin^{n-1} r} \right\} \equiv (n-1)\, cos\, \varphi \cdot \mu_n (r).$$

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} (n-1) \cos\varphi \,.\, \mu_n(r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi \,.\, \sin r \, d\varphi =$$

$$= \mu_n(r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-1} r \sin^{n-1}\varphi.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \mu_n(r) \sin r \sin\varphi \equiv \varkappa_n(r) \sin\varphi.$$

Waarnit volgt voor de kracht van een vlak wervelelement met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\varkappa_n(r) \sin\varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerend wervelelement, en zich op diens vlak projecteerend volgens de raaklijn aan een concentrischen cirkel; φ is hier de hoek van den voerstraal met de R_{n-2} loodrecht op het wervelelement.

VII. Ook hier kan weer een planivectorpotentiaal van een wervelelement worden afgeleid, maar we kunnen niet spreken van een evenwijdig voortgeplantte stelling van het wervelelement, daar in de elliptische ruimte die stelling niet meer eenduidig bepaald is: na een omloop langs een rechte lijn is zij overgevoerd in den spiegelstand ten opzichte van het normaalvlak op de rechte lijn.

Maar we kunnen een eenduidig bepaalde vectorpotentiaal krijgen, door te nemen die van twee antipodische wervelelementen in de sferische R_n^3 (in hun 2bol zijn de beide indicatrices dan tegengesteld gericht).

De vectorpotentiaal in een punt der elliptische R_n ligt dan in de ruimte door dat punt en het wervelelement; nemen we het vlak van het element als aequatorvlak in die ruimte, dan staat de planivectorpotentiaal V loodrecht op dat meridiaanvlak; zij bestaat uit:

1°. een ontbondene U_1 loodrecht op den voerstraal, volgens de formule:

$$\frac{U_1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^{2(n-2)}\frac{1}{2} r} \int_r^{\pi} \cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2} r \, \chi_n(r) \, dr +$$

$$+ \frac{1}{\sin^{2(n-2)}\frac{1}{2} r} \int_{\pi-r}^{\pi} \cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2} r \,.\, \chi_n(r) \, dr.$$

2°. een ontbondene U_2 door den voerstraal, volgens de formule:

$$\frac{U_2}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos^{2(n-2)}\frac{1}{2}r}\int_r^{\pi}\cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r\,\chi_n(r)\,dr -$$

$$-\frac{1}{\sin^{2(n-2)}\frac{1}{2}r}\int_{\pi-r}^{\pi}\cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r\,.\,\chi_n(r)\,dr\,.$$

Stellen we deze planivectorpotentiaal als functie van het wervelelement en de coördinaten ten opzichte van het wervelelement voor door G_2, dan geldt dus voor een willekeurige flux in de elliptische R_n:

$${}^1_2X = \overline{\backslash^2/}\int\frac{G_2\left\{\overline{\backslash^1/}\,{}^1_2X,\,r,\,\varphi\right\}}{k_n}\,d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En een willekeurig vectorveld beschouwende als veroorzaakt, doordat zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels) zich voortplanten door de ruimte tot een potentiaal, schrijven we:

$$X = \nabla\int\frac{\overline{\backslash^2/}\,X\,.\,F_1(r) + G_2(\overline{\backslash^1/}\,X,\,r,\,\varphi)}{k_n}\,d\tau.$$

VIII. In het bijzonder voor de elliptische R_3 zijn de uitkomsten:
Potentiaal van een agensdubbelpunt:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2 r}\cdot\frac{\int_r^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 r\,dr}{\frac{1}{2}S_2} = \frac{2\cos\varphi}{\pi}\cdot\left\{\frac{(\frac{1}{2}\pi - r)}{\sin^2 r} + \cot r\right\},$$

of als we $\frac{1}{2}\pi - r = \gamma$ stellen:

$$\frac{2\cos\varphi}{\pi}\cdot\left\{\frac{\gamma}{\sin^2 r} + \cot r\right\}.$$

Vergelijking der grenskrachtlijnen:

$$\sin^2\varphi\,(1 + \gamma\cot r) = \pm 1.$$

Potentiaal van een enkel agenspunt:

$$\frac{2}{\pi}\,.\,\gamma\,.\,\cot r.$$

Vectorpotentiaal van een elementairkringstroom:

$$\frac{2}{\pi}\sin\varphi\,.\,\frac{1 + \gamma\cot r}{\sin r}.$$

Dus ook kracht van een stroomelement:

$$\frac{2}{\pi}\sin\varphi\,.\,\frac{1 + \gamma\cot r}{\sin r}.$$

Lijnvectorpotentiaal van een stroomelement:

volgens de voerstraal: $\frac{\cos\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}r}-\frac{\pi}{\sin r}+\frac{\frac{1}{4}r^2}{\sin^2\frac{1}{2}r}\right\}$.

loodrecht op de voerstraal: $\frac{\sin\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}r}+\frac{2r-\pi}{\sin r}-\frac{\frac{1}{4}r^2}{\sin^2\frac{1}{2}r}\right\}$.

IX. Voor het elliptische platte vlak krijgen we:
Potentiaal van een agensdubbelpunt:

$$\cos\varphi\cot r.$$

Vergelijking der grenskrachtlijnen:

$$\sin\varphi=\pm\sin r,\quad\text{of}\quad\varphi=\begin{cases}r\\ \pi-r\end{cases}.$$

Potentiaal van een enkel agenspunt:

$$-l\sin r.$$

Scalarwaarde der planivectorpotentiaal van een dubbelpunt van rotatie:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin r}.$$

Dus ook kracht van een rotatie-element:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin r}.$$

Planivectorpotentiaal van een rotatie-element:

$$l\cot\tfrac{1}{2}r.$$

We merken op, dat de dualiteit van beide potentialen en beide afgeleiden, die bij de sferische R_2 bestond, hier weer is verloren gegaan in de uitkomsten. De grond daarvan is, dat bij afbeelding op den bol een divergentie in het elliptisch plat vlak wordt twee gelijke divergenties in tegenpunten met gelijk teeken; een rotatie twee gelijke rotaties in tegenpunten met verschillend teeken; bij de laatste komt dus niet de analoge potentiaal, als bij de eerste; de laatste kan hier worden gevonden volgens de Scheringsche potentiaalformule.

Hiermee hangt direct samen, dat in het elliptische platte vlak het veld van een enkele rotatie (in tegenstelling met dat van een enkele divergentie) als zoodanig bestaansmogelijkheid heeft, dus als eenheid van veld kan worden genomen. Dat veld bestaat uit krachten rakend aan concentrische cirkels en groot $\frac{1}{\sin r}$.

NASCHRIFT. In de formule voor vectorvelden in hyperbolische ruimten:

$$Pot.\ X = \int \frac{\overline{\backslash^{2}/}\ X}{k_n} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overline{\backslash^{1}/}\ X}{k_n} F_2(r)\, d\tau$$

volgt uit de afleiding voorloopig niet anders, dan dat onder $\overline{\backslash^{2}/}\ X$ en $\overline{\backslash^{1}/}\ X$ ook de bijdragen, die het oneindige er toe levert, moeten worden meegeteld. Uit de veldeigenschap volgt echter direct, dat de werking dier bijdragen in 't eindige wegvalt, zoodat we onder het integraalteeken alleen de $\overline{\backslash^{2}/}\ X$ en $\overline{\backslash^{1}/}\ X$ in 't eindige behoeven te lezen.

Immers de $\overline{\backslash^{1}/}$ in 't oneindige per oppervlakte-eenheid van den oneindig grooten bol is $<$ orde e^{-r}; het potentiaal-effect hiervan in 't eindige wordt $<$ orde $re^{-(n-2)r} \times e^{-r} = re^{-(n-1)r}$; het krachteffect dus $<$ orde $e^{-(n-1)r}$; het krachteffect van het geheele oneindig groote boloppervlak dus oneindig klein.

En de $\overline{\backslash^{2}/}$ in 't oneindige per oppervlakte-eenheid is $<$ orde $\frac{1}{r}$; zij geeft een potentiaal-effect in 't eindige $<$ orde $e^{-(n-1)r} . \frac{1}{r}$, dus een krachteffect $<$ orde $e^{-(n-1)r} . \frac{1}{r^2}$; het totale krachteffect, veroorzaakt door het oneindige, blijft dus $<$ orde $\frac{1}{r^2}$.

De redeneering gaat niet door voor het krachtveld der hyperbolische R_2 in de tweede opvatting (zie onder B § VIII), maar daar ligt in den aard dier opvatting zelf, dat de afgeleiden in 't oneindige uitdrukkelijk worden opgegeven, dus ook worden meegeteld.

Natuurkunde. — De Secretaris biedt aan Mededeeling N°. 95^e uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer*".

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Voor de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatie van den Heer G. H. LEOPOLD: „*Driephasenlijnen met minimum druk bij chloralaethylalcoholaat en zoutzuuraniline*".

De vergadering wordt gesloten.

(11 October, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 27 October 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 312.

Verslag van de Commissie over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum, p. 313.

J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge verduisteringen der wachters van Jupiter", p. 316.

W. H. JULIUS: „Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied", p. 317. (Met twee platen).

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Het gedrag der halogenen tegenover elkander", p. 334.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „Over het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering der Internationale Graadmetingscommissie", p. 335.

A. J. P. VAN DEN BROEK: „Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren". (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 335.

W. A. VERSLUYS: „Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 342.

F. M. JAEGER: „Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt". (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 345.

H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer", (Naschrift), p. 348.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer", p. 349. (Met één plaat).

Aanbieding eener verhandeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume" 2te Abhandlung, p. 360.

Aanbieding door den Heer J. M. VAN BEMMELEN eener verhandeling van den Heer H. G. JONKER: „Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland" (1734—1906), p. 360.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 360.

Errata, p. 361.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding hiervan deelt de Secretaris mede dat de Heer JULIUS benoemd is in de Commissie voor de ventilatie van de bovenzalen van het Rijksmuseum, daar de Heer KAMERLINGH ONNES heeft medegedeeld zijne benoeming niet te kunnen aanvaarden.

Ingekomen zijn :

1°. Missive van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 12 October 1906 waarbij bericht wordt dat aan den Heer PH. VAN HARREVELD JR., Docts. in de plant- en dierkunde te Groningen ook een rijkstoelage verleend is om met de inkomsten uit het Buitenzorg-fonds te dienen voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg; benevens bericht van den Heer VAN HARREVELD, dat hij in Maart 1907 naar Indië hoopt te vertrekken. Mededeeling hiervan is aan den Minister toegezonden.

2°. Bericht over de vergadering van het comité der Internationale Associatie der Akademiën gehouden te Weenen 30 Mei en 1 Juni 1906; benevens een circulaire van de Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn betreffende één der op die vergadering besproken punten: „De samenwerking tusschen de Internationale Associatie en de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der zon."

De Voorzitter stelt voor dit punt in de volgende vergadering nader ter sprake te brengen. Aldus wordt besloten.

3°. Circulaire van den Nederlandschen Bond van Horlogemakers over „Eenheid van schroefdraad" en ter begeleiding van een „Note sur un projet tendant à l'unification des petites vis d'un diamètre inférieur à six millimètres. Unification des filetages par E. ZARTIAUX et CH. ZETTER", met verzoek opmerkingen of overwegingen over dat onderwerp te doen toekomen aan genoemden bond. Ter kennisneming van de leden beschikbaar gesteld.

4°. Missive van de Geologische Commissie, d.d. 10 October 1906. Naar aanleiding daarvan brengt de Secretaris in herinnering, dat volgens den wensch der Geologische Commissie, uitgesproken in haar schrijven van 13 Maart 1906 de Afdeeling tot Z.Exc. den Minister van Waterstaat het verzoek heeft gericht de omschrijving van het doel harer jaarlijksche toelage van *f* 1000 thans luidende: tot het houden van aanteekeningen van geologischen aard bij grondboringen en doorsnijdingen van den bodem van Nederland, te willen veranderen in: voor alles, wat dienen kan voor het geologisch onderzoek in Nederland en de kennis van onzen bodem kan vermeerderen. Bij haar schrijven van 25 April 1906 lichtte de Commissie haar meening nader toe door als voorbeeld o.a. aan te geven: de herkomst te bepalen van het diluviale materiaal door het verzamelen van monsters voor vergelijking in de landen, waarvan de gesteenten worden ondersteld afkomstig te zijn. Bij schrijven van 28 Juni 1906 deelde Z.Exc. aan de Akademie mede, dat geen termen bestonden het verzoek toe te staan, daar het subsidie alleen moest dienen: om gegevens te verzamelen, die nuttig zouden kunnen zijn voor de vervaardiging van

eene verbeterde geologische kaart. Naar de meening van den Minister nu: is het bepalen van de herkomst van het diluviale materiaal en hetgeen daarmede verband houdt voor de eventueele geologische kaarteering van geen belang, en schijnt (die bepaling) meer te mogen worden beschouwd als eene wetenschappelijke studie. In haar thans te behandelen missive van 10 October 1906 nu, wijst de Commissie er op: dat de door haar bedoelde vergelijking wel degelijk de eventueele geologische kaarteering geldt; dat zij met haar formuleering geenszins de bedoeling had gehad om de toelage ook voor algemeen wetenschappelijk geologisch onderzoek en studie te benutten, maar uitsluitend voor het onderzoek van al hetgeen aan de eventueele geologische kaarteering van Nederland kan ten goede komen. Voor de voorbereiding daarvan is de in haar schrijven van April 1906 bedoelde vergelijking onmisbaar.

Afschrift van het schrijven van de Geologische Commissie is aan Z.Exc. toegezonden.

Voorts bericht de Geologische Commissie dat zij gaarne bereid is tot samenwerking met den dienst der Rijksopsporing van Delfstoffen. Mededeeling daarvan is gedaan aan den Heer Ingenieur-Directeur van dien dienst. Deze antwoordde bij schrijven van 15 Oct. l.l. hetwelk aan de Geologische Commissie is toegezonden.

5°. Bericht van Prof. E. C. VAN LEERSUM betreffende een tentoonstelling van voorwerpen welke op de geschiedenis der natuur- en geneeskundige wetenschappen betrekking hebben. In handen gesteld van de Heeren ZEEMAN en BOLK.

Natuurkunde. — *Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam.*

Zijne Exc. de Minister van Binnenlandsche Zaken, heeft bij missive van 29 Juni 1906, naar aanleiding van een schrijven van den Hoofddirecteur van het Rijksmuseum de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen uitgenoodigd een onderzoek in te stellen omtrent de vraag, of ten aanzien van de inrichting der op het Rijksmuseum aangebrachte bliksemafleiders en de beproeving daarvan, thans andere regels behooren te worden gesteld, dan die welke zijn aangegeven in de rapporten, uitgebracht in de vergaderingen der Akademie van 25 Juni 1887 en 28 Januari 1888. Door den Voorzitter der Afdeeling werd ons het door den Minister gewenschte onderzoek opgedragen.

Ten einde ons van die opdracht te kwijten hebben wij ons tot

den Hoofddirecteur van het Rijksmuseum en tot den Architect der Rijksmuseumgebouwen gewend met verzoek ons teekeningen en verdere gegevens te verstrekken waardoor wij ons een denkbeeld van den bestaanden toestand zouden kunnen vormen. Wij mochten van genoemde Heeren alle medewerking, die wij konden wenschen, ondervinden. Wij verzochten bepaaldelijk den Heer Architect ons mede te deelen of de toestand in overeenstemming is met de in het eerste der bovengenoemde rapporten vervatte voorstellen; welke veranderingen, waarmede de commissie bij hare overwegingen rekening zou moeten houden, in den loop der jaren in de gebouwen zijn aangebracht en welke voorzieningen zijn getroffen tegen het gevaar dat uit de in de gebouwen aanwezige metaalmassa's zou kunnen voortvloeien.

De Heer Cuypers, waarnemend Architect der Rijksmuseumgebouwen, deelde ons hierop mede dat de bestaande toestand der 12 bliksemafleiders geheel in overeenstemming is met het rapport uitgebracht in de Akademie-vergadering van 25 Juni 1887. Intusschen is daarna de toestand in zooverre gewijzigd dat bijgebouwd werden: de oefenschool, het fragmentengebouw en de Rembrandtzaal. Eene situatieteekening van genoemde gebouwen en van het Rijksmuseum werd tot onze beschikking gesteld. Zoowel op de oefenschool als op het fragmentengebouw is een bliksemafleider aangebracht op dezelfde wijze als voor de museumgebouwen was voorgeschreven, terwijl deze twee afleiders respectievelijk met de gas- of waterleiding in den grond verbonden en daaraan gesoldeerd werden.

De hoofddirecteur en de Heer Cuypers verschaften aan uwe commissie verder de gelegenheid om mondeling eenige punten nader te bespreken en verscheidene deelen van het gebouw in oogenschouw te nemen. Zoo bezagen wij het met lood bedekte dak der Rembrandtzaal en de bibliotheek en werd ons de wijze van verbinden tusschen de regenpijpen en het dak getoond; verder werd door ons de loop der regenpijpen op de binnenplaatsen en eveneens buiten aan het gebouw meer in bijzonderheden nagegaan.

Als resultaat van het door ons ingestelde onderzoek en van onze overwegingen meenen wij de volgende uitbreiding van het systeem der bliksemafleiders van de Rijksmuseumgebouwen te moeten voorstellen:

1°. Het looden dak der Rembrandtzaal te verbinden met de twee regenpijpen, die van het dak van het hoofdgebouw afkomen en het door een goeden afleider met den grond te verbinden.

Hiervoor is het wenschelijk aan de achterzijde een verticalen

afleider naar den grond aan te brengen en bovendien de verticale van het dak der zaal afvoerende regenpijpen te verbinden aan den zoo aanstonds te noemen metaalband.

2°. Rondom het gebouw een breeden, zinken, horizontalen band van 200 mM². (of koperen van 100 mM²) doorsnede aan te brengen, die verbonden wordt aan alle regenpijpen en aan alle afleiders en die zal kunnen worden bevestigd op een iets grootere hoogte boven den grond dan die, waarop de regenpijpen in de hardsteenen kanalen overgaan.

Deze band behoeft niet het geheele gebouw te omvatten, maar kan, waar noodig, bijv. bij den doorrit, zijn afgebroken, indien slechts op of nabij de plaatsen waar de band eindigt voor een verbinding met de aarde of met de waterleiding wordt gezorgd.

3°. De regenbuizen in de binnenplaatsen aan de daarbij gelegen condensatiebuizen te verbinden, welke laatste in goed geleidend verband met de inwendige waterleiding moeten worden gebracht. Een der genoemde regenbuizen, die op te grooten afstand van de condensatiebuizen ligt, kan door den muur heen met de waterleiding in den doorrit worden verbonden.

4°. Een paar der daarvoor gunstig gelegen afleiders van het hoofdgebouw in den grond te verbinden met de waterleiding, door daaraan een spruit te soldeeren en eveneens den afleider van de directeurswoning door een spruit van koperdraad met de waterleidingsbuizen in den tuingrond nabij de woning te vereenigen, gelijk reeds door den Heer Architect in zijne mededeeling aan ons werd voorgesteld.

5°. Het geheele metalen systeem van zuilen en gaanderijen in de bibliotheek, dat met het dak daarvan is verbonden ook aan het benedeneinde (voor zoover dit nog noodig is) met de ijzeren wenteltrap aldaar te vereenigen en op een of twee plaatsen met de waterleiding of met een grondplaat in verband te brengen.

6°. Een metalliek verband te leggen op enkele plaatsen tusschen de afleiders en de ijzeren kettingankers, welke volgens de mondelinge toelichting van den Heer Cuypers op de hoogte der verdiepingen horizontaal binnen in de muren van het hoofdgebouw verloopen en gesloten kringen vormen. Gelijk in het Rapport van 25 Juni 1887 werd opgemerkt, plaatst het uitgestrekte samenstel der ijzeren kappen verbonden met de afleiders het gebouw als onder een

goed geleidende, met de aarde geleidend verbonden kooi. Door de bovengenoemde verbindingen der afleiders met de regenpijpen, den aan te brengen horizontalen band en de kettingankers zal die kooi gecompleteerd worden, wat ons van groot belang schijnt, daar zulk een kooi ongetwijfeld het meest afdoend stelsel van bescherming tegen bliksemgevaar oplevert.

Ten gevolge der door ons voorgestelde wijzigingen zal dan ook het gevaar van afslaan van den bliksem op naburige metaalmassa's in het gebouw (buizen der centrale verwarming en de draadgeleidingen der electrische verlichting en van den telephoon), belangrijk verminderd worden.

De vraag in hoeverre het toch nog wenschelijk zal zijn die metaalmassa's te verbinden hangt in zoodanige mate af van de plaatselijke toestanden in het uitgestrekte gebouw dat wij meenen ons thans te moeten bepalen tot het voorstel, dat die verbinding zal worden tot stand gebracht, in zooverre nader overleg van uwe commissie met den Heer Architect daartoe aanleiding zal geven.

7°. Een volledigen afleider te plaatsen op het fragmentengebouw.

Wat de regels voor de beproeving der afleiders betreft, zoo komt het ons voor dat geen verandering behoeft te komen in die welke zijn vervat in het Rapport uitgebracht in de Akademievergadering van 28 Januari 1888. Alleen achten wij het wenschelijk, dat voortaan in het procesverbaal van beproeving vermeld wordt, *welke* der afleiders telkens zijn onderzocht. Ten slotte zij er op gewezen dat na de door ons gewenschte verbinding, bij het onderzoek der afleiders de waterleiding niet meer als hulpaardgeleiding zal kunnen worden gebezigd.

H. A. Lorentz.
H. Haga.
W. H. Julius.
P. Zeeman.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. Oudemans doet eene mededeeling over: *„Onderlinge verduisteringen der wachters van Jupiter."*

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over : *„Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied."*

(Medegedeeld in de vergadering van 29 September 1906).

Zoowel bij de proefondervindelijke spectroscopie als bij de toepassing harer uitkomsten op astrophysische vraagstukken is men gewoon, uit het uiterlijk van spectraallijnen gevolgtrekkingen af te leiden aangaande de temperatuur en de dichtheid van gassen in of om de lichtbron.

Deze gevolgtrekkingen moeten in vele gevallen geheel onjuist zijn, wanneer men den oorsprong der donkere lijnen uitsluitend in absorptie, die der lichte lijnen uitsluitend in selectieve emissie zoekt, en geen rekening houdt met het feit, dat de lichtverdeeling in het spectrum mede beheerscht wordt door anomale dispersie van de stralen in de absorbeerende stof.

Niet slechts bij uitzondering doet deze laatste invloed zich gelden. Van vele metaaldampen weet men reeds, dat zij anomale dispersie doen ondergaan aan de lichtsoorten die in de omgeving van een groot aantal hunner absorptielijnen thuis behooren [1]). In al die gevallen moet het uiterlijk der absorptielijnen door den bedoelden invloed in meer of minder sterke mate gewijzigd zijn, want homogeen is de doorstraalde dampmassa nooit.

Het is dus noodig, dat men de uitwerking der dispersie op spectraallijnen afzonderlijk onderzoekt; men moet trachten haar geheel af te scheiden van de zuivere emissie- en absorptieverschijnselen.

Een eerste poging om dit doel te bereiken vormden de vroeger beschreven proeven met een lange natriumvlam [2]), waarbij een bundel wit licht afwisselend langs verschillende wegen door die vlam gezonden werd. Wegens de ongelijkmatige verdeeling van den natriumdamp onderging, bij die relatieve verplaatsingen van lichtbundel en vlam, de loop der stralen van het anomaal gedispergeerde licht, veel sterkere veranderingen dan de loop der overige stralensoorten van het spectrum; absorptie en emissie veranderden daarbij betrekkelijk weinig. Het resultaat was, dat de lichtverdeeling in de omgeving

[1]) Na WOOD, LUMMER en PRINGSHEIM, EBERT, heeft zich vooral PUCCIANTI met onderzoekingen over anomale dispersie van verschillende metaaldampen bezig gehouden. In Nuovo Cimento, Serie V, Vol. IX, p. 303 (1905) beschrijft PUCCIANTI meer dan honderd lijnen die het verschijnsel vertoonen.

[2]) W. H. JULIUS, „Dispersiebanden in absorptiespectra." Versl. Natuurk. Afd. Dl. XIII, p. 26–32.

van D_1 en D_2 zeer sterk asymmetrisch gemaakt kon worden, hetgeen als gevolg van straalkromming gemakkelijk in alle bijzonderheden te verklaren was. Het bestaan van „dispersiebanden" was daarmee buiten twijfel gesteld.

Maar *volkomen* constant was het zuivere effect van emissie en absorptie bij deze proeven niet, en aangaande de dichtheid van den natriumdamp in de verschillende deelen der vlam kon men slechts gissingen maken. Bovendien was het dwarrelend opstijgen der heete gassen oorzaak, dat alle lichtstralen, ook die welke *geen* anomale dispersie ondergingen, merkbaar van den rechten weg afweken, zoodat de verschijnselen te veranderlijk waren om de werking der dispersie streng afgezonderd van die der emissie en absorptie te kunnen vertoonen.

Er moest dus gestreefd worden naar het verkrijgen van een zoo goed mogelijk homogene dampmassa en van een inrichting die veroorlooft, daarin dan naar willekeur plaatselijke verschillen in de dampdichtheid te weeg te brengen op zulk een wijze, dat de gemiddelde dichtheid er geen verandering van beteekenis door ondergaat. Het absorbeerend vermogen zou dan als constant mogen worden beschouwd. Tevens was het wenschelijk, den damp bij betrekkelijk lage temperatuur te onderzoeken, zoodat men geen rekening te houden had met zijn emissiespectrum.

In een reeks fraaie onderzoekingen omtrent het brekend vermogen en de fluorescentie van natriumdamp heeft R. W. Wood[1]) den damp zich laten ontwikkelen in een luchtledige buis, die electrisch verhit werd. Door juiste regeling van de stroomsterkte bleek de dichtheid van den damp daarbij zeer gelijkmatig gehouden te kunnen worden. Van die ondervinding gebruik makende, heb ik voor het onderzoeken van dispersiebanden de volgende inrichting samengesteld.

Toestellen.

NN' (zie fig. 1) is een buis van nikkel, 60 cm. lang, 5,5 cm. diameter, 0,07 cm. wanddikte. Het middelste gedeelte daarvan, ter lengte van 30 cm., bevindt zich binnen een electrischen oven van Heraeus (model: E, 3). Over de uiteinden zijn deksels geschoven, die met hun rand in twee op de buis gesoldeerde ringvormige gootjes komen en haar dus luchtdicht afsluiten wanneer men de gootjes aanvult met kit. Als de oven in werking is, houdt een voortdurende waterstroom, geleid door de beide mantels M en M', de uit-

[1]) R. W. Wood, Phil. Mag. [6], 3, p. 128; 6, p. 362.

einden van de buis koel. Elk der beide deksels bezit een rechthoekig venster van spiegelglas benevens, ter weerszijden daarvan en

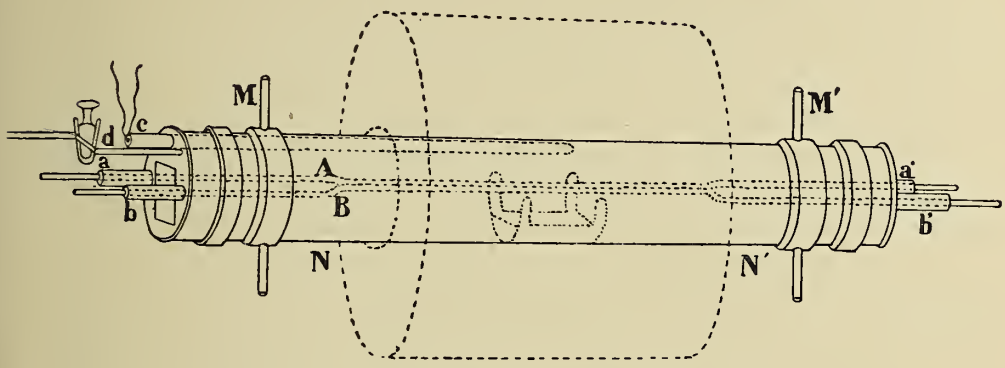


Fig. 1.

diametraal tegenover elkander geplaatst, twee openingen a en b (b' en a'), voorzien van korte stukjes messing-buis, waarvan het doel aanstonds duidelijk zal worden. Bovendien zijn in eén van de deksels (zie ook fig. 2) nog twee andere korte buizen c en d in openingen bevestigd; door c is de porceleinen buis van een pyrometer van Le Chatelier luchtdicht naar binnen gevoerd, terwijl op d een glazen kraan met kwikafsluiting is vastgekit, die voert naar een manometer en een Geryk-luchtpomp. Zoodra het natrium (een zorgvuldig gereinigd stuk van ongeveer 7 gr.) in een van

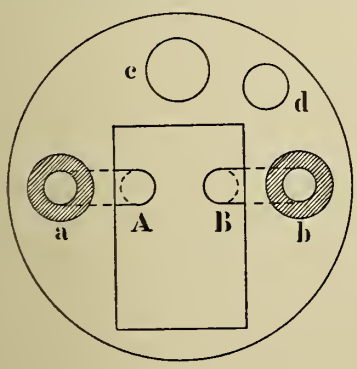


Fig. 2.

veerende ringen voorzien nikkelen bakje naar het midden van de buis geschoven was, had men deze laatste onmiddellijk luchtdicht gesloten en leeggepompt.

Thans blijft nog te beschrijven over de inrichting, waardoor binnen de dampmassa willekeurige ongelijkheden in de dichtheidsverdeeling werden te weeg gebracht. Zij bestaat uit twee nikkelen buizen A en B van 0,5 cm. diameter, gaande van a naar a' en van b naar b' en zóó gebogen, dat zij in het middelste, verhitte deel van de wijde buis over een lengte van 30 cm. op een onderlingen afstand van slechts 0,8 cm. nevens elkander loopen. In de vier openingen der deksels zijn A en B met behulp van caoutchouc verpakkingen volmaakt luchtdicht bevestigd. Deze verbindingswijze laat eenige vrijheid van beweging over, zoodat bij temperatuursverschillen tusschen de

wijde buis en de nauwe buizen geen vormverandering van deze laatste door spanningen behoeft te ontstaan. Het caoutchouc isoleert A en B tevens electrisch van NN'. De vier naar buiten uitstekende einden der buisjes worden door daaropgeschoven mantels met stroomend water (niet voorgesteld in de figuren) koel gehouden.

Laat men nu door A of B een electrischen stroom gaan, dan stijgt de temperatuur van dat buisje een weinig boven die van zijn omgeving; zendt men er een luchtstroom door, dan daalt de temperatuur beneden die van de omgeving. De stroomsterkten, en dus de temperatuursverschillen, zijn in beide gevallen gemakkelijk te regelen en geruimen tijd constant te houden.

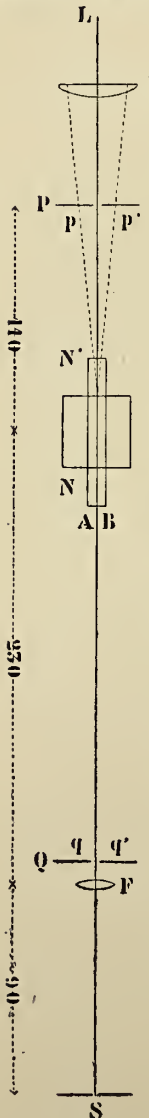


Fig. 3.

Fig 3 geeft een overzicht van de geheele opstelling. Het licht van de positieve kool L wordt door de lens E geconcentreerd op een scherm Q waarin zich een spleetvormige opening van regelbare breedte bevindt. De lens F vormt in het vlak der spleet S van den spectrograaf een scherp beeld van het diaphragma P. De optische as der beide lenzen gaat midden door de buis met natriumdamp NN', juist tusschen de buisjes A en B.

Heeft nu de opening in het diaphragma P de gedaante van een vertikaal geplaatste nauwe spleet en valt het beeld daarvan precies op de spleet van den spectograaf, dan verschijnt in dezen met groote helderheid het doorloopende spectrum van het koolspitsenlicht. Wanneer de buis NN' niet verhit wordt, ziet men D_1 en D_2 als uiterst fijne, donkere lijntjes, die toegeschreven worden aan absorptie door het steeds in de omgeving der kolen aanwezige natrium. Opdat dit verschijnsel, als vergelijkingsspectrum, steeds in het gezichtsveld van den spectograaf aanwezig zou zijn, ook als de buis wèl verhit werd, was voor een gedeelte van de spleet S een klein totaal reflecteerend prisma geplaatst, waarheen met behulp van een eenvoudige combinatie van lenzen en spiegels een deel van den hoofdbundel geleid werd, buiten den electrischen oven om. Op elke genomen fotografie komt dus tevens het ongewijzigde spectrum van de lichtbron voor.

De gebezigde spectraalinrichting bestaat uit een vlak buigingsrooster van 10 cM. middellijn (verdeelde oppervlakte 8 bij 5 cM.) met 14436 lijnen op de inch en twee verzilverde spiegels van Zeiss; de collimatorspiegel

heeft een brandpuntsafstand van 150 cM., de andere van 250 cM. Meestal werd in het tweede spectrum gewerkt.

Bij de eerste verhitting van het natrium ontweek daaruit een vrij groote hoeveelheid gas (volgens Wood waterstof), dat natuurlijk weggepompt werd. Nadat de toestel een paar malen in werking geweest was, bleef de spanning binnen de buis weken lang beneden 1 mM. kwik, ook tijdens de verhittingen, die bij de in dit opstel beschreven proeven nimmer hooger gingen dan tot 450°. De binnenwand van NN' en ook de buisjes A en B zijn na korten tijd met een laag neergeslagen natrium bedekt; daardoor wordt de gelijkmatigheid van de dampontwikkeling bij de latere verhittingen bevorderd. Merkwaardig is het, dat zich nagenoeg geen beslag van natrium afzet op de deelen der buis die buiten den oven uitsteken, zoodat ook de venstertjes volmaakt helder blijven. De dichtheid van verzadigden natriumdamp bij temperaturen tusschen 368° en 420° is proefondervindelijk bepaald door Jewett [1]). Hij geeft de onderstaande tabel.

temperatuur	dichtheid
368°	0.00000009
373	0.00000020
376	0.00000035
380	0.00000043
385	0.00000103
387	0.00000135
390	0.00000160
395	0.00000270
400	0.00000350
406	0.00000480
408	0.00000543
412	0.00000590
418	0.00000714
420	0.00000750

[1]) F. B. Jewett, A new Method of determining the Vapour-Density of Metallic Vapours, and an Experimental Application to the Cases of Sodium and Mercury. Phil. Mag. [6], 4, p. 546. (1902).

Deze dichtheden zijn van dezelfde orde van grootte als die van kwikdamp tusschen 70° en 120°. Bij 387° is de dichtheid van verzadigden natriumdamp ongeveer $\frac{1}{1000}$ van die der dampkringslucht bij 0° en 76 cM.

Waarnemingen.

Regelen wij nu de stoomsterkte in den oven zoo, dat het thermoelement een standvastige temperatuur aanwijst (bij vele onzer proeven 390°), dan is binnen de buis de dampdichtheid wel niet overal dezelfde, want de temperatuur neemt van het midden naar de uiteinden af, maar omdat de niveauvlakken van de temperatuur in hoofdzaak loodrecht op den lichtbundel staan, gaan alle lichtstralen toch nagenoeg rechtlijnig door de dampmassa. Het spectrum is dan ook slechts weinig veranderd; de beide *D*-lijnen zijn iets sterker geworden, hetgeen wij *voorloopig* aan de absorbeerende werking van den natriumdamp in de buis willen toeschrijven.

Thans blazen wij een zwakken luchtstroom door het buisje *A*, dat daardoor een weinig afgekoeld wordt, zoodat er natrium op neerslaat, waarbij in zijn omgeving de dampdichtheid vermindert. Spoedig zien wij de natriumlijnen aanmerkelijk breeder worden. Een gevolg van sterker absorptie kan dit niet zijn, immers de gemiddelde dampdichtheid is een weinig afgenomen. De oorzaak is, dat lichtstralen met zeer grooten brekingsindex nu naar q' (fig. 3) gebogen worden, lichtstralen met zeer kleinen index naar q; in het beeld van de spleet *P*, dat op *S* gevormd wordt, komen dus de lichtsoorten, die ter weerszijden van de *D*-lijnen thuis behooren, niet meer voor, terwijl dat beeld toch volmaakt scherp blijft, omdat de loop der stralen van alle overige lichtsoorten uit het spectrum zoo goed als geen verandering heeft ondergaan. Wanneer wij nu gelijktijdig de buis *B* door middel van een stroom van bijv. 20 amp. verhitten, waardoor het dichtheidsverval in de ruimte tusschen de buizen grooter wordt, dan neemt de breedte der lijnen nog duidelijk verder toe. De hoeveelheid stroomwarmte die daarbij in de buis ontwikkeld wordt, bedraagt ongeveer 1 calorie per secunde; zij wordt echter voor het grootste gedeelte door geleiding naar de afgekoelde einden der buis weggevoerd, zoodat de temperatuursverhooging slechts gering kan zijn.

Door het verzetten van een stroomsleutel en een kraan kan men plotseling *A* en *B* van rol doen verwisselen, zoodat *A* verhit, *B* afgekoeld wordt; de donkere banden krimpen dan in, gaan over in scherpe *D*-lijnen, om vervolgens weer uit te zetten totdat zij, na

verloop van een paar minuten, de oorspronkelijke breedte hebben herkregen.

Fijn en scherp zijn intusschen de lijnen in het overgangsstadium alleen dan, wanneer de temperatuur van den oven zeer constant is. Daalt zij of stijgt zij, dan blijkt de minimale breedte niet zoo gering te wezen. In dat geval zijn er echter stellig stroomingen in de dampmassa voorhanden, die de dichtheidsverdeeling minder gelijkmatig doen zijn. Het ligt nu voor de hand, de straalbreking in zulke toevallige ongelijkmatigheden ook als de voornaamste oorzaak te beschouwen, waardoor bij gelijke temperatuur van A en B de natriumlijnen toch somtijds eenige verbreeding kunnen vertoonen.

Dat spectraallijnen een zekere breedte bezitten, schrijft men gewoonlijk toe 1°. aan beweging van de licht-uitzendende moleculen in de gezichtslijn en 2°. aan veranderingen in de trillingsperiode van de electronen bij de botsingen der moleculen. Wij hebben thans te maken met een derde oorzaak: anomale dispersie in de absorbeerende middenstof. De geheele reeks van verschijnselen, die onze buis met natriumdamp te zien gaf, strekt tot steun aan de meening, dat de laatstgenoemde oorzaak in den regel als verreweg de voornaamste moet worden beschouwd. Het zal blijken, dat deze gevolgtrekking niet alleen voor donkere maar ook voor heldere spectraallijnen geldt.

Wanneer men de spleet in het diaphragma P naar den kant van p' sterk verwijdt, dan heeft dit geen invloed op het spectrum zoolang A en B op de temperatuur hunner omgeving zijn. De D-lijnen vertoonen zich als in α, Pl. I. Brengt men echter A onder, B boven die temperatuur, dan verbreeden de donkere D-lijnen zich slechts naar den kant van de kleinere golflengten, terwijl aan den kant der grootere golflengten de lichtsterkte zelfs toeneemt, omdat nu ook anomaal gebogen stralen uit het lichtveld p' door de spleet Q het punt S kunnen bereiken (zie β, Pl. I). Het spectrum β gaat over in γ wanneer men het temperatuursverschil tusschen A en B van teeken doet omkeeren, of ook wanneer men, met behoud van het oorspronkelijke temperatuursverschil, de spleet in P naar den kant van p sterk verwijdt. Een kleine verschuiving van het geheele diaphragma P (uitgaande van den toestand waarin het zich bij de opname β bevond), zóó dat S juist in de schaduw komt, doet het spectrum δ verschijnen, dat den indruk maakt van een emissiespectrum van natrium met eenigszins verschoven lijnen, hoewel het blijkbaar uitsluitend te danken is aan stralen uit het veld p', die anomale dispersie in den damp hebben ondergaan.

Stellen wij ons thans wederom het diaphragma P voor met een

nauwe spleet, geplaatst op de optische as. (Meestal werd gebruik gemaakt van een stuk glas, beplakt met bladtin, waarin een spleet was gesneden). Het spectrum vertoont dan breede banden als er dichtheidsverval is tusschen A en B. Snijdt men naast de spleet een opening in het bladtin, dan wordt aan een groep stralen van bepaalde breekbaarheid (en dus ook van bepaalde golflengten) gelegenheid gegeven, door Q naar S te komen, en er ontstaat in den donkeren band een lichte plek, wier vorm wel afhankelijk is van den vorm der opening in het bladtin, doch in geenen deele daaraan gelijk. Heeft bijv. de opening in het diaphragma de gedaante van fig. 4, dan verkrijgt men het spectrum ε. Bij vermindering van het dichtheidsverval krimpt die figuur samen, ζ; doet men het dichtheidsverval nu van teeken omkeeren en aangroeien, dan schrijdt de verandering voort door de stadiën α (verval juist gelijk nul) en η naar θ.

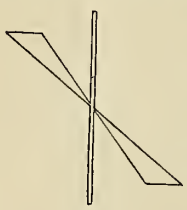


Fig. 4.

Het verband tusschen den vorm van de diaphragma-opening en dien van de lichte plekken in 't spectrum ware uit de gedaante der dispersiekromme gemakkelijk te voorspellen geweest. Houdt men de betrekking, die tusschen de twee figuren in een eenvoudig geval als het bovenstaande experimenteel gevonden is, voor oogen, dan is het niet moeilijk, voor iedere gewenschte lichtverdeeling in den dispersieband, den vorm van de daartoe noodige diaphragma-opening te construeeren.

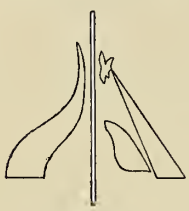


Fig. 5.

De bloem ι en haar tegenhanger $\varkappa$ vereischten het diaphragma, voorgesteld in fig. 5. Door omkeering van het verval gaat het beeld ι in $\varkappa$ over.

Zoo kan men dus ook verdubbelingen, omkeeringen, heldere of donkere vertakkingen van spectraallijnen geheel naar verkiezing in het aanzijn roepen, en zou men bijv. alle verschijnselen die op dit gebied in spectra van zonnevlekken, fakkels of protuberanties zijn waargenomen, getrouw kunnen nabootsen. Op plaat II zijn nog een aantal willekeurige lichtverdeelingen samengebracht. Zij zijn alle ontstaan in natriumdamp van gemiddeld 390°; α' is weer het spectrum bij gelijke temperatuur van de buizen A en B. In ν ziet men op den donkeren dispersieband D_2 een heldere dubbellijn, die doet denken aan het spectrum der calciumflocculi van HALE. D_1 vertoont in hetzelfde negatief eveneens een fijne dubbellijn, maar die is in de reproductie niet meer te zien. De spectra φ, χ, ψ bootsen het ontstaan van een zonnevlek- en protuberantiespectrum na; φ namelijk verbeeldt het spectrum van den rustigen zonnerand bij radiaal ge-

plaatste spleet; in χ verschijnt een protuberantie en een vlek met omkeeringsverschijnselen; ψ vertoont dit alles in versterkte mate. Doet men nu het dichtheidsverval van teeken wisselen, dan krimpt eerst het beeld weer samen tot φ, om zich vervolgens uit te zetten tot ω, in zekeren zin het spiegelbeeld van ψ. Van het merkwaardig schouwspel dezer geleidelijke, geheel regelbare veranderingen geven de fotografieën slechts een gebrekkigen indruk.

De betrekking tusschen straalkromming en dichtheidsverval.

De vraag dringt zich op, of het nu wel *waarschijnlijk* is, dat omstandigheden als die, welke bij onze proeven verwezenlijkt waren, zich ook voordoen hetzij in de natnur, hetzij bij spectroscopische onderzoekingen, met geheel andere bedoelingen ondernomen.

Merken wij in de eerste plaats op, dat zonderling gevormde diaphragma-openingen niet absoluut noodig zijn om verschijnselen als de boven beschrevene te doen ontstaan. Had onze lichtbron een standvastige, bijv. cirkelvormige gedaante gehad; waren daarentegen richting en grootte van het dichtheidsverval in onze buis niet zoo gelijkmatig geweest, doch zeer verschillend op verschillende plaatsen van het door de lens F afgebeelde veld; dan zouden de D-lijnen eveneens allerlei uitwassen hebben vertoond, nu bepaald door de configuratie der dichtheidsverdeeling.

In de tweede plaats willen wij trachten, ons eenig denkbeeld aangaande de quantitatieve verhoudingen te vormen.

De kromtestraal ϱ van de baan der meest afgeweken lichtsoorten, die op onze fotografieën voorkomen, is gemakkelijk te schatten uit den afstand d van het diaphragma P tot het midden van den oven, den afstand δ van de verst verwijderde diaphragma-openingen tot de optische as, en de lengte l van de ruimte waarin straalkromming optreedt. Immers

$$\varrho : l = d : \delta.$$

Voor $\delta = 1$ cm., $d = 110$ cm., $l = 27$ cm. geeft dit $\varrho = 3000$ cm. De gemiddelde dichtheid Δ van den natriumdamp was daarbij ongeveer $\frac{1}{1000}$ van de dichtheid der dampkringslucht.

Zoeken wij, hoe ϱ afhangt van het dichtheidsverval.

Steeds is:

$$\varrho = \frac{n}{n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wanneer n den plaatselijken brekingsindex van de middenstof voor

de beschouwde lichtsoort voorstelt, en $n' = \frac{dn}{ds}$ de verandering is van dien index per cm. in de richting naar het krommingsmiddelpunt. Bij benadering geldt, voor een bepaalde lichtsoort,

$$\frac{n-1}{\Delta} = \text{constante} = R$$

$$n = R\Delta + 1$$

$$n' = \frac{dn}{ds} = R\frac{d\Delta}{ds}$$

Hieruit volgt:

$$\varrho = \frac{R\Delta + 1}{R\frac{d\Delta}{ds}};$$

maar omdat bij ijle gassen n weinig van de eenheid verschilt, ook zelfs voor de door ons beschouwde anomaal gedispergeerde lichtsoorten, mag men $R\Delta$ tegenover 1 verwaarloozen en dus schrijven

$$\varrho = \frac{1}{R\frac{d\Delta}{ds}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Voor elke lichtsoort is derhalve ϱ omgekeerd evenredig met het verval der dichtheid van den damp in de richting, loodrecht op die der voortplanting.

Een schatting van de grootte van het dichtheidsverval, dat bij onze proeven tusschen A en B ontstond, kan langs twee wegen verkregen worden. Men kan die namelijk afleiden uit het opgewekte temperatuursverschil, of wel uit de formule (2).

Het temperatuursverschil tusschen A en B ware thermo-electrisch vrij gemakkelijk te bepalen geweest; ik had echter tot nu toe geen gelegenheid, de inrichting daarvoor aan te brengen. Trouwens, het verband tusschen de dichtheidsverdeeling in de doorstraalde ruimte en de temperaturen van A en B kan ook niet zoo heel eenvoudig zijn, daar wij niet met twee evenwijdige platte vlakken te doen hebben, maar met buizen waaraan bovendien een aantal droppels vloeibaar natrium hangen.

De tweede weg levert direct een gemiddelde waarde van $\frac{d\Delta}{ds}$ voor de doorstraalde ruimte. Zij eischt de kennis van $R = \frac{n-1}{\Delta}$ voor een stralensoort, voor welke in onze proeven ook ϱ bepaald is.

Nu geeft Wood (Phil. Mag. [6], 8, p. 319) een tabel voor de

waarden van n voor lichtsoorten uit de naaste omgeving der D-lijnen. Deze opgaven hebben intusschen betrekking op verzadigden natriumdamp van 644°; maar wij kunnen er de waarden van n voor damp van 390° uit afleiden met behulp van de tabel, die hij l.c. op blz. 317 geeft.

Immers bij verhitting van 389° tot 508° wordt de brekende kracht $n-1$ van den damp (gemeten door het aantal passeerende interferentie-franjes van heliumlicht $\lambda = 5875$) $\frac{98}{9} = 11$ maal grooter, bij verdere verhitting van 508° tot 644° wederom $\frac{50}{4} = 12{,}5$ maal grooter (nu blijkens interferentiemeting met licht van de kwiklijn $\lambda = 5461$), dus van 390° tot 644° neemt de brekende kracht toe in reden van 1 tot $11 \times 12{,}5 = 137$.

Daar nu voor stralen, op 0,4 Angstr. eenh. van de D-lijnen gelegen [1]), blijkens Wood's tabel op p. 319, als gemiddelde van 3 aldaar gegeven waarden $n-1 = \pm 0.36$ is, zou men bij natriumdamp van 390° voor dezelfde lichtsoort moeten hebben

$$n-1 = \frac{0.36}{137} = 0.0026.$$

De dichtheid Δ bij 390° is volgens Jewett 0.0000016, dus

$$R = \frac{n-1}{\Delta} = \frac{0.0026}{0.0000016} = 1600.$$

Uit formule (2) volgt dan

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\varrho} = \frac{1}{1600 \times 3000} = 0{,}0000002.$$

Dispersiebanden in de spectra van aardsche lichtbronnen.

Het is zeer waarschijnlijk, dat bij het verdampen van metalen in den electrischen lichtboog nabij de koolspitsen herhaaldelijk waarden van het dichtheidsverval worden aangetroffen, meer dan duizend malen grooter dan die van het zwakke verval in onze buis met ijlen natriumdamp [2]).

[1]) Het spectrum ε op onze plaat doet zien, dat de uiteinden der pieken vrij wel beantwoorden aan licht van de bedoelde golflengten; immers zij naderen de D-lijnen tot op een afstand, die stellig niet meer dan $\frac{1}{15}$ van den onderlingen afstand der D-lijnen bedraagt. Voor deze lichtsoorten was de diaphragma-opening 1 c.m. van de optische as verwijderd.

[2]) Stelt men bijv. de dampdichtheid van het metaal in den krater, waar het kookt, op 0,001, de dampdichtheid buiten den boog, 1 cm. van den krater verwijderd, op 0,00001, dan heeft men reeds een gemiddeld verval dat 5000 maal zoo groot is als het verval dat bij onze proeven gebezigd werd.

De kromtestraal zal in die gevallen ook meer dan duizend malen kleiner zijn dan 30 meter, en dus een paar centimeters of zelfs minder kunnen bedragen. Een korte weg door de dampmassa is dan reeds voldoende om sommige lichtstralen zeer merkbaar van richting te doen veranderen.

Wordt nu van de koolspitsen een beeld ontworpen op de spleet van een spectroscoop, dan is dit een *zuiver* beeld alleen voor zoover het gevormd wordt door stralen die in de lichtboog weinig gebroken zijn, maar de stralen die anomale dispersie ondergaan, werken daartoe niet mee. Licht van laatstgenoemden aard, uit den krater afkomstig, kan ontbreken in het beeld van den krater, en daarentegen de spleet binnendringen tusschen de beelden der koolspitsen in. Zoo moet dus, bij de gewone spectroscopische waarnemingen, niet alleen verbreeding van absorptie-lijnen, maar evenzeer verbreeding van emissielijnen vaak voor een belangrijk deel aan anomale dispersie worden toegeschreven.

Houdt men dit in het oog, dan zullen vele tot nu toe raadselachtige verschijnselen een ongedwongen verklaring vinden. Zoo bijv. het feit dat Liveing en Dewar [1]) de natriumlijnen sterk verbreed zagen telkens wanneer, na het bijbrengen van nieuw materiaal, heftige dampontwikkeling plaats vond, doch dat de lijnen smaller werden als de massa tot rust kwam, hoewel daarbij de dampdichtheid niet verminderde. Werd door het inpersen van stikstof in de dampruimte de drukking geleidelijk verhoogd, dan bleven de lijnen scherp; maar werd plotseling de drukking opgeheven, dan verbreedden zich de lijnen. Dit alles wordt duidelijk zoodra men in de lijnen dispersiebanden heeft herkend, die breed moeten zijn wanneer de dichtheid van den absorbeerenden damp ongelijkmatig is, doch smal, zelfs bij dichten damp, wanneer deze slechts gelijkmatig in de ruimte verdeeld is.

Een tweede voorbeeld. Volgens de onderzoekingen van Kayser en Runge zijn de lijnen, behoorende tot de tweede nevenserie in de spectra van magnesium, calcium, cadmium, zink, kwik, steeds wazig uitloopend naar den kant van het rood en scherp begrensd naar violet, terwijl lijnen, behoorende tot de eerste nevenserie of tot andere seriën, somtijds duidelijk meer verbreed zijn naar den violetten kant. Met betrekking tot het magnesiumspectrum zeggen zij: [2]) „Auffallend ist bei mehreren Linien, die wir nach Roth verbreitert gefunden haben, dass sie im Rowland'schen Atlas ganz scharf sind, und dann

[1]) Liveing and Dewar, On the reversal of the lines of metallic vapours, Proc. Roy. Soc. 27, p. 132—136; 28, p. 367—372 (1878—1879).

[2]) Kayser und Runge, Über die Spektren der Elemente, IV, S. 13.

stets etwas kleinere Wellenlänge haben. So haben wir 4703,33, ROWLAND 4703,17; wir 5528,75, ROWLAND 5528,62. Unschärfe nach Roth verleitet ja leicht der Linie grössere Wellenlänge zuzuschreiben; so gross kann aber der Fehler nicht sein, denn die ROWLAND'sche Ablesung liegt ganz ausserhalb des Randes unserer Linie. Wir wissen daher nicht, woher diese Differenz rührt." KAYSER heeft later [1]) een verklaring voor dit feit gegeven, berustende op een combinatie van omkeering met asymmetrische verbreeding; maar men komt, naar het mij toeschijnt, tot een meer waarschijnlijke oplossing door de verbreede serielijnen als dispersiebanden op te vatten.

Nemen wij namelijk aan dat van de sterkst lichtende positieve koolspits naar het midden van de lichtboog de dichtheid van de deeltjes, aan welke de tweede nevenserie eigen is, afneemt; dan zullen stralen, uit den krater komende, en wier golflengte een weinig grooter is dan die der bedoelde serielijnen, krom zijn en hun concaven kant naar de koolspits wenden. Hun oorsprong wordt ten onrechte gedacht in het verlengde van hun eindrichting, dus zij *schijnen* te komen uit den boog en men meent emissielicht van den damp te zien van verschillende golflengten, die alle grooter zijn dan de juiste golflengten der serielijnen. De waargenomen, verplaatste lijnen der tweede nevenserie zijn dus vergelijkbaar met de schijnbare emissielijnen van het spectrum *d* op onze plaat I.

Het is alsof, in het aangehaalde geval, het licht dezer serielijnen *uitsluitend* aan anomale dispersie was toe te schrijven. Vermoedelijk echter zal in de meeste gevallen de eigenlijke emissie wèl in merkbare mate bijdragen tot de vorming der lijn; de scherpe kant der lijn moet zich dan precies ter plaatse van de kenmerkende golflengte vertoonen.

Hoe is het nu echter te verklaren dat lijnen van andere seriën onscherp zijn naar den tegenovergestelden kant? Ook dit verschijnsel kunnen wij als een gevolg van anomale dispersie uitleggen, indien wij aannemen, dat van de emissiecentra dier andere seriën de optische dichtheid *toeneemt* wanneer wij ons van de positieve koolspits verwijderen. In dat geval toch zouden de uit den krater afkomstige lichtstralen, die hun concaven kant naar de koolspits wenden en dus uit den boog schijnen te komen, kleinere golflengten bezitten dan de serielijnen, d.w.z. de serielijnen vertoonen zich verbreed naar violet. De gemaakte onderstelling is niet onwaarschijnlijk. Immers de positieve en de negatieve atoom-ionen, die volgens de theorie van STARK in den lichtboog ontstaan door den stoot van negatieve electron-

[1]) KAYSER. Handbuch der Spektroskopie II, S. 366,

ionen, bewegen zich onder den invloed der electrische spanning in tegengestelde richtingen; het dichtheidsverval zal dus voor de beide soorten ook van teeken verschillen. Seriën, wier lijnen naar rood onscherp zijn en seriën, wier lijnen naar violet uitvloeien, zouden dan volgens deze beschouwing toekomen aan atoom-ionen van tegengesteld teeken — een conclusie, die in elk geval waard is, aan nader onderzoek onderworpen te worden.

De gegeven voorbeelden mogen voldoende zijn om aan te toonen dat het noodig is, stelselmatig te onderzoeken in hoeverre de reeds bekende spectraalverschijnselen door anomale dispersie veroorzaakt kunnen zijn. Een aantal gevallen waarin de steeds veronachtzaamde straalkromming ongetwijfeld den toestand beheerscht heeft, vindt men in het handboek van KAYSER, II, p. 292—298, 304, 306, 348—351, 359—361, 366.

Dispersiebanden in de spectra van hemellichamen.

Daar nagenoeg elke bijzonderheid in het uiterlijk van spectraallijnen door anomale dispersie kan worden verklaard, mits men slechts het bestaan van de vereischte dichtheidsverdeelingen mag aannemen, moeten wij bij toepassing op astrophysische verschijnselen ons afvragen: kunnen de waarden van het dichtheidsverval voor de verschillende absorbeerende gassen op de hemellichamen werkelijk van dien aard zijn, dat de lichtstralen daarin voldoende gekromd worden om een zóó duidelijk merkbaren invloed op de lichtverdeeling in het spectrum uit te oefenen?

In vroegere mededeelingen heb ik aangetoond[1]), dat men zich bijv. de zon kan voorstellen als een gasvormig lichaam, waarin de bestanddeelen innig gemengd zijn, want dat alle lichtverschijnselen die den indruk geven alsof de stoffen op de zon gescheiden voorkomen, in zulk een gasmengsel kunnen worden teweeg gebracht door anomale dispersie. Thans willen wij trachten te bewijzen dat dit niet alleen het geval zijn *kan*, maar dat het, met het oog op de meest waarschijnlijke dichtheidsverdeeling, zoo zijn *moet*.

Stellen wij de dichtheid van onze atmosfeer aan de oppervlakte der aarde gelijk 0.001293. Op 1050 cm. hoogte is zij $\frac{1}{760}$ van dit bedrag kleiner, dus het vertikale dichtheidsverval bedraagt

$$\frac{0.001293}{1050 \times 760} = 16 \times 10^{-10}.$$

[1]) Versl. Natuurk. Afd. VIII, p. 510—523; XI, p. 126—135, 650—663; XII, p. 300—334; XIII, p. 26—32, 138—145, 359—363.

Het horizontale verval in de omgeving van depressies is veel geringer; zelfs bij stormen is het nog maar ongeveer $\frac{1}{1000}$ van de genoemde waarde [1]). Over kleine afstanden kan natuurlijk het dichtheidsverval in de atmosfeer wel eens grooter zijn, door plaatselijke verwarming of andere oorzaken.

Dergelijke overwegingen, mutatis mutandis toegepast op de zon, kunnen ons echter niet tot een betrouwbare schatting leiden van de daar voorkomende dichtheidsgradiënten. Een voorname oorzaak, waardoor dit voorshands onmogelijk is, ligt in onze onbekendheid met de grootte van den invloed, dien de *stralingsdruk* uitoefent op de stofverdeeling in de zon. Was er geen stralingsdruk, dan zou men mogen vooropstellen (zooals steeds geschiedt) dat ter hoogte van de fotosfeer de zwaartekracht 28 maal zoo groot was als op aarde; maar zij wordt tegengewerkt door den stralingsdruk in een mate, afhankelijk van de grootte der deeltjes; zij kan daardoor zelfs voor sommige deeltjes geheel opgeheven worden. Het radiale dichtheidsverval moet dus in ieder geval veel kleiner zijn dan men, op grond van graviteitswerking alléén, geneigd mocht zijn te berekenen.

Wij bezitten intusschen een ander middel om het radiale dichtheidsverval ter plaatse van de fotosfeer, althans wat orde van grootte betreft, te bepalen. Volgens de theorie van A. Schmidt is de zoogenaamde fotosfeer niet anders dan een kritische sfeer, wier straal gelijk is aan den kromtestraal van lichtstralen, die in een punt van haar oppervlakte horizontaal loopen. Die kromtestraal is dus $\varrho = 7 \times 10^{10}$ c.m., welke waarde wij kunnen invoeren in de uitdrukking voor het dichtheidsverval:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\varrho}$$

Het refractie-aequivalent R voor stralen, die geen anomale dispersie ondergaan, is nu wel is waar uiteenloopend bij verschillende stoffen; maar in een benaderingsrekening mogen wij wel stellen $R = 0{,}5$. Dan wordt ter hoogte van de kritische sfeer:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{0.5 \times 7 \times 10^{10}} = 0.29 \times 10^{-10},$$

(d. i. 50 maal kleiner dan het dichtheidsverval in onzen dampkring). Alle argumenten, die Schmidt's verklaring van den zonnerand steunen, spreken tevens ten gunste van deze schatting van het radiale dichtheidsverval in het gasmengsel.

Beschouwen wij thans stralen, die wèl anomale dispersie ondergaan. Opdat bijv. licht, behoorende tot de naaste omgeving der

[2]) Arrhenius. Lehrbuch der kosmischen Physik, S. 676.

natriumlijnen, zal schijnen te komen van punten, die enkele secunden boogs buiten den zonnerand liggen, behoeft de kromtestraal van zulke anomaal gebroken stralen slechts weinig kleiner te zijn dan 7×10^{10} c.m. Stellen wij bijv.

$$\varrho' = 6 \times 10^{10} \text{ c.m.}$$

Nemen wij verder aan, dat van de beschouwde lichtsoort de golflengte 0.4 Ångstr. eenheden grooter is dan die van D_1, dan is daarvoor, zooals men uit de waarnemingen van Wood en van Jewett kan afleiden (zie blz. 327), $R' = 1600$; voor het dichtheidsverval van den natriumdamp wordt dus gevonden:

$$\frac{d\Delta'}{ds} = \frac{1}{R'\varrho'} = \frac{1}{1600 \times 6 \times 10^{10}} = 0.0001 \times 10^{-10},$$

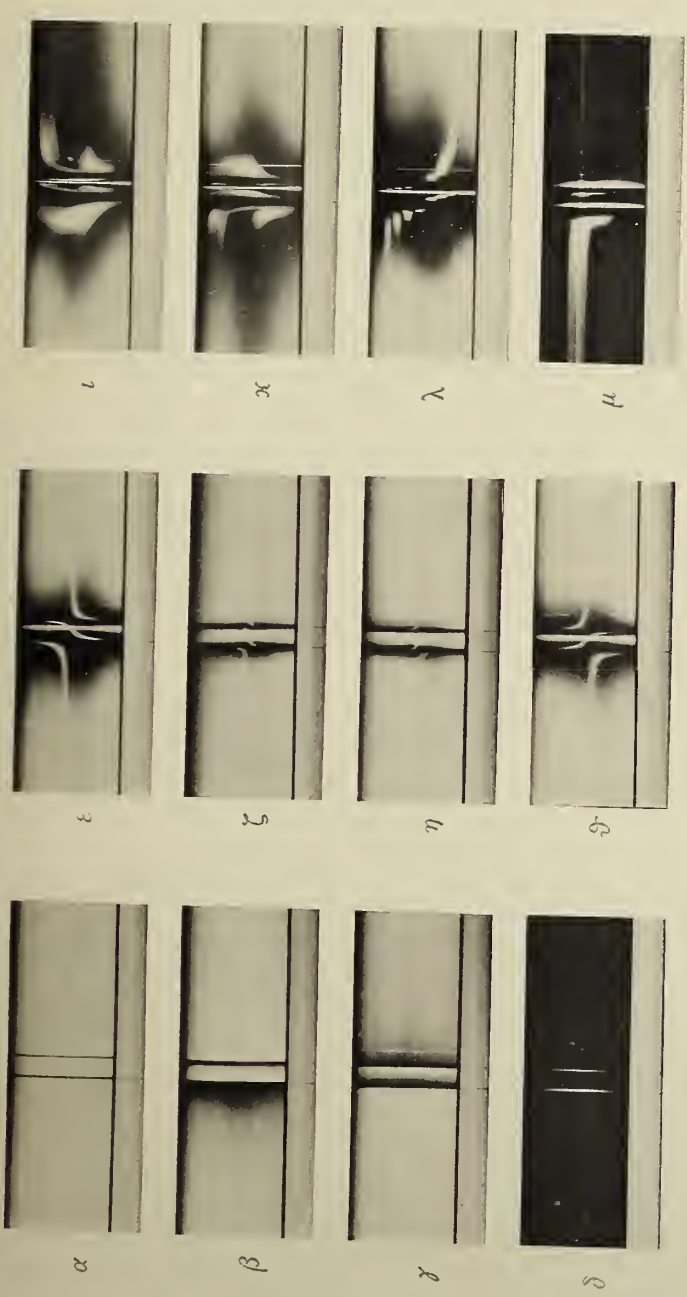
een grootheid, 2900 maal kleiner dan het dichtheidsverval van het gasmengsel.

Indien dus slechts $\frac{1}{3000}$ van het gasmengsel uit natriumdamp bestaat, zal reeds ten gevolge van het radiale dichtheidsverval de kritische sfeer omgeven schijnen door een „chromosfeer" van licht, dat bedriegelijk veel op natriumlicht gelijkt. De bedoelde lichtsoort heeft, om zoo te zeggen, zijn eigen kritische sfeer, die grooter is dan de kritische sfeer van het niet anomaal gebroken licht. Was het gehalte aan natrium grooter, dan zou de „natriumchromosfeer" dikker wezen.

Uit de grootte der chromosfeer- en flashsikkels, die bij een totale zonsverduistering worden waargenomen met de prismacamera, is men gewoon te besluiten tot de *hoogte*, waarop de verschillende dampen in de zonne-atmosfeer voorkomen. Dit is volgens onze beschouwingen een onjuiste gevolgtrekking. Men zal uit die waarnemingen daarentegen iets kunnen afleiden aangaande de *verhouding waarin deze stoffen in het gasmengsel vertegenwoordigd zijn*, wanneer men namelijk eerst in het laboratorium de dispersiekrommen der metaaldampen bij bekende dichtheden onderzocht zal hebben.

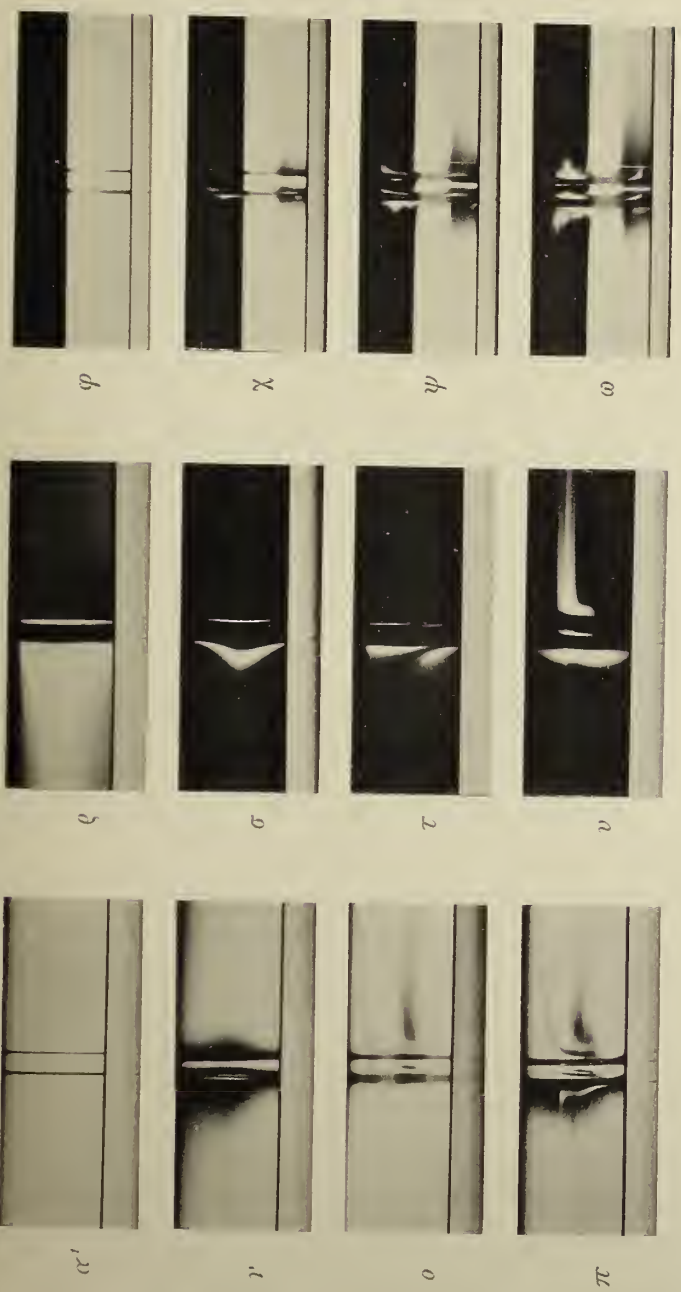
Tot nu toe spraken wij alleen van het normale, radiale dichtheidsverval. Door strooming en werveling ontstaan echter onregelmatigheden in de dichtheidsverdeeling met gradiënten van verschillende richting en grootte. En daar op de zon de resultante van zwaartekracht en stralingsdruk betrekkelijk klein is, kunnen aldaar, eerder dan op aarde, de onregelmatige dichtheidsgradiënten, wat hun grootte betreft, den radialen gradiënt nabijkomen of zelfs hier en daar overtreffen.

De straalkromming in die ongelijkmatigheden moet grillig gevormde natrium-protuberanties doen verschijnen, wier grootte mede afhan-



Verslagen der Afdeeling Natuurk. Dl. XV. A°. 1906/7

Heliotypie, Van Leer, Amsterdam.



Heliotypie, Van Leer, Amsterdam.

kelijk is van het gehalte aan natriumdamp in het gasmengsel.

Zoo bewijzen de groote waterstof- en calciumprotuberanties, dat er betrekkelijk veel waterstof en calciumdamp in de buitenste deelen der zon voorkomt; maar wellicht zou zelfs een gehalte van enkele procenten reeds voldoende zijn om van de verschijnselen rekenschap te geven. [1])

Als wij terecht hebben ondersteld dat niet-radiaal gerichte dichtheids-gradiënten in de zon veelvuldig voorkomen, en aldaar den algemeenen radialen gradiënt veel sterker storen dan zulks op aarde het geval is, moeten niet alleen stralen uit het randgebied, maar evenzeer stralen uit de overige deelen der zonneschijf merkbaar van den rechten weg afwijken. In hoofdzaak betreft dit natuurlijk de lichtsoorten die anomale dispersie ondergaan. *Elke absorptielijn van het zonnespectrum moet dus gehuld zijn in een dispersieband.*

Wel is waar vertoonen zich absorptielijnen van elementen, die slechts in uiterst verdunden toestand in het gasmengsel voorkomen, als nagenoeg scherpe lijnen, omdat voor die stoffen alle dichtheidsgradiënten veel kleiner zijn dan voor hoofdbestanddeelen, en dus de straalkromming van licht uit de omgeving dezer lijnen onmerkbaar wordt. Ook kunnen van elementen die wèl sterk vertegenwoordigd zijn, sommige lijnen zich toch scherp vertoonen, omdat niet alle lijnen van eenzelfde element, bij gegeven dichtheid, in gelijke mate anomale dispersie veroorzaken. Misschien zelfs zijn er absorptielijnen die onder geen omstandigheden tot dat verschijnsel aanleiding geven — hetgeen trouwens uit het oogpunt der lichttheorie minder waarschijnlijk mag worden geacht.

Hoe dit ook zij, de genoemde beperkingen brengen geen wijziging in de hoofdconclusie: dat onze blik op het zonnespectrum veranderd is. Wij zijn genoodzaakt, in de Fraunhofersche lijnen niet uitsluitend, met KIRCHHOFF, absorptielijnen, maar hoofdzakelijk dispersiebanden (of dispersielijnen) te zien. En dat ook op de lichtverdeeling in de sterrespectra de straalbreking een overwegenden invloed heeft, kan evenmin betwijfeld worden.

Wij moeten ons gewennen aan het denkbeeld dat in de nabijheid der hemellichamen de lichtstralen in het algemeen krom zijn, en dat dientengevolge in de gansche hemelruimte *ongelijkmatige stralingsvelden* [2]), verschillend van bouw voor de verschillende lichtsoorten, elkander doordringen.

[1]) Dit resultaat is vereenigbaar met een hypothese van SCHIMDT (Physikal. Zeitschr. 4, S. 282 und 341), volgens welke het hoofdbestanddeel van de zonne-atmosfeer een zeer licht, nog onbekend gas zou zijn.

[2]) „Das ungleichmässige Strahlungsfeld und die Dispersionsbanden." Physikal. Zeitschr. 6, S. 239—248 (1905).

Scheikunde. — De heer BAKHUIS ROOZEBOOM doet eene mededeeling over: *„Het gedrag der halogenen tegenover elkander."*

Hield de phasenleer in hare eerste periode zich meer bijzonder bezig met de beantwoording der vraag, of twee of meer stoffen in vasten toestand aanleiding geven tot chemische verbindingen of mengkristallen of wel onveranderd naast elkaar voorkomen, in den lateren tijd is zij begonnen uit de gedaante der smeltlijnen van de vaste mengsels gevolgtrekkingen af te leiden zoowel voor de natuur dier vaste als der vloeibare mengsels waarin zij overgaan, namelijk of en in hoeverre daarin ook verbindingen voorkomen.

Eveneens is dezelfde vraag te beantwoorden ten opzichte van vloeistof en damp uit de evenwichtslijnen voor die beide phasen, d. i. kooklijnen of dampdruklijnen.

Nu de 3 stelsels der meest bekende halogenen onderzocht zijn, laat zich hun onderling gedrag overzien.

Ten aanzien van het chloor en iodium was door STORTENBEKER reeds in 1888 bewezen dat geen andere verbindingen in vasten toestand voorkomen dan ICl_3 en ICl. Ook maakte hij reeds waarschijnlijk dat ICl bij smelting voor een zeer groot deel zonder dissociatie vloeibaar wordt, terwijl daarentegen ICl_3 bij smelting bijna geheel dissocieert in $ICl + Cl_2$.

Mej. KARSTEN vulde dit onderzoek nu aan door de bepaling der kooklijnen. Hieruit bleek dat de vloeistof- en de damplijn in de nabijheid der samenstelling ICl zoo uiterst dicht elkaar naderen, [1]) dat daaruit besloten moet worden, dat eveneens in den damp de dissociatie van ICl uiterst gering is, terwijl reeds bekend was dat die bij ICl_3 zeer groot is.

Uit het onderzoek van MEERUM TERWOGT in 1904 [2]) is nu verder gebleken dat Bromium en Jodium slecht ééne verbinding BrI vormen, welke in vasten toestand zoowel met Br als I mengkristallen vormt, en wegens de gedaante der dampdruk- en kooklijnen belangrijk in vloeistof- en damptoestand gedissocieerd is.

Eindelijk bleek nu uit een onderzoek van Mej. KARSTEN dat Chloor en Bromium enkel mengkristallen leveren bij afkoeling en wel eene aaneengesloten reeks, terwijl in overeenstemming hiermee uit de gedaante der kooklijn geenerlei aanwijzing voor het bestaan van verbinding in vloeistof of damp kon worden afgeleid.

Wij komen dus tot het besluit, dat ICl_3 eene zwakke en ICl eene

[1]) Nog dichter dan schematisch geteekend is in Fig. 7 bl. 505 dezer Verslagen Deel XIV.

[2]) Deze Verslagen XII. 361.

sterke verbinding is, IBr eene zwakke verbinding en dat tusschen Cl en Br geene verbinding bestaat. Het verbindingsstreven is dus het grootst bij de verst verwijderde elementen, en grooter bij Br+I dan bij Br+Cl.

Uit de onderzoekingen van MOISSAN en andere volgt, dat het Fluor de zelfs in damptoestand bestendige verbinding IF_5 levert, met Bromium BrF_3, met Chloor geene. Ook dit is met bovenstaand resultaat in harmonie.

Daar evenwel de verbindingen met Fluor niet van uit het standpunt der phasenleer bestudeerd zijn, bestaat hier nog geen voldoende zekerheid over hun aantal, noch over de bestendigheid van alle.

Graadmeting. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN geeft een kort verslag van het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering van de Internationale Graadmetingscommissie.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan van den Heer A. J. P. v. d. BROEK: *„Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren."*

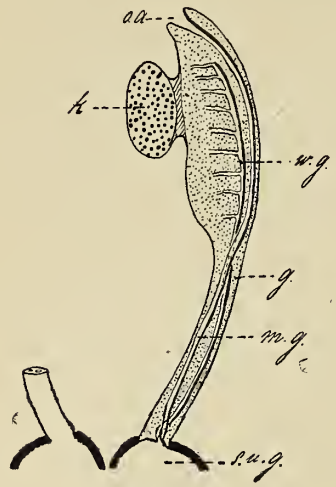
(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

In de volgende mededeeling zullen in het kort de veranderingen worden beschreven, die de kraniale einden der geslachtsgangen bij buideldieren gedurende de ontwikkeling ondergaan en hunne verhoudingen ten opzichte der geslachtsklier. In meer dan één opzicht wijkt het ontogenetische ontwikkelingsproces in dit gebied van datgene af hetwelk men bij andere zoogdieren waarneemt.

Het is voornamelijk een reeks van buideljongen van Dasyurus viverrinus in opeenvolgende ontwikkelingsstadiën waaraan de waarnemingen zijn ontleend. De preparaten van andere onderzochte vormen (Didelphys, Sminthopsis crassicaudata, Phascologale pincillata, Trichosurus vulpecula, Macropus ruficollis) stemmen echter volkomen overeen met de verhoudingen, bij Dasyurus aangetroffen.

Bij onze beschrijving gaan wij uit van een stadium, schematisch in Figuur 1 weergegeven, dat nog voor beide geslachten geldt. (Dasyurus, Didelphys, Macropus). De geslachtsklier (Figuur 1 *k*) ligt aan de mediale zijde der oernier en is met deze door een smallere weefselstrook ('t latere mesorchium of mesovarium) (Fig. 1 *m*) verbonden. De geslachtsgangen zijn in hunne geheele lengte ontwikkeld. De Wolff'sche gang (w. g.) verbindt zich in de oernier met transversale oernierkanaaltjes, doch bezit nog geen verbinding, op welke wijze ook, met de geslachtsklieren. De Müller'sche gang (Figuur 1 m. g.) begint met een ostium abdominale (o. a.) en ver-

loopt, voor zoover het 't gebied van de oernier geldt, aan de laterale zijde van den Wolff'schen gang.



Verhouding van geslachtsgangen en geslachtsklier in een indifferent stadium.

k. Kiemklier.
o.a. Ostium abdominale tubae.
g. Geslachtsstreng.
w.g. Wolff'sche gang.
m.g. Müller'sche gang.
s.u.g. Sinus uro-genitalis.

Fig. 1.

Vervolgen wij eerst de omvormingen die in het vrouwelijk geslacht optreden. De eerste verandering is eene reductie in het kraniale gedeelte van de oernier. Hierbij is niets waar te nemen dat op eene omvorming van oernierkanaaltjes door vernieuwing van het epitheel wijst. De Wolff'sche gang groeit intusschen kraniaal uit, blijft dicht bij den Müller'schen gang gelegen en begeeft zich dan, in een boogvormig verloop door het mesovarium heengaande, naar het ovarium, dringt in hetzelve in en eindigt er blind. (Figuur 2 w. g.). De toestand, die hierdoor ontstaat, heb ik in Figuur 2 weergegeven. (Dasyurus 40 m. m.).

Thans eerst begint de reductie van den Wolff'schen gang. Deze geschiedt zoodanig, dat het middengedeelte verdwijnt; zoowel aan het kraniale als aan het kaudale einde blijft een rest van den gang bestaan.

Het kraniale rudiment van den Wolff'schen gang wordt dan gevonden als een aan beide einden blind eindigend kanaaltje, dat in het ovarium begint en tot in het mesovarium te vervolgen is. Fig. 3 geeft dit kanaaltje, zooals ik het bij meerdere dieren vond, (Dasyurus, Sminthopsis) weer. (Fig. 3 w. g.)

In hoeverre deze rest van den Wolff'schen gang verband heeft met de kanaaltjes, die ik vroeger beschreef en afbeeldde in 't mesovarium van een volwassen Petrogale penicillata, blijve hier buiten bespreking[1]).

Bij het mannelijk geslacht vertoont de Wolff'sche gang in de

[1]) v. d. Broek, Untersuchungen über die weiblichen Geschlechtsorgane der Beuteltiere. Petrus Camper III.

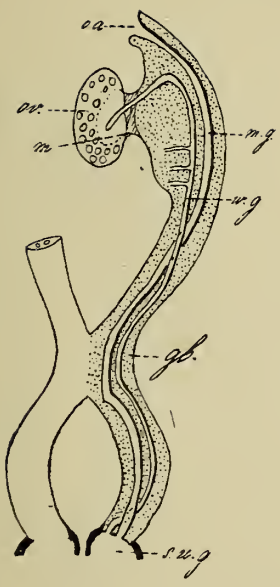


Fig. 2.

Verhouding van de geslachtsgangen tot het ovarium.

ov. Ovarium.
m. Mesovarium.
o. a. Ostium abdominale tubae.
m. g. Müller'sche gang.
w g. Wolff'sche gang.
gb. Dwarsverbinding der beide geslachtsstrengen.
s. u. g. Sinus uro-genitalis.

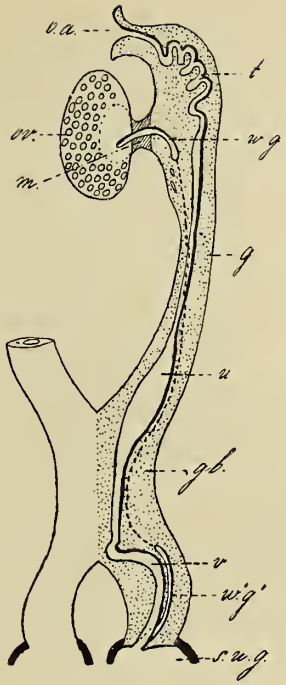


Fig. 3.

Verhouding van de geslachtsgangen tot het ovarium.

ov. Ovarium.
m. Mesovarium.
o. a. Ostium abdominale tubae.
t. Tuba Falloppii.
u. Uterus.
v. Vagina.
w.g.w'.g'. Resten v. d. Wolff'schen gang.
g. Geslachtsstreng.
gb. Dwarsverbinding der beide geslachtsstrengen.
s. u. g. Sinus uro-genitalis.

ontwikkeling van zijn kraniale einde, zeer veel overeenstemming met dien bij het vrouwelijk geslacht. (Fig. 4 en 5).

Tijdens de reductie van de oernier groeit 't kraniale einde van den Wolff'schen gang uit en verloopt boogvormig door het mesorchium in den testikel. (Fig. 4 w. g.). Hier komt op ééne enkele plaats (Dasyurus) eene verbinding tot stand met de, zich nog in het stadium van celstrengen bevindende, toekomstige zaadbuisjes.

De oernierkanaaltjes verdwijnen bijna geheel en al, zoodat op een bepaald stadium (Dasyurus viverrinus 53 m.m.) de sterk in de lengte gegroeide Wolff'sche gang gekronkeld door de weefselmassa ver-

loopt, die wij als epididymis moeten beschouwen, zonder dat van kanaaltjes in den vorm der coni vasculosi, iets aanwezig is.

Intusschen is de Müller'sche gang grootendeels gereduceerd. Het

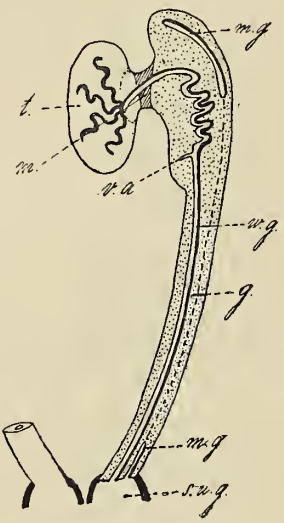


Fig. 4.

Verhouding van de geslachtsgangen tot den testikel.

t.	Testikel.
m.	Mesorchium.
m.g.	Rest van den Müller'schen gang.
w.g.	Wolff'sche gang (vas deferens).
g.	Geslachtsstreng.
s.u.g.	Sinus uro-genitalis.
v.a.	Vas aberrans.

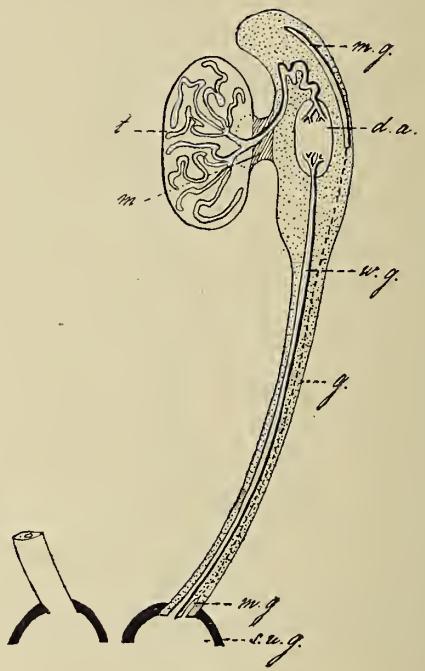


Fig. 5.

Verhouding van de geslachtsgangen tot den testikel

t.	Testikel.
m.	Mesorchium.
m.g.	Rest van den Müller'schen gang.
d.a.	Kliergedeelte in den epididymis.
w.g.	Wolff'sche gang (vas deferens).
g.	Geslachtsstreng.
s u.g.	Sinus uro-genitalis.

kraniale einde is blijven bestaan als een al of niet met een ostium abdominale aanvangende gangrest, die in 't epididymisweefsel kaudaal een blind einde heeft.

De hierop volgende veranderingen bestaan daarin, dat de zaadbuisjes een lumen verkrijgen en zich op één of twee (Didelphys) plaatsen verbinden met den in den testikel ingegroeiden Wolff'schen gang. In den epididymis is intusschen in het verloop van den Wolff'schen gang (Vas epididymidis) eene massa van celstrengen opgetreden (Fig. 5 d. a.), waaruit zich de kanaaltjes der epididymis zullen ontwikkelen.

Van den Müller'schen gang is een rest gebleven in het weefsel

van den epidydimis, resten van dezen gang in den vorm van hydatiden heb ik niet waargenomen. Ook in de literatuur vind ik ze niet vermeld.

Bij de geslachtsklier van het volwassen dier vond ik de verbinding van testikel en epididymis gevormd door een mesorchium waarin blijkbaar slechts een enkel kanaal de communicatie tusschen de beide deelen vormde. (Didelphys Halmaturus). Waarschijnlijk geldt ook hetzelfde voor Hypsiprymnus waar, volgens DISSELHORST [1]), de epididymis eene spoelvormige aanzwelling in het verloop van het vas deferens is.

Omtrent den mikroskopischen bouw van testikel en epididymis vind ik bij DISSELHORST de mededeeling dat deze overeenkomt met die van andere dieren. Waar hierop oogenblikkelijk volgt: „die Spermatogenese war in vollem Gange", schijnt het mij dat deze mededeeling meer betrekking heeft op den bouw der kanaalepitheliën dan wel op den aard der verbinding van testikel en epididymis.

Eene vergelijking met wat wij bij andere zoogdieren aantreffen, leert ons het volgende.

In het vrouwelijk geslacht komt nu en dan (althans bij den mensch) eene uitgroeiing tot stand van het kraniale einde van den Wolff'schen gang, die dan leidt tot het, door ROTH [2]) het eerst beschreven en door MIHALKOVICS [3]) als gedeelte van den Wolff'schen gang herkende, tubo-parovariaalkanaal. Waar echter bij Marsupialiers de Wolff'sche gang tot in de geslachtsklier indringt, blijft het tubo-parovariaalkanaal van den mensch tusschen de beide bladen van het Ligamentum latum.

Van het mannelijk geslacht geldt het volgende.

Een rete testis, hetzij men dit heeft op te vatten als eerst later opgetreden, op de tubuli seminiferi gelijkende kanaaltjes (COERT)[4]), of als homologa van de mergstrengen van 't ovarium (MIHALKOVICS), of als ingegroeide oernierkanaaltjes (KOLLMANN) [5]), wordt bij de buideldieren niet aangetroffen. Ontstaat gedurende de verdere ontwikkeling een op 't rete testis gelijkend netwerk in den Marsupialier testikel,

---

[1]) R. DISSELHORST. Die männlichen Geschlechtsorgane der Monotremen und einiger Marsupialen.

SEMON's Zoölogische Forschungsreisen in Australiën und dem Malayischen Archipel. 1904. p. 121.

[2]) Geciteerd naar MIHALKOVICS.

[3]) MIHALKOVICS, Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte der Uro-genitalorgane der Cranioten.

Internat. Zeitschrift für Anatomie und Histologie. Bd. 2.

[4]) COERT, Over de ontwikkeling der geslachtsklier bij de zoogdieren. Diss. Leiden 1898.

[5]) KOLLMANN, Lehrbuch der Entwickelungsgeschichte des Menschen.

dan moet dit als een geheel en al secundair optredend gedeelte worden beschouwd.

De verbinding van testikel en epididymis komt niet tot stand door een aantal tot vasa efferentia vervormde oernierkanaaltjes doch door een enkel, als gedeelte van den Wolff'schen gang te beschouwen kanaal. Naast de mannelijke dieren kunnen voor de opvatting, dat het verbindende kanaal werkelijk de Wolff'sche gang is, de ontwikkelingsverschijnselen in het vrouwelijk geslacht worden aangevoerd. Alle oernierkanaaltjes gaan bij de buideldieren te gronde, tot op minimale resten na (vasa aberrantia). In de weefselmassa, die de zoogenaamde epididymis dezer dieren voorstelt, ontstaat bij buideldieren secundair een groot aantal buisjes, die later als epididymiskanaaltjes waarschijnlijk dezelfde functie bezitten als de coni vasculosi in den epididymis der overige zoogdieren.

Ter verklaring van de oorzaak der van de monodelphe zoogdieren afwijkende verhoudingen der geslachtsgangen ten opzichte van de geslachtsklier bij buideldieren schijnen mij de volgende overwegingen niet van belang ontbloot.

Omtrent de omvormingen, die de oernier ondergaat, door hare verbinding met den testis, welke verbinding de latere vasa efferentia testis leveren, lezen we in de uitgebreide onderzoekingen van Coert [1]) 't volgende: „In het proximale gedeelte van 't Wolff'sche lichaam waar de Malpighi'sche lichaampjes met 't reteblasteem verbonden zijn, ziet men de glomeruli met het binnenste kapselepithelium allengs verdwijnen, waarna de buitenste kapselwanden de blinde uiteinden der oernierkanaaltjes vormen. Ook het epithelium der oernierkanaaltjes begint er anders uit te zien. Tweeërlei processen komen hier naast elkaar voor: een massa epitheliumcellen worden in het lumen uitgestooten en gaan te gronde, terwijl aan den anderen kant vele nieuwe cellen worden aangemaakt (mitosen). Daarbij nemen de cellen een ander voorkomen aan, zoowel wat de kern als het protoplasma betreft. Het gevolg is, dat de oernierbuisjes ten slotte met een, wat vroeger niet het geval was, over de geheele uitgestrektheid gelijkvormig epithelium zijn bekleed, opgebouwd uit cylindercellen, de kernen regelmatig aan den basis gerangschikt. Of de verbinding dezer buisjes met den Wolff'schen gang gedurende die veranderingen steeds ongewijzigd bestaan blijft of wellicht wordt opgeheven en later op een ander punt weer opnieuw tot stand komt, heb ik niet kunnen waarnemen."

Deze waarnemingen wijzen er m. i. op dat men de vasa efferentia

---

[1]) l.c. pag. 96.

testis niet heeft op te vatten als eenvoudige oernierkanaaltjes, doch als nieuw gevormde kanalen, die geheel of grootendeels den weg gebruiken, hen door de oernierkanaaltjes gegeven. En dat zij dezen weg kunnen gebruiken vindt zijn oorzaak daarin dat, volgens Felix en Bühler [1]) van een functioneeren van de oernier bij monodelphe zoogdieren, zelfs bij 't varken, waar ze zoo sterk ontwikkeld is, hoogstwaarschijnlijk geen sprake is.

Niet aldus bij de didelphe zoogdieren. Hier functioneert zooals bekend, de oernier niet alleen embryonaal, doch nog gedurende de eerste periode van het individueele leven. Eene scheiding der oernier in twee deelen zooals die bij reptiliën wordt aangetroffen komt daarbij niet tot stand.

De verbinding van de geslachtsklier, speciaal van den testikel, met haar uitvoergang, den Wolff'schen gang kon nu, zoo kan men veronderstellen, in het stadium, waarop bij andere dieren deze verbinding pleegt op te treden, bij de buideldieren niet met behulp van oernierkanaaltjes tot stand komen omdat deze nog hunne excretorische functie hadden te vervullen.

In de plaats hiervan zou dan de verbinding op die wijze tot stand komen dat de Wolff'sche gang kraniaalwaarts uitgroeide en zelf de verbinding tusschen de klier en haar uitvoerbuis tot stand bracht.

Men zou dan eindelijk de kanalen, die geheel secundair en onafhankelijk van oernierkanalen in het weefsel van den epididymis optreden, op gelijke wijze kunnen verklaren, n.l. als de kanalen die dezelfde beteekenis hebben als de coni vasculosi, maar nu, om dezelfde reden, niet ontstaan op den bodem van oernierkanaaltjes, doch zoowel plaatselijk als tijdelijk daarvan gescheiden.

Eene andere beschouwingswijze zou deze zijn, dat het in de kiemklier inwoekerend kanaaltje niet zijn zoude de Wolff'sche gang, doch het meest kraniale oernierkanaaltje, zoodat met andere woorden het zoogenaamde sexueele deel van de oernier bij de buideldieren gereduceerd zou zijn. Ik geloof niet dat deze zienswijze juist is, ten eerste omdat er geen grens tusschen beide kanalen waar te nemen is, en ten tweede omdat bij de reductie der oernier, zooals boven is gezegd, bij de buideldieren, zoover mijne preparaten reiken, niets waar te nemen is van verschillen tusschen de oernierkanaaltjes onderling, wat bij eene omvorming van oernierkanaaltje tot verbindende gang toch wel het geval zou moeten zijn.

---

[1]) Félix und Bühler, Die Entwickelung der Harn und Geschlechtsorgane in Hertwig's Handbuch der vergleichenden und experimentellen Entwickelungsgeschichte der Wirbeltiere.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan namens Dr. W. A. VERSLUYS: *„Tweede mededeeling over de Plückersche Equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme."*

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

§ 1. Indien de oorsprong der coördinaten een cyclisch punt (n, r, m) eener ruimtekromme C is dan kunnen de coördinaten van een punt van C, gelegen in de nabijheid van den oorsprong, op een tak gaande door den oorsprong, voorgesteld worden als volgt:

$$x = a\,t^n,$$
$$y = b_0\,t^{n+r} + b_1\,t^{n+r+1} + b_2\,t^{n+r+2} + \text{enz.},$$
$$z = c_0\,t^{n+r+m} + c_1\,t^{n+r+m+1} + c_2\,t^{n+r+m+2} + \text{enz.}$$

Zij q_1 de grootste gemeene deeler van n en r, q_2 die van r en m, q_3 die van m en $n + r$ en q_4 die van n en $r + m$.

Indien $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$, dan hangen de Plückersche equivalenten alleen af van n, r en m. In een vorige mededeeling [1]) gaf ik de Plückersche equivalenten voor dit bijzondere geval [2]).

§ 2. Indien de 4, G. G. Deelers q niet allen één zijn dan hangen de Plückersche équivalenten van het cyclische punt (n, r, m) af van de waarden der coëfficienten b en c, even als, in 't algemeen, voor een cyclisch punt eener vlaktekromme gegeven door de ontwikkelingen:

$$x = t^n,$$
$$y = t^{n+m} + d_1\,t^{n+m+1} + d_2\,t^{n+m+2} + \text{enz.},$$

het al of niet nul zijn van de coëfficienten d invloed heeft op het aantal knooppunten en dubbelraaklijnen equivalent met het cyclisch punt (n, m) [3]).

Indien de coëfficienten c en b niet nul zijn en er tusschen deze coëfficienten geen bijzondere betrekkingen bestaan en als bovendien n, r en m grooter zijn dan één, dan is het cyclisch punt (n, r, m) equivalent met

$$n - 1 \text{ stationnaire punten } \beta \text{ en met}$$
$$\{(n-1)(n+r-3) + q_1 - 1\} : 2 \text{ knooppunten } H.$$

---

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 25 Nov. 1905.

[2]) De afleiding dezer equivalenten is, onder meer, te vinden in mijn verhandeling: *„Points sing. des courbes gauches données par les équations: $x = t^n$, $y = t^{n+r}$, $z = t^{n+r+m}$,"* opgenomen in *„Archives du Musée Teyler"*, série II, t. X, 1906.

[3]) A. BRILL und M. NOETHER. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen functionen, p. 400. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, III, 1892—93.

Het osculatievlak der kromme C in het cyclisch punt (n, r, m) is equivalent met

$$m - 1 \text{ stationnaire vlakken } \alpha \text{ en met}$$
$$\{(m-1)(r+m-3) + q_2 - 1\} : 2 \text{ dubbelvlakken } G.$$

De raaklijn der kromme C in het cyclisch punt (n, r, m) is equivalent met

$$r - 1 \text{ stationnaire raaklijnen } \theta, \text{ met}$$
$$\{(r-1)(n+r-3) + q_1 - 1\} : 2 \text{ dubbelraaklijnen } \omega \text{ en met}$$
$$\{(r-1)(r+m-3) + q_2 - 1\} : 2 \text{ dubbelbeschrijvenden } \omega' \text{ van het ontwikkelbaar regelvlak } O \text{ dat gevormd wordt door de raaklijnen van de kromme } C.$$

§ 3. Het cyclisch punt (n, r, m) van de kromme C is een $n + r$-voudig punt op het ontwikkelbaar regelvlak O waarvan C is de keerkromme.

Het cyclisch punt (n, r, m) telt voor

$$(n + r - 2)(n + r + m)$$

snijpunten van de keerkromme C met het tweede pooloppervlak van O voor een willekeurig punt.

Door het cyclisch punt (n, r, m) van de keerkromme C gaan

$$\{n(n + 2r + m - 4) + q_3 - q_2\} : 2$$

takken van de op het ontwikkelbaar regelvlak O gelegen knoopkromme.

Al deze nodale takken raken in het cyclisch punt (n, r, m) aan de raaklijn van de keerkromme C (de x-as).

Zij hebben met deze gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt

$$\{(n + r)(n + 2r + m - 4) + q_4 - q_2\} : 2$$

punten gemeen.

De door het cyclisch punt (n, r, m) gaande nodale takken hebben alle in dit punt tot osculatievlak het osculatievlak $z = 0$ der keerkromme C.

Deze nodale takken hebben met hun osculatievlak $z = 0$ in het cyclisch punt (n, r, m)

$$\{(n + r + m)(n + 2r + m - 4) + q_1 - q_2\} : 2$$

punten gemeen.

§ 4. Het voorbeeld van een gewoon stationnair vlak α, waarvan het raakpunt een cyclisch punt $(1, 1, 2)$ is, toont aan, dat er door een cyclisch punt takken der knoopkromme kunnen gaan welke in dit punt niet aan de keerkromme raken.

Deze snijdende nodale takken komen slechts voor indien $q_3 > 1$. Is $r > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen. Is $r = 1$ dan gaan door het cyclisch punt (n, r, m) der keerkromme, of $q_3 : 2$, of $(q_3 - 1) : 2$ dezer nodale snijdende takken. Alle snijdende nodale takken bezitten een gemeenschappelijke raaklijn gelegen in het vlak $z = 0$, zoowel voor $r = 1$ als voor $r > 1$.

§ 5. Het voorbeeld van een gewoon stationnair punt β $(2, 1, 1)$ toont aan, dat door een cyclisch punt van de keerkromme, nodale takken kunnen gaan, welke dezelfde raaklijn maar niet hetzelfde osculatievlak bezitten als de keerkromme. Deze bijzondere nodale takken komen slechts voor indien $q_4 > 1$. Is $q_4 > 1$ en $m = 1$ dan komen deze bijzondere nodale takken steeds voor. Is $q_4 > 1$ en ook $m > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen. Deze bijzondere nodale takken hebben in het cyclisch punt (n, r, m) een gemeenschappelijk osculatievlak (verschillend van het vlak $z = 0$).

§ 6. De raaklijn aan C in het cyclisch punt (n, r, m) is een r-voudige beschrijvende g op het ontwikkelbaar regelvlak O. De r bladen van het oppervlak O welke door de beschrijvende g gaan raken alle aan het osculatievlak $z = 0$ van C in het punt (n, r, m).

De beschrijvende g ontmoet nog in $\varrho - (n + 2r + m)$ punten R een blad van het oppervlak O, als O is van den graad ϱ.

In ieder punt R ontmoet g r takken van de knoopkromme. Deze r takken vormen, indien $m > r$ een singulariteit $(r, r, m - r)$ en het osculatievlak van deze nodale takken is het raakvlak van O langs g.

Indien $m < r$ vormen deze r nodale takken een singulariteit $(r, m, r - m)$ en het osculatievlak dezer r nodale takken is het raakvlak van O langs de g in R snijdende beschrijvende.

Indien $r = m$ vormen deze r nodale takken een singulariteit $(r, r, 1)$.

§ 7. In 't algemeen zal de singuliere beschrijvende g alleen nodale takken ontmoeten in het cyclisch punt (n, r, m) en in de punten R. Indien $q_2 > 1$ dan kan het gebeuren dat g nog ontmoet nodale takken, die ontstaan, doordat eenige der r bladen, die elkaar volgens g raken, elkaar doordringen. Deze nodale takken ontmoeten g in het zelfde punt Q. Is $q_2 > 1$ en $n = 1$ dan bestaat er altijd een zoodanig ontmoetingspunt Q. Is $q_2 > 1$ en $n > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen, willen de bladen die door g gaan elkaar doordringen.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt namens den Heer F. M. JAEGER eene mededeeling aan: *„Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt".*

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT.)

§ 1. De verbinding, welke de hoogst merkwaardige verschijnselen vertoont, die hier beschreven worden, is het *cholesteryl-cinnamylaat:* $C_{27} H_{45}. O_2 C. CH : CH. C_6 H_5$.

Ik heb dit lichaam bereid, door samensmelten van gelijke hoeveelheden zuiver cholesterine en cinnamylchloride in een kolfje, dat circa twee uren lang in een oliebad op 190° C. verhit werd. Het is van 't grootste belang, de temperatuur niet hooger op te voeren, en de verhitting zoo kort mogelijk te laten plaats hebben, aangezien de zich nu toch al geleidelijk donker kleurende smelt, anders in plaats van 't gewenschte derivaat, eene bruine, in oplossing groen fluoresceerende hars levert.

Men lost de vastgeworden reaktie-massa in kokenden aether op, voegt bij de bruine vloeistof beenderkool, en kookt gedurende een uur aan een terugvloeikoeler. Vervolgens wordt bij de afgefiltreerde vloeistof, zóóveel op 40° C. verwarmde absolute alkohol gevoegd, tot er eene troebeling ontstaat. Dan laat men alles eenige uren staan, waardoor zich, bijna witte, kleine glinsterende blaadjes van den ester afzetten. Men zuigt deze af, wascht na met weinig aether en alkohol, en kristalliseert 't produkt meermalen uit kokend aethylacetaat om, waarbij men telkenmale 't grootste deel der opgeloste stof, door toevoeging van alkohol kan precipiteeren.

De zuivere, volkomen kleurlooze, schoon gekristalliseerde verbinding vertoont onder het mikroskoop geen heterogene bestandeelen.

§ 2. De volgende proefnemingen werden op de gebruikelijke wijze verricht; de stof bevond zich in kleine, dunwandige reageerbuisjes, terwijl de thermometer in de vloeistof geplaatst was, en de gesmolten massa het kwikreservoir geheel en al omhulde. De temperatuur van het olie-bad, werd, onder roeren, gradueel opgevoerd, en thans het volgende waargenomen:

Bij 151° C. [1]) ongeveer begint de vaste massa week te worden,

[1]) BONDZYNSKI en HUMNICKI beschrijven in Z. f. physiol. Chemie, **22**, 396, (1896), een cinnamylaat, dat in oplosbaarheid, enz. met het mijne overeenkomt, doch met eene smelttemperatuur van 149° C. Deze is blijkbaar identisch met mijne 1e overgangstemperatuur.

terwijl zich aan de randen hier en daar schitterende kleuren gaan vertoonen, voornamelijk groen en violet, bij doorvallend licht de komplementaire kleuren rood en geel. Bij 157° ongeveer is de massa dik-vloeibaar en sterk dubbelbrekend; de grondtoon der fase is oranjerood, terwijl bij 't roeren met den thermometer overal de vloeibare kristallen zich aaneenrijen tot schitterend mei-groene slieren. Later heb ik door konstruktie der afkoelingskromme, de temperatuur *t*, waarbij de stof vast wordt op 155°8 C. scherp bepaald; de knik in de kurve is duidelijk, aangezien het warmte-effekt relatief groot is, en de onderkoeling werd tegengegaan doer enting met een vast deeltje van den ester.

De kleur der vloeibare fase wordt nu bij verdere verwarming weinig veranderd; daarentegen wordt hare konsistentie geleidelijk meer en meer dun-vloeibaar. Bij 199°5 C. is ze bijna kleurloos, en men zou meenen, dat ze nu wel dadelijk helder zal worden.

Doch dan wordt bij die temperatuur de massa opeens emaillewit en snel dik-vloeibaar, terwijl ze nog sterk dubbelbrekend blijft. Men neemt nu duidelijk eene ontmenging waar in twee vloeistoflagen, die hier beide anisotroop zijn. De interferentiekleuren zijn thans geheel verdwenen. Daarop wordt bij langzame verwarming, de vloeistof-fase bij 201.°3 C. isotroop, en volkomen helder. De isotrope smelt is kleurloos.

Bij afkoeling treden de volgende verschijnselen op: Bij 200° C. ongeveer wordt de isotrope vloestof troebel, bij 198° C. bereikt de dubbelbrekende massa hare grootste viskositeit; bij 196° C. is ze al weer dunner vloeibaar geworden, doch nù wordt ze, bij 190° C. ongeveer, weer dikker van konsistentie, terwijl ook het geheele aanzien der fase zeer opvallend verandert, ofschoon ze dubbelbrekend blijft. Daarna schijnt ze gradueel in de groen en rood gekleurde, dubbelbrekende vloeistoffase van straks over te gaan, welke, als men door enting de onderkoeling tegengaat, bij 155°.8 C. stolt.

Wanneer men de vaste stof onder het kristallisatie-mikroskoop van LEHMANN smelt, dan kan men, even vóór 't vastworden, nòg eene vloeistoffase waarnemen, welke ik voor verschillend moet houden van de als 't eerst optredende, zoo even beschrevene fase. Zij schijnt labiel te zijn met betrekking tot de vaste stof, en toont veel overeenkomst, met den grauwen zoom, welke men bij het caprinaat waarneemt.

Evenzoo meen ik te moeten besluiten, dat de *alleen* bij afkoeling optredende vloeistoffase ($t = \pm 190°$) *labiel* is ten opzichte der drie anderen, zoodat er hier *drie stabiele* en *twee labiele* vloeibare fasen zouden kunnen optreden. Zeer merkwaardig is 't, dat de

overgangen van de twee stabiele anisotrope fasen in de tusschengelegene labielere, bij voorzichtig werken geheel en al kontinu schijnen; de viskositeit schijnt gradueel in die der stabiele fasen over te gaan. Opmerkelijk is ook de onmogelijkheid, om de overgangstemperaturen bij stijgende òf bij dalende temperatuur van het buitenbad exact hetzelfde te vinden. Steeds slingeren de verkregen waarden voor de begin-, en eindtemperatuur van elk fase-trajekt binnen enge grenzen. Hetzelfde is 't geval, als men de vaste stof opsmeltend, het punt wil bepalen, waarbij de eerste weekheid der massa gaat optreden: ook dáár slingert men bij de temperatuur-vaststelling binnen intervallen als b.v. 147°—156° C. Het geheele verloop der afkoeling van isotroop-vloeibaar tot vast, gelijkt hier in hooge mate op een proces, waarbij tusschen de verschillende stadiën een kontinuë overgang bestaat. Vooral is 't, alsof de twee labiele fasen ieder uit eene geheele reeks van labiele toestanden zijn saamgesteld, die achtereenvolgens optreden om den band te vormen, eenerzijds tusschen vast en vloeibaar-anisotroop, anderzijds tusschen anisotroop-, en isotroop-vloeibaar. Het geheel toont veel overeenkomst met eene gradueele dissociatie en associatie tusschen minder of meerder samengestelde molekuul-komplexen. Het is zeer wel mogelijk, dat de overgangen vast-vloeibaar, in stede van *plotseling*, juist *kontinu* verloopen, waarbij eene ononderbroken serie van labiele, en bij de meeste stoffen niet realiseerbare tusschentoestanden wordt doorloopen, onder welke tusschentoestanden dan enkele somtijds vast te houden zijn bij diè stoffen, welke als deze cholesteryl-esters, het fenomeen der dubbelbrekende vloeistoftoestanden plegen te vertoonen. Een en ander dringt zich aan den onderzoeker van zelf als waarschijnlijk op, vooral nu toch bewezen werd, dat bij mijne overige cholesteryl-esters, zelfs bij het caprinaat, *beide* of één der beide anisotrope vloeistoffasen steeds labiel en alleen bij onderkoeling realiseerbaar waren; ja, dat zelfs enkele hunner, zooals cholesteryl-isobutyraat, niet in zuiveren toestand, maar alleen door sommige bijmengselen, de hun toekomende labiele anisotrope vloeistoffasen vermogen te vertoonen. Met het denkbeeld eener gradueele dissociatie van samengestelde molekuul-komplexen in meer eenvoudige, is ook 't feit in overeenstemming, dat men de anisotroop-vloeibare fasen nog nooit heeft zien optreden, *na* de isotrope: steeds is deze het slotverschijnsel, wat dan daarin moet gezocht worden, dat eene dissociatie van dezen aard immer met stijgende temperatuur pleegt toe te nemen.

Dat ook bij afkoeling tusschen vast en anisotroop-vloeibaar niet alles zoo bruusk gaat, als het groote kalorische effekt zou doen vermoeden, blijkt bij het cholesteryl-cinnamylaat daaruit, dat na stolling hier en daar tusschen de vaste massa, vooral aan de wanden der

smeltbuisjes, de interferentiekleuren, welke voor den overgang der fasen in elkaar karakteristiek zijn, nog zeer langen tijd, soms vele uren achtereen zichtbaar blijven, om dàn eerst langzaam te verdwijnen. Ook bij sterke vergrooting kan men in deze kleurige deelen geen goedbegrensde kristalletjes ontdekken: 't geheel maakt meer den indruk van een dubbelbrekend, regelloos netwerk, van vast geworden vloeistofdruppeltjes, zooals zich ook de vloeibare kristallen zelve bij sterke vergrooting aan 't oog voordoen. [1])

Van zelf dringt zich hier de gedachte dan ook op, om in deze nog zoo raadselachtige verschijnselen te zien: de min of meer labiele, en gedeeltelijk gerealiseerde tusschenstadiën bij een kontinuën overgang vloeibaar $\leftrightarrows$ vast. Het door LEHMANN geopperde denkbeeld, dat er een onderscheid tusschen de molekuulsoorten in de verschillende aggregaattoestanden zou aanwezig zijn, wordt dan bij deze beschouwingen geadopteerd met dit verschil, dat zulk eene verscheidenheid van associatie der molekulen alleszins vereenigbaar wordt geacht met het verschijnsel van de *kontinuïteit* tusschen de hier te sprake komende aggregatie-toestanden.

§ 3. Ten slotte wil ik nog opmerken, dat het cholesteryl-cinnamylaat bij veelvuldige herhaling dezer smeltproeven, al spoedig eene geringe, en allengs stijgende ontleding ondergaat, welke zich in geelkleuring der stof, en in kleine veranderingen der karakteristieke temperatuurgrenzen openbaart.

Zaandam, 26 Oct 1906.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 95ª uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer."* (Naschrift).

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

---

[1]) Een nòg veel duidelijker geval van dezen overgang is thans door mij gevonden bij 't *cholesteryl-pelargonaat*, waarover ik binnen kort eene mededeeling zal doen.

Natuurkunde. — De Secretaris biedt aan Mededeeling N°. 95^e uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer".*

(Aangeboden in de vergadering van 29 September 1905).

§ 1. *Inleiding.*

Terwijl van de uitkomsten van bepalingen van lage temperaturen, verricht met den in Med. N°. 27 (Juni 1896) beschreven en in Med. N°. 60 (Juni 1900) nader behandelden waterstofthermometer, reeds herhaaldelijk gebruik is gemaakt, zijn omtrent die bepalingen zelve nog geen nadere bijzonderheden medegedeeld. Wij geven die thans in aansluiting aan eene in 1905 en 1906 verrichte reeks van waarnemingen. Deze hebben gediend voor de in Med. N°s 95^a en 95^c beschreven onderzoekingen en verder voor bepalingen van isothermen van waterstof bij lage temperaturen, over welke eene volgende Mededeeling zal handelen. Zij strekken zich uit over het geheele thans toegankelijke gebied der lagere temperaturen, daar zij ook metingen in vloeibare waterstof omvatten. Alle in vroegere jaren noodig gebleken voorzorgen zijn er bij genomen. De temperatuur van het bad, waarin de thermometer gedompeld werd, kon bij alle temperaturen tot op 0°.01 standvastig gehouden worden. Zoo was te verwachten, dat de bij het inrichten der thermometers beoogde nauwkeurigheid en vertrouwbaarheid vrijwel bereikt zou worden [1]). In hoeverre dit inderdaad het geval is, laten de volgende gegevens beoordeelen.

§ 2. *Inrichting van den thermometer.*

Aan Med. N°. 60 is weinig toe te voegen. De staalcapillair, welke thermometerbol en manometer verbindt, werd tegen knikken beveiligd door een staaldraad er langs aan te brengen, welke aan de uiteinden is gesoldeerd aan koperen kapjes, die op de staalstukken *c* en *e* (Pl. II, Med. N°. 27) aan het eind der capillair kunnen worden geschoven. De afmetingen van het thermometerreservoir van Med. N°. 60 (80 c.M^3.) leverden bij onze metingen geen bezwaar op, daar het bad in de cryostaten (zie Med. N°s. 83, 94^c, 94^d en 94^f), behalve voor den thermometer en andere meettoestellen, ruimte genoeg aanbood voor den roertoestel, die zoo afdoende werkte, dat althans met

[1]) Een uitgewerkt voorbeeld van de bepaling van zeer lage temperaturen met den waterstofthermometer ontbrak tot nog toe in de literatuur. In het volgende is zulk een voorbeeld bevat.

het thermoelement[1]) een ongelijkmatigheid van temperatuur niet was aan te toonen[2]). De doorsnede van de glascapillair, die den steel van den thermometer vormt, was 0.0788 m.M^2. Met het oog op de temperatuurcorrectie (zie § 4, slot) is het wenschelijk dat zij klein is. Zoowel door berekening als door waarneming[3]) blijkt, dat het drukevenwicht van schadelijke ruimte en reservoir bij deze afmeting van de capillair[4]) nog zeer snel bereikt wordt, veel sneller dan het evenwicht van het kwik in de beide beenen van den manometer, wat o. a. bevestigd wordt door de snelheid, met welke de thermometer schommelingen in de temperatuur van het bad volgt[5]).

De bepaling van den druk, onder welke het gas staat, kan, wanneer het de bepaling van zeer lage temperaturen geldt, vereenvoudigd en bespoedigd worden door naar het voorbeeld van CHAPPUIS[6]) de manometerbuis tevens als barometerbuis te doen dienen. De wijziging tot dit doel in de inrichting volgens Med. N°. 60 Pl. VI aangebracht, wordt aangegeven door Pl. I, welke een deel van Pl. VI bij Med. N°. 60 dient te vervangen. De thermometer (a, b, c, d, e, h, k) is door een caoutchoucslang en T-stuk l_0 verbonden eenerzijds met den manometer l_1, aan welken men (zie Pl. VI Med. N°. 60) bij m_1 het reservoir op standvastige temperatuur en bij m_2 den barometer aansluit, anderzijds met de barometerbuis (n_0, n_1 (luchtvanger), n_2). De druk kan nu, behalve door den manometer en den bij m_2 aangesloten barometer, ook onmiddellijk door het niveauverschil van het kwik in n_2 en in g afgelezen worden. Bij de in deze Med. behandelde bepalingen is van dit hulpmiddel nog geen partij getrokken.

§ 3. *De waterstof.*

De vulling is op tweeërlei wijze geschied:

[1]) Een weerstandsthermometer is gevoeliger (vergelijk Med. Nos. 95^a en 95^c). Zoodra een van doelmatige afmeting gereed is, zal daarmede de proef worden herhaald.

[2]) TRAVERS, SENTER en JAQUEROD, (Phil. Trans. Series A, Vol. 200, Part. II, § 6) bij wier metingen het houden van den thermometer op een standvastige temperatuur meer bezwaren opleverde, moesten aan een kleiner reservoir de voorkeur geven.

[3]) Berekening leert, dat voor het tot stand komen van een drukvereffening van 1 c.M. tot 0.01 m.M., het door de capillair stroomende gas 0.1 sec. noodig heeft, het kwik in den manometer 4 sec. Proefneming geeft voor dezen tijd 25 sec. Dit grootere bedrag zal aan den invloed van de vernauwing bij de glazen kraan k moeten worden toegeschreven.

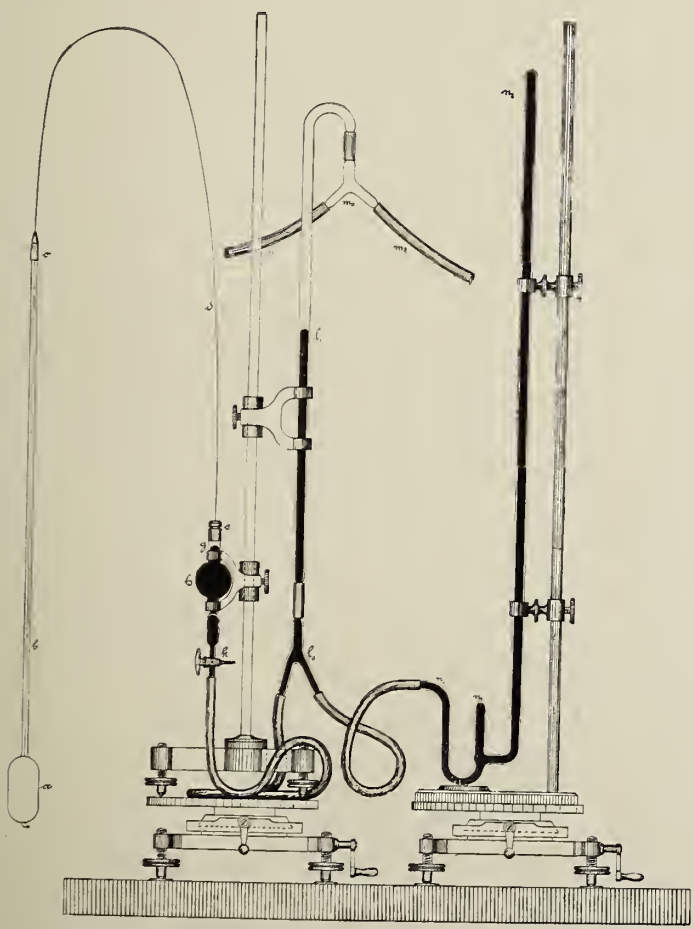
[4]) Zorgvuldig moet gewaakt worden tegen vernauwingen.

[5]) Aan het uitpompen van het reservoir met de kwikluchtpomp bij het vullen moet echter veel tijd besteed worden, daar het evenwicht van reservoir en pomp veel langzamer tot stand komt, dan dat tusschen schadelijke ruimte en reservoir.

[6]) Travaux et Mémoires, Tome VI.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstof-thermometer.

Plaat I.



a. Met waterstof bereid in den toestel van Med. N°. 27 voorzien van de verbeteringen, die in Med. N°. 94^e (Juni 1905) § 2 zijn beschreven. Terwijl vooraf onderzocht was of alle verbindingen van den toestel volkomen sloten, werd om elke verontreiniging van het gas uit te sluiten ten overvloede nog in den ontwikkelaar steeds overdruk onderhouden. Het verdrijven van de oorspronkelijk in den toestel aanwezige lucht werd voortgezet tot zij hoogstens nog tot 0.000001 in het gas kon aanwezig zijn.

b. Met waterstof volgens Med. N°. 94^f (Juni 1906) XIV bereid. Om deze meer afdoende bereidingswijze toe te kunnen passen, moet men over vloeibare waterstof beschikken.[1]) In § 7 wordt de gelijkwaardigheid van de eerste methode met de laatste, voor metingen tot — 217°, aangetoond. Of uit de toepassing der eerste handelwijze bij metingen in vloeibare waterstof systematische fouten kunnen voortvloeien door de afscheiding van verontreinigingen, minder vluchtig dan waterstof, moet nog worden nagegaan.[2])

§ 4. *De metingen.*

Het nulpunt van den thermometer wordt bepaald voor en na elke serie van waarnemingen. Zoowel voor het nulpunt als voor iedere temperatuurbepaling wordt een gemiddelde afgeleid uit 3 à 4 waarnemingen. Elk dezer waarnemingen bestaat uit een aflezing van den barometer, voorafgegaan en gevolgd door een aflezing van den manometer. De thermometers, die de temperatuur aangeven van het kwik, van de schaal en van het gas in de schadelijke ruimte, worden aan het begin en het einde van elke waarneming afgelezen. De temperatuur van het vertrek wordt zoo standvastig en gelijkmatig mogelijk gehouden.

De temperatuur van het thermometer-reservoir wordt gelijk gesteld aan die van het bad. Dit is bij de cryostaten beschreven in Med. N°. 94^d en Med. N°. 94^f en de handelwijze aldaar vermeld, geoorloofd.

Het constant houden der temperatuur in het bad geschiedt door middel van den weerstands-thermometer, vermeld in Med. N°. 95^c. Om het overzicht der waarnemingen gemakkelijker te maken, werd steeds zoo nauwkeurig mogelijk op denzelfden weerstand ingesteld

[1]) De waterstof in het vacuumglaasje *B* (zie Med. N°. 94^f XIV, fig. 4) bleek zoo langzaam te verdampen, dat een tijdsverloop van 2 uur beschikbaar bleef voor het omspoelen en weer uitpompen van den thermometer, te voren langen tijd (verg. noot 5 bij § 2), gedeeltelijk onder verhitting, luchtledig gehouden.

[2]) Bij een vroegere serie waarnemingen, werden afwijkingen gevonden, welke in onderling verband aantoonen, dat de waterstof met lucht verontreinigd moet zijn geweest.

en door middel van seinen de druk in den cryostaat zoo geregeld, dat in den zeer gevoeligen galvanometer de spiegel slechts geringe schommelingen om zijn evenwichtstand maakte. Voorzoover dit noodig bleek werd van deze schommelingen een correctiekromme ontworpen (zie Pl. III Med. N°. 83). In den regel waren echter deze afwijkingen zoo gering, dat ze niet in aanmerking kwamen.

Wat de capillaire glazen steel van den thermometer betreft, zoo bevindt zich een deel op de temperatuur van het vloeistofbad. De lengte van dit deel wordt afgeleid uit de aanwijzingen van een vlotter [1]) in den cryostaat, die in de teekeningen is weggelaten, om deze niet onduidelijk te maken. Om de temperatuurverdeeling in het overige deel van de capillair binnen den cryostaat te leeren kennen, zijn afzonderlijke bepalingen verricht en wel werd *a.* met behulp van een naast de capillair geplaatsten weerstandsthermometer, (zie Med. N°. 83 Pl. II [2]), *b.* met behulp van een thermo-element, waarvan de contactplaats op verschillende hoogte in den cryostaat werd gebracht, de temperatuurverdeeling in den cryostaat nagegaan voor het geval dat vloeibare lucht, vloeibaar ethyleen of vloeibare waterstof als bad gebruikt werd, en eindelijk *c.* uit deze waargenomen verdeeling de verdeeling bij andere temperaturen van het bad afgeleid. Dit mag voldoende geacht worden, daar het volume, waarvan de temperatuur bepaald wordt, slechts $\frac{1}{3000}$ van het reservoir bedraagt en een fout van 50° in de gemiddelde temperatuur van de capillair eerst overeenkomt met 0°.01 in de temperatuur van het bad terwijl blijkens de overeenstemming der waarnemingen sub *a* en *b* eene fout van meer dan 20° is uitgesloten.

§ 5. *Berekening der temperaturen.*

De berekening van het nulpunt geschiedt door den waargenomen druk van het gas terug te brengen tot dien onder bepaalde omstandigheden, dezelfde als in Med. N°. 60 zijn aangenomen. Stel dat nu is:

V_0 het volume van het reservoir bij 0°.

u_1 het volume van dat gedeelte van de glascapillair, dat op de temperatuur t van het reservoir is. Hiertoe is gerekend het zich in het vloeistofbad bevindende gedeelte, vermeerderd met 2 cm. van het zich er onmiddellijk boven bevindende deel.

u_2' en u_2'' de volumina der deelen van het stuk van de glascapillair buiten het bad op temperaturen t_2' en t_2''.

[1]) Bij de bepalingen in vloeibare waterstof werd geen vlotter gebruikt. De stand van den vloeistof in het bad werd afgeleid uit het volume van het verdampte gas.

[2]) Het benedenste deel ζ_{11} tot ζ_{12} met dichte windingen is 9 cm., het deel met verder van elkaar verwijderde windingen (ongeveer 20 cm.) reikt tot boven in den cryostaat.

u_3 het volume van het zich buiten het bad bevindende deel van de glascapillair en van de staalcapillair met de temperatuur t_3.

u_4 het volume bij de stalen punt van den volumenometer.

β_1 en β_2 de verandering van het volume V_0 veroorzaakt door den druk van het gas.

Zoo H_T de waargenomen druk is, en H_0 en u dezelfde beteekenis hebben als in Med. N°. 60, wordt de temperatuur gevonden uit de formule:

$$H_T\left[\frac{V_0(1+k_1t+k_2t^2)+\beta_1+u_1}{1+\alpha t}+\frac{u_2'}{1+\alpha t_2'}+\frac{u_2''}{1+\alpha t_2''}+\frac{u_3}{1+\alpha t_3}+\frac{u_4}{1+\alpha t_4}\right]=$$
$$=H_0\left[V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+\frac{u}{1+15\alpha}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De volumeverandering van den glazen steel door temperatuursverandering komt niet in aanmerking, evenmin die van u. Die van het thermometerreservoir is berekend door middel van een kwadratische formule, waarvan de coëfficienten k_1 en k_2 de volgende waarden hebben: $k_1 = 23.43 \times 10^{-6}$, $k_2 = 0.0272 \times 10^{-6}$ [1]).

Stel de som der laatste 4 termen tusschen de haakjes van het eerste lid $= \Sigma \frac{u}{1+\alpha t}$ en het standvastige tweede lid

$$H_0\left[V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+\frac{u}{1+15\alpha}\right]=A, \quad . \quad . \quad (2)$$

dan volgt uit het bovenstaande voor de temperatuur:

$$t=\frac{V_0+\beta_1+u_1-\frac{A}{H_T}+\Sigma\frac{u}{1+\alpha t}+V_0k_2t^2}{\left\{\frac{A}{H_T}-\Sigma\frac{u}{1+\alpha t}\right\}\alpha-V_0k_1}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Laat men den term met t^2 weg dan vindt men een benaderde waarde voor de temperatunr. Nu kan t opnieuw worden berekend, terwijl in den term met t^2 deze waarde wordt gesubstitueerd. Deze benaderde rekenwijze is volkomen voldoende.

§ 6. *Overzicht van eene bepaling.*

De waarnemingen, welke in deze § worden medegedeeld, leverden de temperatuur behoorende bij de electromotorische kracht van het thermoelement bepaald in Tabel IV en V van Med. N°. 95^a en be-

[1]) Deze waarden zijn ontleend aan Med. N°. 95^b. Ze hebben betrekking op de bepalingen in 1903 omtrent de uitzetting van glas verricht. Berekent men de temperaturen door middel van de in dezelfde Med. uit de waarnemingen van 1905 afgeleide kwadratische en kubische formule, dan vindt men slechts geringe afwijkingen, die bij $-100°$ respectieveijk $-0°.014$ en $-0°.016$ bedragen, bij $-200°$ en lager steeds beneden $0°.01$ blijven.

hoorende bij den weerstand gemeten bij de waarneming opgenomen in Tabel I van Med. N°. 95^c.

De tabellen I en II zijn analoog aan die van Med. N°. 60, slechts is aan de eerste een kolom K toegevoegd, waarin zijn opgeteekend de aflezingen op de kathetometerschaal. Deze worden steeds bij iedere meting bepaald om, in verband met de bekende collimatieverschillen der kijkers, zoo noodig als contrôle te dienen voor de aflezingen door middel van de standaardschaal.

TABEL I.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER — 253°). AFLEZINGEN.

5 Mei '06 3.10—3.30		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
	Spits	14.75	7.9	974 975	20.17 17.86	9.1 8.1				
Manometer	onderste top	23.00	9.0	297	22.02	9.3	15.5	15.5	15.4	
Manometer	meniscus rand	26.01	9.0	298	19.90	10.3		15.6	15.1	21.926
							15.5	14.3		
Manometer	bovenste top	15.10	7.9	974	20.17	9.1				
Manometer	meniscus rand	18.43	7.9	975	17.86	8.1	15.5			89.294
Barometer	onderste top	21.03	8.7	297	22.02	9.3	15.5			
Barometer	meniscus rand	22.70	8.6	298	19.90	10.3	15.5			
Barometer	bovenste top	25.82	9.6	1058	28.07	11.3	15.7			103.279
Barometer	meniscus rand	27.98	10.0	1059	25.43	11.0	15.7			
Manometer	onderste top	22.98	9.3	297	22.02	9.3	15.4	15.5	15.4	
Manometer	meniscus rand	25.99	9.3	298	19.90	10.3		15.4	15.2	
							15.3	14.3		
Manometer	bovenste top	15.06	7.9	974	20.17	9.1				
Manometer	meniscus rand	18.42	8.0	975	17.86	8.1	15.5			
	Spits	14.76	8.0	974 975	20.17 17.86	9.1 8.1				

TABEL II.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER — 253°). GECORRIGEERDE EN OMGEREKENDE GEGEVENS DER WAARNEMING.

		A'	B'	C'	D'	E'	F'
Manometer	onderste meniscus	296.55	296.70	14.8	14.9		
	hoogte	1.39		14.9	14.8		
	bovenste meniscus	976.21	976.37	14.9	13.8	81.53	0.14
	hoogte	1.46					
Barometer	onderste meniscus	297.46	297.48	14.8			
	hoogte	0.77					
	bovenste meniscus	1058.87	1058.90	15.0			
	hoogte	0.83					

De correctie voor het verschil in niveau van barometer en manometer werd aangebracht (zie ook Med. N°. 60). Zoo vindt men H_T, den druk van het gas in den thermometer.

Uit de aanwijzing van den vlotter vindt men de waarde van u_1. u_2' en u_2'' worden gekozen, zoodanig, dat de toestand zich zoo nauw mogelijk aansluit aan dien, waarbij de temperatuursverdeeling in den cryostaat is bepaald. Men verkrijgt nu de volgende tabel, waarin H_0 de nulpuntsdruk is.

TABEL III.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER —253°). GEGEVENS VOOR DE BEREKENING.

$u_1 = 0.0105$ cm³	
$u_2' = 0.0125$ »	$t'_2 = -162°$
$u_2'' = 0.0140$ »	$t''_2 = 0°$
$u_3 = 0.6990$ »	$t_3 = 14°.5$
$u_4 = 0.2320$ »	$t_4 = 14°.9$
$H_T = 81.53$ m.m.	
$V_0 = 82.265$ cm³	
$\beta_1 = -0.0041$ »	
$H_0 = 1091.88$ mm.	

Uit de gegevens volgt met de formule voor de benaderde waarde van de temperatuur, waarbij voor α werd aangenomen de waarde 0,0036627 van Med. N°. 60 [1]):

$$t = -252°.964$$

en na aanbrenging der correctie voor den kwadratischen term:

$$t = -252°.964 + 0°.035 = -252°.93.$$

§ 7. *Nauwkeurigheid der temperatuurbepalingen.*

Ten einde te komen tot een oordeel over de fout der waarnemingen met den waterstofthermometer, bepalen wij de afwijkingen der waterstoftemperaturen bij verschillende waarnemingen gevonden bij een zelfden weerstand, voor kleine verschillen gereduceerd.

De middelbare fout van een enkele bepaling, afgeleid uit de verschillen der onmiddellijk opeenvolgende thermometeraflezingen is gemiddeld ± 0°.0074, waaruit wij afleiden voor de middelbare fout van een temperatuur 0°.0043, aannemende dat gemiddeld 3 waarnemingen gediend hebben om een temperatuur te bepalen. Bij eenzelfde bepaling werden in den regel geen grootere afwijkingen tusschen de afzonderlijke aflezingen gevonden dan 0°.02. Slechts eenmaal, 27 Oct. '05 (vergelijk Med. N°. 95^c Tab. I), kwam een verschil van 0°.04 voor. Ook bij de laagste temperaturen komen slechts kleine afwijkingen voor. Zoo gaven op 5 Mei '06 twee der waarnemingen in de nabijheid van het kookpunt van waterstof (vergelijk Med. 95^a Tab. VI, waarneming N°. 30 en Med. N°. 95^c Tab. I)

$3^u 20'$	$-252°.926$
$3^u 58'$	$-252°.929$

de beide andere bij een anderen weerstand:

$2^u 35'$	$-252°.875$
$3^u\ 7'$	$-252°.866$ [2])

Bepalingen van eenzelfde temperatuur op verschillende dagen, met dezelfde vulling van den thermometer, gaven de volgende resultaten: (vergelijk Med. N°. 95^a Tab. VI en N°. 95^c Tab. I) [3])

---

[1]) Uit de door CHAPPUIS gevonden waarden van α bij verschillende drukken, en D. BERTHOLOT's berekeningen volgt door extrapolatie van uit CHAPPUIS' waarde voor $p = 1000$ m M. $\alpha = 0.00366262$ voor $p = 1090$ m.M., van uit TRAVERS' waarde van α voor 700 m.M. met dezelfde gegevens $\alpha = 0.00366288$ voor $p = 1090$ m.M.

[2]) Bij deze beide temperaturen werd niet naar de aanwijzingen van den weerstandsthermometer geregeld, maar werd enkel de druk in den cryostaat constant gehouden. Dat desniettegenstaande de aflezingen van den thermometer zoo weinig verschillen, is het gevolg van de groote zuiverheid van de vloeibare waterstof in het bad.

[3]) De hier voor 30 Juni '06 medegedeelde temperatuur verschilt iets van de in Tab. I van Med. N°. 95^c vermelde, ofschoon beide op denzelfden weerstand betrekking hebben. Dit verschil vloeit daaruit voort, dat in Med. N°. 95^c de uitkomst van een enkele aflezing is gebruikt, en hier het gemiddelde van meerdere is gegeven.

7 Juli '05	— 139°.867
26 Oct. '05	— 139°.873
6 Juli '05	— 217°.416
3 Mrt. '06	— 217°.424
30 Juni '06	— 182°.730
6 Juli '06	— 182°.728

Voor de afwijking der bepalingen op één dag van het gemiddelde der bepalingen op de beide dagen volgt respectievelijk:

0°.003, 0°.004 en 0°001 dus gemiddeld 0°,0027,

hetgeen zeer goed overeenstemt met de middelbare fout hierboven voor een enkele bepaling afgeleid [1]), waaruit tevens blijkt, dat verschillende systematische fouten uitgesloten zijn. Hierdoor wordt tevens de onderstelling van welke wij uitgingen, gerechtvaardigd, dat de fout in den weerstandsthermometer kan worden verwaarloosd.

Bepalingen bij verschillende vullingen geven goede overeenstemming.

De bepalingen op 6 Juli '05 en 3 Mrt, '06 met den met electrolytische waterstof gevulden thermometer (zie § 3) en die op 30 Juni '06 met den met gedistilleerden waterstof gevulden thermometer verricht, geven:

gemiddelde van 6 Juli '05 en 3 Mrt. '06 — 217°.420

30 Juni '06 $5^u50'$ — 217°.327
$6^u\ 5'$ — 217°.362
$6^u25'$ — 217°.347
} gemiddeld — 217°.345.

Brengt men de laatste temperatuur terug tot denzelfden weerstand als de eerste dan vindt men — 217°.400, het verschil dezer waarden is derhalve 0°.020, waaruit, daar slechts één bepaling werd gedaan, moet worden besloten, dat tot — 217° ook wat de vulling betreft systematische fouten vrijwel zijn uitgesloten.

§ 8. *Uitkomst.*

Uit het voorgaande blijkt, dat met onzen waterstofthermometer temperatuurbepalingen, ook bij de laagste temperaturen, tot op $\frac{1}{50}°$ nauwkeurig met de noodige voorzorgen zonder bezwaar te verwezenlijken zijn. Al is het niet zeker, dat de in de laatste serie bepaalde temperaturen in vloeibare waterstof deze nauwkeurigheid bereiken, aangezien zich daar een systematische fout door de vulling kan doen

[1]) Deze geeft namelijk voor de waarschijnlijke fout 0°.0029, dus geen merkbaar verschil met het bovenstaande.

gelden, die bij — 217° nog niet optreedt, zoo ligt het wel voor de hand te onderstellen, dat met den met gedistilleerde waterstof gevulden thermometer althans ook deze temperaturen met denzelfden graad van nauwkeurigheid kunnen worden bepaald.

§ 9. *Dampspanning van vloeibare waterstof bij het smeltpunt.*

Door den druk boven het bad van vloeibare waterstof voldoende te verlagen werd de temperatuur bereikt, waarbij de waterstof in het bad vast wordt. Deze temperatuur geeft de grens aan, beneden welke nauwkeurige bepalingen op de in deze Mededeeling behandelde wijze niet mogelijk zijn.

Zij was nauwkeurig te bepalen door een plotselinge verandering in het geluid, dat de kleppen van den roerder in het bad te weeg brengen. (Zie Med. N°. 94^b, XII § 3).

Uit de aanwijzing van den weerstandsthermometer, bleek dat het gas in den waterstofthermometer zich gedeeltelijk had afgezet. De druk in den waterstofthermometer geeft derhalve de dampspanning van vloeibare waterstof bij het smeltpunt. Hiervoor werd gevonden:

$$H_{Sm} = 53.82 \text{ m.m.}^1).$$

§ 10. *Reductie op de absolute schaal.*

Over het overbrengen van de aflezingen van den waterstofthermometer op de absolute schaal door middel van de resultaten van isothermbepalingen zal in een volgende Mededeeling worden gehandeld.

§ 11. *Veranderingen van den nulpuntsdruk van den thermometer.*

Omtrent den druk in den thermometer bij de nulpuntsbepalingen kan worden opgemerkt, dat deze langzaam afneemt. Deze verandering is het sterkst, wanneer de thermometer pas in elkaar is gezet en wordt met den tijd geringer. Dit blijkt duidelijk, wanneer men vergelijkt de uitkomsten van de bepalingen verricht telkens aan het begin van een nieuwe waarnemingsperiode, dus nadat de thermometer ongebruikt eenigen tijd onder overdruk heeft gestaan.

Zoo werd den 5^{den} Juli '05, kort na het in elkaar zetten van den thermometer gevonden:

$$H_0 = 1093.10 \text{ mm.}$$

terwijl aan het begin van de beide volgende waarnemingsperioden werd gevonden:

---

[1]) Travers, Senter en Jaquerod (loc. cit., p. 170) vinden hiervoor een waarde liggende tusschen 49 en 50 mm. Het groote verschil moet waarschijnlijk worden toegeschreven aan de mindere nauwkeurigheid dezer laatste bepalingen.

op 13 Oct. '05 $H_0 = 1092.11$ mm.
op 26 Febr. '06 $H_0 = 1091.93$ mm.

De bepalingen voor en na elke waarnemingsperiode geven onderling geringe verschillen. In den regel daalt de druk een weinig zooals bij de tweede der bovengenoemde waarnemingsperioden (7 Maart '06, $H_0 = 1091.83$ mm.), soms is er een geringe stijging zooals bij de eerste waarnemingsperiode (2 Nov. '05, $H_0 = 1092.23$ mm.) na waarnemingen onder lagen druk. Vóór en na de laatste waarnemingsreeks, toen kort na het vullen van den thermometer met gedistilleerde waterstof bepalingen bij — 183° en — 217° werden verricht was dit verschil bijzonder groot. De nulpuntsdruk na de metingen was toen 0.23 mm. hooger dan daarvoor.

Uit oudere waarnemingen met een anderen thermometer verricht, blijkt een overeenkomstig gedrag.

Zoo werd op 19 Nov. '02 gevonden:

$$H_0 = 1056.04 \text{ mm.}$$

terwijl de druk op 8 Juni '04 was

$$H_0 = 1055.43 \text{ mm.}$$

om gedurende verdere metingen tot 7 Juli '04 een waarde te behouden, die binnen de grenzen der waarnemingsfouten hieraan gelijk bleef.

Chappuis[1]) vond een dergelijke afname n.l. 0.1 mm. in de drie maanden bij een nulpuntsdruk van 1 M. kwik.

Eindelijk is ook bij den luchtmanometer eene afname van het normaalvolume door Kuenen en Robson en door Dr. Keesom (zie Med. N°. 88 § 3) waargenomen. Het zelfde verschijnsel werd onlangs vastgesteld bij den met waterstof gevulden hulpmanometer in Med. N°. 78 vermeld, bij een nieuwe vergelijking met den open standaardmanometer. Deze vergelijking zal in een volgende Mededeeling ter sprake komen.

Uit het bereiken van een eindtoestand bij den thermometer volgt wel, dat het bestaan van een lek uitgesloten is.

Het meest voor de hand ligt de nulpuntsveranderingen toe te schrijven aan een absorptie, die zich langzaam naar den druk regelt. Wat de absorptie van het gas in het kwik, de adsorptie er van aan den wand en de uitwisseling van het gas met een dun laagje tusschen den wand en het kwik betreft, deze kunnen, al zijn zij niet volstrekt nul, buiten beschouwing blijven. Want bij de manometers,

[1]) Nouvelles études sur les thermomètres à gaz, Travaux et Mémoires. T. XIII p. 32.

waar geen andere dan deze werkingen zich kunnen openbaren, wordt de druk van het gas soms gedurende geruimen tijd zeer hoog opgevoerd en zijn de veranderingen van het normaalvolume desniettegenstaande veel geringer dan bij de thermometers.

Veeleer zal daarom gedacht moeten worden aan eene langzame oplossing in en verdamping uit de kitlaag, die tusschen de stalen dopjes is aangebracht.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt ter uitgave in de Werken eene verhandeling aan, getiteld: *„Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume"*, 2te Abhandlung.

Aardkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt namens den Heer VAN BEMMELEN eene verhandeling aan van den Heer H. G. JONKER, getiteld: *„Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland"* (1734—1906).

De Voorzitter stelt deze verhandeling in handen van de Heeren J. M. VAN BEMMELEN, K. MARTIN en G. A. F. MOLENGRAAFF om daarover in de volgende vergadering advies uit te brengen.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES namens den Heer W. VAN BEMMELEN: *„Erdmagnetische Pulsationen"*, (Sonderabdruck aus dem HANN-Band der Meteorologischen Zeitschrift 1906); en door den Heer BOLK: *„Das Cerebellum der Säugetiere. Eine vergleichend-anatomische Untersuchung."*

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In het verslag der vergadering van 30 Juni 1906 leze men:

p. 114, r. 10 v. b.: K_{ha} (K_d op Pl. II) in plaats van K_{pa},
r. 20 v. b.: achter „is": „geweest" en achter „gas": „en deze plotseling eruit schieten".
r. 3 v. o.: „wand V_{321}" in plaats van „cylinderwand", achter „gummiwand": V_{42}.
p. 126, r. 3 v. b.: X § 1 in plaats van § 1,
r. 4 v. b.:
r. 8 v. o.:
p. 127, r. 6 v. o.: Med. N°. 94^d in plaats van Med. N°. 94^a.
p. 131, r. 16 v. o.: Pl. VI in plaats van Pl. IV.
p. 132, r. 14 v. o.: vóór „volgt": „bij — 180° C." en 10^{-18} mM. in plaats van 10^{-19} mM.
p. 142, r. 1, 2, 3 v. o. behooren te staan boven aan de bladzijde.
p. 146, r. 8 v. o.: in kolom III [—182.604] in plaats van —182.640 en [—182.828] in plaats van — 182.828.
p. 147, r, 21 v. b.: — 88° in plaats van — 81°.
p. 148, r. 4 v. o.: moet „(10 microvolt)" vervallen.
p. 149, r. 17 v. b.: — 0.024019 in plaats van + 0.024019.
p. 150, r. 16 v. b.: [— 182.604] in plaats van — 182.604.
r. 17 v. b.: [— 182.750] „ „ „ [— 182.750.
r. 18 v. b.: [182.828] „ „ „ — 182.828,
r. 16, 17 en 18 v. b. in kolom III tot VIII alle getallen te verhoogen met 10.
p. 151, § 13: zie de uitvoeriger omschrijving in de Proceedings.
p. 155, r. 4 en 3 v. o.: „en het reservoir A" in plaats van „in dezen stand"
r. 2 en 1 v. o.: „waarna het kwik weer in A werd toegelaten en de toestel weder in het waterbad gebracht werd." in plaats van „en omgedraaid" enz.
p. 158, r. 15 v. o.: — 86,2 in plaats van 86,2.
p. 160, r. 16 v. o.: achter „temperatuur": 0
r. 14 v. o.: „temperatuurbepalingen" in plaats van „de metingen"
p. 161, r. 18 v. o.: „glascylindertje" in plaats van „gascylindertje".
p. 162, r. 13 v. b.: achter „§ 10": „en zijn"
r. 15 en 14 v. o.: „Maar ook eene kubische formule blijkt, zelfs wanneer men de waterstoftemperaturen buiten beschouwing laat, onbruikbaar te zijn."

p. 163, tabel I, in plaats van de vier waarden voor $W—R_{Al}$: -0.061, $+0.082$, -0.110, -0.082.

p. 164, r. 8 v. b.: $\frac{10^6}{T^3}$ en $\frac{10^6}{(273.09)^3}$ in plaats van $\frac{10^3}{T^3}$ en $\frac{10^3}{(273.09)^3}$.

r. 9 v. b.: „zal worden" in plaats van „wordt"

p. 165, r. 12 v. o.: „fout" in plaats van „afwijking,"

r. 11 v. o.: „van de formule" is te schrappen,

r. 7 v. o.: „0.010" in plaats van „0.10"; aan dezen regel is toe te voegen: „terwijl die in de bepaling van den weerstand niet in aanmerking komt. In hoeverre het grootere bedrag der verschillen tusschen de waarnemingen en de formule ligt aan half systematische fouten of aan de formule, kan nog niet worden uitgemaakt."

p. 166, r. 4 v. o.: achter „als": „bij het onderzoek in,"

p. 168, boven is uitgevallen de zin: „Voor den weerstand van den gouddraad zouden wij om in overeenstemming te zijn met DEWAR bij het kookpunt van waterstof hebben moeten vinden 1,708 Ω in plaats van 2,364 Ω."

r. 7 v. o.: „fout" in plaats van „afwijking"

r. 6 v. o.: achter „waarneming": „naar de vergelijking"

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 24 November 1906.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 364.

Verslag van de Heeren VAN BEMMELEN, MARTIN en MOLENGRAAFF over eene verhandeling van den Heer H. G. JONKER, getiteld: „Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland" (1734—1906), p. 364.

H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over de vergelijking van het thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer", (Nasehrift), p. 365.

MAX WEBER: „De visehfauna van Nieuw-Guinea", p. 368.

H. J. ZWIERS: „Onderzoekingen over de baan van de periodisehe komeet HOLMES en over de storingen in haar elliptisehe beweging" IV. (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 372.

N. H. COHEN: „Over het lupeol". (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. F. HOLLEMAN), p. 383.

N. H. COHEN: „α- en β-amyrine uit bresk". (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. F. HOLLEMAN), p. 388.

F. M. JAEGER: „Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 389.

F. M. JAEGER: „Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 401.

W. KAPTEYN: „Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde", p. 410.

F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeensehappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeensehappelijke koorden der krommen van drie bundels" 1e gedeelte. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 412.

J C. KLUYVER: „Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n", p. 423.

E. E. MOGENDORFF: „Over eene nieuwe empirische speetraalformule". (Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 429.

J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908. 2de Afdeeling: Verduisteringen", p. 439. (Met twee platen).

H. KAMERLINGH ONNES: „Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS: XIII. Een gas dat in een vloeistof zinkt", p. 454.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: "On congenital ataxia in a cat", p. 455.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 455.

Errata, p. 456.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding van de notulen deelde de Heer KORTEWEG mede dat de behandeling der circulaire van de Akademie van Wetenschappen te Berlijn, betreffende samenwerking van de Internationale Associatie met de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der zon, wegens afwezigheid van den Voorzitter tot eene volgende vergadering uitgesteld is.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, KLUYVER en ZEEMAN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Bericht van de Geologische Commissie, dat zij gaarne de grondmonsters enz. welke verzameld zijn door het Instituut voor de Rijksopsporing van Delfstoffen, in ontvangst zal nemen. Hiervan is aan den Ingenieur-Directeur der Rijksopsporing bericht gezonden.

Aardkunde. — De Heer MOLENGRAAFF brengt het volgende Rapport uit omtrent de verhandeling van Dr. H. G. JONKER, getiteld: *„Lijst van Geschriften, welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland,* 1734—1906."

Dr. JONKER heeft in zijn bovengenoemde verhandeling getracht in historische volgorde een overzicht te geven van alle geschriften, die handelen over de geologie van Nederland of voor de studie daarvan belangrijk zijn, voor zoover die zijn verschenen van het jaar 1734 tot heden. Hij heeft daarbij gestreefd naar volledigheid en nauwkeurigheid en, voor zoover het mogelijk is dat na te gaan, komt het ons voor, dat beiden door hem op zeer voldoende wijze zijn bereikt. Hij beperkt de opsomming niet tot die geschriften, die betrekking hebben op streken, binnen de grenzen van Nederland gelegen, maar heeft ook alle werken opgenomen, waarin melding wordt gemaakt van de geologische gesteldheid van terreinen, buiten die grenzen gelegen, voor zoover zij bij de studie der geologie van Nederland kunnen te pas komen. Terecht zijn ook niet-geologische geschriften van allerlei aard opgenomen, waarin opmerkingen worden gemaakt of feiten worden vermeld, die eenig licht verspreiden omtrent of betrekking hebben op de samenstelling van den Nederlandschen bodem.

Het stuk bevat 1300 nommers, terwijl aan het slot een lijst is gegeven, waarin wordt opgegeven, in welke openbare bibliotheken de verschillende nommers aanwezig zijn. Het geheel mag een zorgvuldig, ijverig werk worden genoemd, dat van het grootste nut zal

blijken te zijn, voor ieder, die zich in het vervolg met de studie der geologie van Nederland zal bezighouden.

Om die reden hebben wij de eer U voor te stellen de verhandeling van den heer Dr. H. G. JONKER op te nemen in de geschriften der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Den Haag, 20 Nov. 1906.

G. A. F. MOLENGRAAFF.
K. MARTIN.
J. M. VAN BEMMELEN.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan mede namens den Heer C. A. CROMMELIN een *„Naschrift bij Med. N°. 95a uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, over de vergelijking van het thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer."*

(Medegedeeld in de vergadering van 27 October 1906).

§ 14. *Nadere voorstelling der waarnemingen door eene formule met vijf termen.*

In § 12 zijn blijkens noot 1 de berekeningen verricht met niet geheel juiste waarden van de temperatuur bij — 182° en evenzoo waren de middelbare fouten afgeleid uit de aanname van die minder juiste waarden.[1])

Gebruikt men de juiste waarden van die temperaturen voor de berekeningen van de afwijkingen $W-R_1$, $W-R_2$, $W-R_3$, $W-R_4$ in Tabel VIII, zoo worden de middelbare fouten

voor formule (BI) ± 3.0
(BII) ± 3.4
(BIII) ± 2.8 (2.5 zonder — 217°)
(BIV) ± 2.1

in plaats van

(BI) ± 2.8
(BII) ± 3.2
(BIII) ± 2.6 (2.1 zonder — 217°)
(BIV) ± 1.8

welke ook zouden verkregen zijn als de waarnemingen bij — 182° uitgesloten werden.

[1]) De correctie bedroeg in temperatuur 0°,081 of in electromotorische kracht 17 microvolt.

Er moest nu nog nagegaan worden of eene herhaling van de vereffening deze middelbare fouten kon verkleinen. Dit bleek duidelijk voor (*B*I), (*B*II), (*B*III) niet in merkbare mate mogelijk. Voor (*B*IV) bleek het mogelijk de fouten gelijkmatiger te verdeelen. Echter werd daardoor de kwadraatsom slechts van 2657 tot 2614 teruggebracht.

In plaats van de coëfficienten a_4, b_4, c_4, e_4 en f_4 (zie § 12) komen dan

$$a'_4 = +4.32513 \qquad e'_4 = +0.023276$$
$$b'_4 = +0.409153 \qquad f'_4 = -0.0025269$$
$$c'_4 = +0.0015563$$

De afwijkingen worden als $W - R'_4$ gegeven in Tabel IX.

§ 15. *Voorstelling der waarnemingen door een formule met vier termen.*

Wij hebben de in noot 2 van § 11 aangekondigde berekening van eene formule van den vorm

$$E = a\left(\frac{t}{100}\right) + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^4 \cdot \cdot \cdot \quad (C)$$

volgens de methode van E. F. v. d. Sande Bakhuyzen, die weder veel gemak bleek op te leveren, thans ook geheel uitgevoerd.

Gevonden worden vier oplossingen (*C*) en wel (*C*I), (*C*II), (*C*III) aansluitende tot — 253°, terwijl bij (*C*IV) alleen op aansluiting tot — 217° gelet is.

De coëfficienten zijn de volgende:

	1	2	3	4
a	+ 4.30192	+ 4.30571	+ 4.30398	+ 4.33031
b	+ 0.357902	+ 0.366351	+ 0.363681	+ 0.421271
c	— 0.0250934	— 0.0192565	— 0.020071	+ 0.018683
e	+ 0.0257462	+ 0.0270158	+ 0.0270044	+ 0.035268

De afwijkingen zijn onder $W - R_{CI}$, $W - R_{CII}$, $W - R_{CIII}$, $W - R_{CIV}$ in Tabel IX opgegeven.

Evenals bij de 5-termige formule bleek ook nu weder de afwijking bij — 182° grooter dan de anderen.

Bij berekening 3 werd getracht de fouten gelijkmatiger te verdeelen, doch hun kwadraatsom bleek nu grooter te zijn geworden.

De middelbare fouten zijn, bij (*C*I), (*C*II), (*C*III) de waarnemingen tot — 253°, bij (*C*IV) slechts tot — 217° meenemende, voor

$(C\,\mathrm{I})$ $\pm$ 3.0
$(C\,\mathrm{II})$ $\pm$ 2.9
$(C\,\mathrm{III})$ $\pm$ 3.0
$(C\,\mathrm{IV})$ $\pm$ 2.3

Sluit men $-182°$ uit dan worden deze

$(C\,\mathrm{I})$ $\pm$ 2.7
$(C\,\mathrm{II})$ $\pm$ 2.6
$(C\,\mathrm{IV})$ $\pm$ 1.8

De middelbare fouten van $(C\,\mathrm{I})$, $(C\,\mathrm{II})$, $(C\,\mathrm{III})$ moeten vergeleken worden met die van $(B\,\mathrm{I})$ en $(B\,\mathrm{III})$, die van $(C\,\mathrm{IV})$ met die van $(B\mathrm{IV})$.

Deze vergelijking leert, dat de viertermige formule voor de voorstelling der waarnemingen nagenoeg gelijkwaardig geacht kan worden met de vijftermige en dat dus (de opmerking is in overeenstemming met noot 2 van § 13) van de calibratie tot $-217°$ het geringste aantal temperaturen waarbij waarnemingen noodig zijn, *vier* bedraagt. Dat drie niet voldoende zijn werd reeds in § 11 aangetoond. Dit blijkt ook duidelijk, als men de middelbare fout opmaakt, die voor de drietermige formule tot $\pm$ 7.6 stijgt.

TABEL IX.

AFWIJKINGEN VAN DE CALIBRATIE-FORMULES VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII
N°.	t	$W-R_4'$	$W-R_{C\mathrm{I}}$	$W-R_{C\mathrm{II}}$	$W-R_{C\mathrm{III}}$	$W-R_{C\mathrm{IV}}$
22	— 29°.82	— 12	+ 20	+ 15	+ 18	— 19
24 en 20	— 58.75	+ 16	+ 30	+ 26	+ 29	+ 4
21 en 23	— 88.15	+ 14	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
1 en 17	— 103.70	— 6	— 29	— 28	— 30	— 20
16 en 18	— 139.86	+ 1	— 26	— 24	— 31	— 17
19	— 158.83	— 10	— 10	— 10	— 18	— 10
3, 11 en 5	[— 182.73]	+ 26	+ 46	+ 44	+ 35	+ 34
4, 28 en 6	— 195.19	+ 2	+ 23	+ 21	+ 12	+ 11
12, 27 en 7	— 204.70	— 20	— 9	— 11	— 19	— 18
26, 14, 13 en 8	— 212.85	+ 24	+ 21	+ 21	+ 13	+ 21
29, 15 en 25	— 217.55	— 15	— 30	— 29	— 37	— 23
30	— 252.93	+ 280	0	+ 20	+ 20	+ 150
31	— 259.24	+ 485	+ 115	+ 141	+ 143	+ 313

Dierkunde. — De Heer WEBER doet eene mededeeling over: *„De vischfauna van Nieuw-Guinea."*

In het jaar 1877 verscheen van de hand van P. BLEEKER „Quatrième mémoire sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée," die 341 soorten optelt. Het zijn uitsluitend marine en brakwater-visschen, die hier genoemd worden en het bewijs leveren — wat trouwens niet anders te verwachten was —, dat de litorale vischfauna van Nieuw-Guinea deel uitmaakt van de groote indo-pacifische fauna, die zich uitstrekt van de Oostkust van Afrika tot aan de Westpacifische eilanden.

Dit werd andermaal bevestigd door soortgelijke lijsten, die W. MACLEAY in 1876 en in 1882 bekend maakte en die op de Zuidkust van Britsch Nieuw-Guinea en de Torresstraat betrekking hadden. Ook zij beantwoorden niet aan den wensch van BLEEKER, dat men er zich op moge toeleggen ook kennis te krijgen van de riviervisschen van Nieuw-Guinea. Aan dien wensch werd voor een deel voldaan door mededeeling omtrent visschen gevangen in de Strickland-, Goldie-, Paumomu-rivier en een aantal beken, alle gelegen in het zuid-oostelijke of Britsche gedeelte van het eiland: mededeelingen te danken aan W. MACLEAY, E. P. RAMSAY, I. DOUGLAS-OGILBY, A. PERUGIA, G. BOULENGER. Het aantal dier visschen bedraagt 25. Zoolang echter het Duitsche en Nederlandsche gedeelte van Nieuw-Guinea aangaande dit gedeelte der fauna onbekend bleef, waren zij niet in staat ons een beeld te geven van den aard der vischfauna van dit groote eiland. Dit is te meer te betreuren als men bedenkt, dat zoetwatervisschen een uitstekend hulpmiddel zijn voor de beantwoording van zoogeographische vragen. Wil men hiervan gebruik maken, zoo heeft men evenwel het volgende in het oog te houden.

Treft men in streken, die thans door zee gescheiden zijn, eendere of nauwverwante zoetwatervisschen aan voor die de zee eene onoverkomelijke barrière is, zoo is men tot het besluit gerechtigd, dat die streken vroeger in directen of indirecten samenhang stonden. Er zijn echter onder de riviervisschen kategoriën, die tot zoodanige bewijsvoering niet gebruikt kunnen worden of slechts met groote omzichtigheid. Naast trekvisschen zijn hier die visschen te noemen, die tevens in brak-, des desnoods ook in zeewater kunnen voorkomen.

De zoog. wet van E. VON MARTENS zegt, dat van de polen naar den equator het aantal brakwaterdieren toeneemt. Dat geldt ook voor de visschen, in het bizonder voor die van den indo-australischen Archipel en in zeer opmerkelijke mate voor die van de eilanden beoosten Borneo en Java. Dank zij hunne vroegere landverbinding

met het vasteland van Azië zijn de groote Soenda-eilanden eene vischfauna deelachtig geworden, waarvan de qualitatief en quantitatief belangrijkste elementen geen gelegenheid hadden zich verder oostwaarts te verspreiden. De oostelijke eilanden-wereld bood dus in haar rivieren een door visschen nagenoeg onbewoond terrein aan, waarvan allengs gebruik gemaakt werd door visschen, die in zee- of brakwater t'huis behoorende, voldoende elasticiteit bezaten, om ook in zoetwater te kunnen aarden. De concurrentie met de voor het leven in zoetwater beter ingerichte aziatische vormen (Cyprinidae, Mastacembelidae, Ophiocephalidae, Labyrinthici etc.) ontbrak, alles ten voordeele der immigranten van uit zee. De riviervisschen van Celebes pleiten voor deze opvatting even als hetgeen men weet van Ternate, Ambon, Halmahera enz.

Het gelijke verschijnsel doet zich voor in de zoete wateren van Australië. Zij herbergen echter daarnaast autochthone vormen, deels van hoogen ouderdom, deels jongere vormen, die voor een deel oorspronkelijk zeker marine immigranten waren, maar zich geheel aan het leven in zoet water hebben aangepast en het character van echte zoetwatervisschen hebben aangenomen.

De fauna van Australië verheugt zich tegenwoordig in een algemeene en warme belangstelling — er zijn er immers die zelfs meenen, dat de wieg van den mensch hier zou gestaan hebben — daarbij speelt eene belangrijke rol de duur der isolatie van Australië van andere deelen der aarde. Een gewichtige schakel in dien keten van overwegingen vormt Nieuw-Guinea.

Het is daarom een heugelijk feit, dat de Nederl. Nieuw-Guinea-expeditie van 1903 onder leiding van Prof. A. A. Wichmann, naast andere schatten ook eene uitgebreide verzameling visschen uit verschillende meren en talrijke rivieren en beekjes meêbracht, die ons een goed inzicht geeft in den aard der zoetwater-fauna van het noorden van het eiland. Het was een aanwinst, dat ik bij de studie dezer verzameling gebruik kon maken van hetgeen Dr. F. W. R. Koch, de medicus der expeditie van het Kon. Aardrijkskundig Genootschap naar Zuid-Nieuw-Guinea, in het brakke water van den mond der Meraukerivier had bijeengebracht.

Uit het resultaat van die studie, dat elders gepubliceerd zal worden, mogen enkele meer algemeene uitkomsten vermeld worden.

Alle visschen bijeentellende, die thans uit meren, beken en rivieren van Nieuw-Guinea bekend zijn, krijgt men een cijfer van 90 soorten. Hiervan werden slechts ongeveer 31 uitsluitend in zoetwater aangetroffen.

Bij nader onderzoek blijkt, dat op een aantal uitzonderingen na

deze soorten of van elders ook uit brak- en zeewater bekend zijn, of dat ten minste de naaste verwanten althans ook in brakwater kunnen voorkomen. Op treffende wijze vertoont dus Nieuw-Guinea het verschijnsel, dat immigratie van uit zee of uit het brakke water een buitengewone rol gespeeld heeft en wellicht nog speelt, bij de bevolking zijner rivieren.

Herinneren wij ons andermaal ons punt van uitgang: dat de marine vischfauna van Nieuw-Guinea deel uitmaakt van de groote indopacifische en meer in het bizonder van de marine vischfauna van den indo-australischen archipel. Dit voor oogen houdende zou men tot het besluit kunnen komen, dat uit de vischfauna der rivieren van Nieuw-Guinea niet veel te leeren valt, ten aanzien van de geschiedenis van dat eiland. Zoodanig besluit ware onjuist. Het blijkt toch, dat juist die visschen, die charakteristiek zijn voor de zoete wateren van Nieuw-Guinea voor één deel:

1. bij genera behooren, die men buitendien slechts van Australië kent (Pseudomugil, Rhombatractus, Melanotaenia, Eumeda);

2. voor een ander deel bij genera, die ten nauwste verwant zijn aan uitsluitend autralische genera. Zoo is Lambertia nauw verbonden met Eumeda; Glossolepis met Rhombatractus, terwijl de 3 nieuwe Apogon-soorten van Noord-Nieuw-Guinea zich aansluiten bij australische. Eindelijk vormen de van Nieuw-Guinea bekende Hemipimelodussoorten een eigen groep, die afwijkt van die uit den naburigen Indischen Archipel.

Al wat dus aan de zoetwater-fauna van Nieuw-Guinea een van den Indischen Archipel afwijkenden stempel geeft, is tevens characteristiek voor Australië. Twaalf van haar soorten (behoorende bij Pseudomugil, Rhombatractus, Melanotaenia, Glossolepis) behooren bij de familie of onderfamilie der Melanotaeniidae, die slechts uit Australië en Nieuw-Guinea bekend is.

Ik aarzel dan ook niet te beweren, dat de riviervisschen van Nieuw-Guinea uit 2 groepen bestaan fluviomarine, die indo-australisch of als men wil indo-pacifisch zijn en evengoed b.v. op Ambon of Celebes konden worden aangetroffen. In deze kategorie valt ook Rhiacichthys (Platyptera) novae-guineae Blgr., door Pratt in bergstroomen 4000 voet hoog in de Owen Stanley Range ontdekt. Boulenger noemt de ontdekking van een visch van het Genus Rhiacichthys, „so admirably adapted to life in mountain torrents" eene zeer belangrijke. Hij geeft op, dat de nauwverwante Rh. asper C. V. van Bantam, Celebes en Luzon bekend is. Allicht komt men hierdoor onder den indruk, dat men het bij Rh. novae-guineae met een visch te doen heeft, die geheel buiten deze kategorie valt en wiens naaste familielid

aan zoet water in streken, die meer bij het aziatische faunagebied behooren, gebonden is. Rh. asper, die maar weinig verschilt van Rh. novaeguineae is echter bovendien door BLEEKER van Sumatra en, wat veel belangrijker is, door GÜNTHER van de Wanderer Bay op het eiland Guadalcanar, Salomo-Eilanden, evenwel in „fresh water" opgegeven. In elk geval dus dicht bij zee. Dat geldt ook voor een vroegere mededeeling van mij, dat hij op Ambon werd aangetroffen, meer nog van het exemplaar, dat ik bij Balangnipa, in den benedenloop van den Tangka, kort voor de uitmonding in den golf van Boni, ving. Hier was het water reeds brak en stroomde langzaam. Rhiacichthys heeft dus een zeer wijde verspreiding, schuwt in elk geval brakwater niet, waarmede het voorkomen in Nieuw-Guinea in beteekenis verliest.

Een tweede groep: het charakteristieke element der fauna vormende, is tevens australisch. Deze laatste groep eischt verdere verklaring, wat haar oorsprong aangaat.

De hedendaagsche toestand, waarbij de Torresstraat Australië van Nieuw-Guinea scheidt, vormt door die straat een onoverkomelijke barrière, juist voor die groep, die ik charakteristiek noemde. Want al mogen ook enkele soorten van Rhombatractus en Melanotaenia tot den riviermond afzakken en zelfs zwak brakwater kunnen verduren, van de ongeveer 24 soorten kent men geen enkele uit zee. De barrière kan dus niet teniet gedaan worden door de groep van eilanden in de Torres-straat. Zij zijn daarvoor te arm aan zoetwater, te zeer koraaleilanden, daargelaten, dat zij onderling en vooral van Nieuw-Guinea en van Australië gescheiden zijn, door breede zeearmen met een hoog zoutgehalte en sterke getijstroomen. Het gelijktijdig voorkomen dier charakteristieke vormen én in Nieuw-Guinea én in Australië eischt dus het vroeger bestaan van eene vastere en uitgebreide verbinding. Die verbinding moet zoo ver van het heden verwijderd zijn, dat b. v. de representanten der straks genoemde Melanotaeniiden tijd hadden zich soortelijk te scheiden, wat feitelijk gebeurd is, want van de 12 Melanotaeniiden, die men thans reeds van Nieuw-Guinea kent en van de ongeveer 12, die uit het tropische en subtropische Australië beschreven zijn, is er geen een gemeenzaam, alhoewel enkele soorten slechts zeer geringe verschillen vertoonen. Lang geleden (naar geologische tijdrekening) kan het dus alweer niet zijn, dat de boven geeischte verbinding tusschen Nieuw-Guinea en Australië bestond. Taxatie van dien termijn ligt voorloopig op het gebied der hypothese. Als daarbij zoogeographisch, meer in het bizonder ichthyologisch sentiment een woord mag meespreken, zou ik het tijdstip dier landverbinding niet verder

willen zoeken, dan in het plioceen en hare verbreking in het pleistoceen, waarvoor wellicht ook andere zoologische overwegingen pleiten.

Op verre na is hiermede niet het laatste woord in deze materie gesproken. Wij mogen de hoop koesteren, dat de nieuwe expeditie naar Zuid-Nieuw-Guinea onder leiding van Mr. H. A. LORENTZ, die juist groote rivieren wil bevaren, nieuw licht zal verspreiden.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. J. ZWIERS: *„Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische beweging.* IV."

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

In de zitting dezer Akademie van 27 Januari 1906 werd mededeeling gedaan van mijn voorloopige onderzoekingen omtrent de storingen, die de komeet Holmes gedurende haar onzichtbaarheid van Januari 1900 tot Januari 1906 zou ondergaan, en tevens van een uitvoerige efemeride voor haar schijnbare plaatsen van 1 Mei tot 31 December 1906. Ook ditmaal heeft deze vooruitberekening weer tot haar ontdekking mogen leiden. Het vermoeden, dat er wegens den grooten afstand tot de aarde, en daaruit voortvloeiende lichtzwakte, in de eerste maanden weinig kans zou zijn voor haar waarneming, is door de uitkomst bevestigd. Eerst den 30sten Augustus van dit jaar ontving de Sterrewacht te Leiden het telegrafisch bericht, dat de komeet zich vertoonde op een fotografische opname, die prof. MAX WOLF op de sterrewacht te Koenigstuhl bij Heidelberg in den nacht van 28 op 29 Augustus genomen had van de streek van den hemel, waar zij zich volgens de berekening bevinden moest. De ruw uitgemeten plaats

$$\alpha = 61^\circ\ 51' \qquad \delta = +\ 42^\circ\ 28'$$

voor $13^h\ 52^m1$ plaatselijken tijd bleek in behoorlijke overeenstemming met de berekening.

Nog tweemaal daarna, op 25 September en op 10 October, heeft men te Koenigstuhl de plaats der komeet fotografisch bepaald, en telkens had prof. WOLF de vriendelijkheid, mij onmiddellijk mededeeling te doen van de plaatsen, zooals die na nauwkeurige uitmeting van de clichés verkregen waren. Ofschoon WOLF omtrent

de September-waarneming verklaarde[1]), dat de helderheid voldoende toegenomen was om de komeet ook in groote kijkers zichtbaar te doen zijn, is tot heden toe geen enkele visueele waarneming te mijner kennis gekomen. De drie Heidelberger platen vormen dus op het oogenblik het eenige materiaal, dat ter toetsing van de vroeger gegeven elementen en efemeride dienen kan. Ik deel hun uitkomsten hier mee, zóó als ik het genoegen had, ze van prof. Wolf te ontvangen.

1°. „Den Kometen Holmes habe ich auf der Platte von 28 August rechtwinklig an die 4 Sterne

A.G. Bonn 3456, 3462, 3472, 3493

angeschlossen, und die Messungen nach der Turner'schen Methode reduziert. Ich finde für 1906.0:

$\alpha = 4^h\ 7^m\ 34^s84$ $\qquad$ $\delta = +\ 42°\ 30'\ 59''9$

für die Aufnahmezeit: 1906 Aug. 28, $13^h\ 52^m1$ Kgst. Das äusserst schwache zentrale Kernchen wurde dabei eingestellt. Die Messung und Rechnung bezieht sich auf die mittleren Orte der 4 Sterne für 1906; sonst ist gar nichts angebracht."

(Schrijven van 5 September 1906).

2°. „Ich habe Ihren Kometen nochmals am 25 aufgenommen und finde ihn entschieden etwas heller. Den Ort nach Turner mit 3 Sternen (A.G. Bonn 3710, 3760, 3778) fand ich

1906 Sept. 25: $12^h\ 46^m0$ M.Z. Kgst.

$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 32^m\ 10^s02$ $\qquad$ $\delta_{1906.0} = +\ 47°\ 34'\ 54''6$

Ich habe auch den letzten Ort (von 28 Augustus) mit nur 3 Sternen nochmals gerechnet (weil ein Stern sehr ungünstig war) und fand für 1906 August 28: $13^h\ 52^m1$ Kgst.:

$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 7^m\ 35^s00$ $\qquad$ $\delta_{1906.0} = +\ 42°\ 30'\ 58''3$

Ich bin nicht sicher, ob diese Bestimmung aus 3 Sternen besser ist als die erst mitgeteilte." (Schrijven van 29 September 1906).

3°. „Herr Dr. Kopff hat gestern den Ort einer Aufnahme vom 10 Okt. 1906 des Kometen Holmes ausgemessen .....

1906 Okt. 10: $9^h\ 1^m0$ Kgst.

$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 34^m\ 48^s94$ $\qquad$ $\delta_{1906.0} = +\ 49°\ 54'\ 59''2$

Sterne: A.G. Bonn 3759, 3768, 3777..... Der Komet war

[1]) *Astron. Nachr.*, N°. 4123, S. 302.

diesmal schon recht schwach wahrnehmbar, schwächer als im September. Die Messung ist deshalb auch wohl etwas unsicherer."

(Schrijven van 13 October 1906).

Wat de waarneming op 28 Augustus betreft, heb ik aan de aansluiting op 3 sterren de voorkeur gegeven.

Voor de herleiding op schijnbare plaats heb ik, evenals vroeger bij de efemeride, gebruik gemaakt van de constanten van den Nautical Almanac, waarbij de kortperiodische termen weggelaten zijn. De zonneparallaxis op 8″80 aannemende, vind ik voor de sterrewacht te Heidelberg de volgende constanten:

$$\lambda = -\ 0^h34^m54^s8$$
$$tg\,\varphi' = 0.06404$$
$$A = 9.58267$$
$$D = 0.82425$$

waarmee de parallactische correctie's van de komeet gerekend zijn. De volgende tabel geeft een overzicht van de herleide waarnemingen.

TABEL I.

N°.	Herl. op sch. pl.		Parallaxis		Schijnbare geoc. plaats	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	α	δ
	s	″	s	″	h m s	° ′ ″
1	+ 1.888	—8.55	— 0.191	+1.24	4 7 36.697	+42 30 50.99
2	+ 2.929	—8.57	— 0.217	+0.92	4 32 12.732	+47 34 46.95
3	+ 3.593	—7.51	— 0.298	+2.35	4 34 52.235	+49 54 54.04

Voor de vergelijking met de efemeride heb ik gebruik gemaakt van mijn oorspronkelijke berekeningen, die zoowel in α als in δ één decimaal meer bevatten dan de in druk verschenen waarden. De berekende plaatsen en hun vergelijking met de bovenstaande waarnemingen zijn in de volgende tabel opgenomen.

TABEL II.

Plaatselijke tijd	Aberratie-tijd.	Berek. schijnbare plaats		Waarn.—Berek.	
		α	δ	α	δ
	d	h m s	° ′ ″	s	″
Aug. 28.553602	0.013211	4 7 29.753	+42 30 24.28	+6.94	+26.7
Sept. 25.507699	.012005	4 32 4.255	+47 34 29.94	+8.48	+17.0
Oct. 10.351449	.011462	4 34 43.017	+49 54 43.02	+9.22	+11.0

Tegelijk met de efemeride heb ik vroeger een tabel meegedeeld van de veranderingen, die de rechte klimming en declinatie ondergaan zouden, als men den doorgangstijd door het perihelium in de eene of andere richting 4 dagen wijzigt. Vergelijkt men de bovenstaande waarden $W—B$ met de getallen dier tabel, dan ziet men, dat door een iets vervroegden doorgangstijd de overeenstemming van Waarn. en Berek. althans in α vrijwel te bereiken zal zijn. De afwijkingen in δ leenen zich minder hiertoe; de veranderingen toch, die δ bij een vervroeging van T ondergaat, zijn steeds veel kleiner dan die in α, maar in 't bijzonder is dit het geval in de periode, waarover zich de waarnemingen uitstrekken. Wel is echter uit de tabel voor $\Delta T = -4$ dagen op te maken, dat de positieve fouten in δ door wijziging van T niet geheel zullen verdwijnen.

Door een ruwe interpolatie leidde ik uit de 3 verschillen $W—B$ in rechte klimming de volgende correcties af voor den doorgangstijd door het perihelium:

waarn. van	28 Aug.:	$\Delta T = -0.0900$	dag
„ „	25 Sept.:	-0.0916	„
„ „	10 Oct.:	-0.0896	„

Gemiddeld wordt $\Delta T = -0.0904$ dag, wat bij een middelbare dagelijksche beweging van 517″448 correspondeert met een vergrooting der middelbare anomaliën van 46″8.

Als eersten stap tot verbetering van de aangenomen baanelementen heb ik daarom de 3 plaatsen berekend 1° in de onderstelling, dat alle middelbare anomaliën 40″, — 2° dat zij alle 50″ grooter zouden zijn. De zonnecoordinaten ten opzichte van het middelbaar aequinoctium van 1906.0 heb ik uit den Naut. Almanac geïnterpoleerd.

TABEL III.

1906	X	Y	Z
Aug. 28.540391	— 0.9134887	+ 0.3947635	+ 0.1712510
Sept. 25.495694	— 1.0018399	— 0.0318699	— 0.0138250
Oct. 10.339987	— 0.9565810	— 0.2616405	— 0.1135029

Ter herleiding op schijnbare plaats is aan de middelbare coördinaten der komeet aangebracht in $\alpha : f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta$, en in $\delta : g \cos(G + \alpha)$. De volgende tabel geeft de berekende schijnbare plaatsen der komeet in beide onderstellingen.

TABEL IV.

N°.	$\Delta M = +40''$		$\Delta M = +50''$	
	α	δ	α	δ
	h m s	° ′ ″	h m s	° ′ ″
1	4 7 35.758	+ 42 30 34.72	4 7 37.266	+ 42 30 37.38
2	4 32 11.451	+ 47 34 31.46	4 32 13.248	+ 47 34 31.85
3	4 34 51.050	+ 49 54 42.20	4 34 53.060	+ 49 54 41.99

Een voldoende controle wordt hier verkregen door de vergelijking der waarden voor $\Delta M = 0''$ (efemeride), $\Delta M = +40''$ en $\Delta M = +50''$.

Door vergelijking met de waargenomen schijnbare, geocentrische plaatsen krijgt men de volgende verschillen $W - B$:

TABEL V.

	$\Delta M = +40''$		$\Delta M = +50''$	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	″	s	″
1	+ 0.939	+ 16.27	− 0.569	+ 13.61
2	+ 1.281	+ 15.49	− 0.516	+ 15.10
3	+ 1.185	+ 11.84	− 0.825	+ 12.05

Door interpolatie tusschen de waarden van $\Delta\alpha$ vindt men hieruit als middelwaarde: $\Delta M = +46''412$, met de volgende resteerende fouten :

N°.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	″
1	− 0.03	+ 14.7
2	+ 0.13	+ 15.2
3	− 0.10	+ 11.9

Hieruit blijkt, dat door een wijziging van M alleen wel aan de verschillen in α, maar niet voldoende aan die in δ kan worden voldaan. Van wijzigingen in π, φ of μ kon van te voren gezegd

worden, dat geen verdere verbetering te verwachten was; over deze elementen zal ik aan het slot nog een enkel woord zeggen. Anders echter is het met wijzigingen in de ligging van het baanvlak, dus van i en Ω, en daarom heb ik het verband nagegaan, dat tusschen deze, en de berekende plaatsen der komeet bestaat. Daar de rekening met $\Delta M = + 50''$ het dichtst bij de waarheid scheen te komen, heb ik daaraan v en r ontleend, en hiermee opnieuw de plaatsen der komeet berekend in de onderstelling 1°: dat i 10″ grooter was; 2°: dat de lengte van den knoop 10″ kleiner was. Wellicht was voor de tweede onderstelling een iets grooter correctie wenschelijk geweest. De volgende tabel geeft de wijzigingen, die α en δ in beide gevallen ondergaan.

TABEL VI.

N°.	$\Delta i = +10''$		$\Delta \Omega = -10''$	
	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$
	s	″	s	″
1	— 0.149	+ 10.00	+ 0.040	+ 1.26
2	— 0.108	+ 11.95	+ 0.067	+ 0.83
3	— 0.111	+ 12.88	+ 0.080	+ 0.56

De getallen uit de tabellen V en VI geven de volgende waarden van de differentiaalquotienten van α en δ naar M, i en Ω, die als coefficienten in de foutenvergelijkingen dienst zullen doen:

	Aug. 28	Sept. 25	Oct. 10
$\frac{\partial \alpha}{\partial M}$	+ 0.1508	+ 0.1797	+ 0.2010
$\frac{\partial \delta}{\partial M}$	+ 0.266	+ 0.039	— 0.021
$\frac{\partial \alpha}{\partial i}$	— 0.0149	— 0.0108	— 0.0111
$\frac{\partial \delta}{\partial i}$	+ 1.000	+ 1.195	+ 1.288
$\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}$	— 0.0040	— 0.0067	— 0.0080
$\frac{\partial \delta}{\partial}$	— 0.126	— 0.083	— 0 056

Hierbij is de tijdsecunde voor α en de boogsecunde voor alle andere grootheden als eenheid genomen.

De foutenvergelijkingen in α werden vermenigvuldigd met 15 $\cos \delta$, en in plaats van $\Delta \Omega$ werd $\frac{\Delta \Omega}{10}$ als onbekende ingevoerd.

Foutenvergelijkingen.

a. Uit de Rechte Klimmingen

$$0.22202\,\Delta M + 9.21681_n\,\Delta i + 9.64568_n \frac{\Delta \Omega}{10} = 0.79873_n$$

$$0.25966 \;\;,, \;\; + 9.03853_n \;\;,, \;\; + 9.83118_n \;\;,, \;\; = 0.71776_n$$

$$0.28811 \;\;,, \;\; + 9.03023_n \;\;,, \;\; + 9.88800_n \;\;,, \;\; = 0.90136_n$$

b. Uit de Declinaties

$$9.42488\,\Delta M + 0.00000\,\Delta i + 0.10037_n \frac{\Delta \Omega}{10} = 1.13386$$

$$8.59106 \;\;,, \;\; + 0.07737 \;\;,, \;\; + 9.91908_n \;\;,, \;\; = 1.17898$$

$$8.32222_n \;\;,, \;\; + 0.10992 \;\;,, \;\; + 9.74819_n \;\;,, \;\; = 1.08099$$

De coefficienten zijn logarithmisch; de tweede leden zijn ontleend aan kolom 4 en 5 van tabel V, zoodat de te vinden ΔM verbonden moet worden met de correctie van $+ 50''$.

Uit bovenstaande foutenvergelijkingen worden op de bekende wijze de volgende normaalvergelijkingen gevonden:

$$+ 9.9278\,\Delta M - 0.39596\,\Delta i - 3.8260 \frac{\Delta \Omega}{10} = - 31.495$$

$$- 0.39596 \;\;,, \;\; + 4.1375 \;\;,, \;\; - 2.7434 \;\;,, \;\; = + 49.637$$

$$- 3.8260 \;\;,, \;\; - 2.7434 \;\;,, \;\; + 3.8423 \;\;,, \;\; = - 23.951$$

Deze vergelijkingen worden eenvoudiger, wanneer men, behalve ΔM, slechts één der beide andere onbekenden invoert. Wil men bijv. trachten door variatie alleen van M en i de waarnemingen voor te stellen, dan wordt niet alleen $\Delta \Omega = 0$, maar vervalt de 3e vergelijking.

1°. *Oplossing met* $\Delta \Omega = 0$.

De vergelijkingen geven

$$\Delta M = - \;\; 2''\,7042$$

$$\Delta i \;\; = + 11.74$$

en de overblijvende fouten worden:

1.	$\Delta \alpha = + 0^s014$	$\Delta \delta = + 2''59$
2.	$= + 0.097$	$+ 1.18$
3.	$= - 0.151$	$- 3.13$

2°. *Oplossing met* $\Delta i = 0$.

In dit geval vindt men :

$$\Delta M = - \quad 9''0461$$
$$\Delta \Omega = - 2'32''41$$

en als overblijvende fouten :

1.	$\Delta\alpha = + 0^s185$	$\Delta\delta = - 3''18$
2.	$+ 0.089$	$+ 2.80$
3.	$- 0.226$	$+ 3.32$

3°. *Oplossing met de* 3 *onbekenden.*

Deze oplossing geeft :

$$\Delta M = - \quad 5''3045$$
$$\Delta i = + \quad 7.32$$
$$\Delta \Omega = - 1' 2.90$$

en er blijven volgens de foutenvergelijkingen de volgende verschillen Waarn. — Berek. over :

1.	$\Delta\alpha = + 0^s088$	$\Delta\delta = - 0''23$
2.	$+ 0.095$	$+ 1.34$
3.	$- 0.181$	$- 1.01$

Zooals men ziet, voldoen de oplossingen met ΔM en Δi, en die met ΔM en $\Delta\Omega$ beide redelijk wel aan de waarnemingen, de eerste echter iets beter, vooral in rechte klimming. Toch blijft bij beide oplossingen nog een zekere gang in de overblijvende declinatiefouten niet te miskennen. Daarom geef ik voorloopig de voorkeur aan de oplossing met drie onbekenden, waarbij geen systematische gang in de fouten overblijft. Als meest plausibele elementen voor den terugkeer van 1906 beschouw ik dus de volgende :

Epoche 1906 Januari 16.0 M.T. Greenw.

$$M_0 = 1266456''838$$
$$= 351°47'36''838$$
$$\mu = 517''447665$$
$$\log a = 0.5574268$$
$$T = 1906 \text{ Maart } 14.09401$$
$$\varphi = 24°20'25''55$$
$$e = 0.4121574$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 20°49'\ 0''62 \\ \pi = 346\ \ 2\ 31.63 \\ \Omega = 331\ 44\ 37.85 \end{array}\right\} 1906.0$$

Men zal echter inzien, dat uit den aard der zaak de zekerheid van deze elementen niet vergeleken kan worden met die, welke ik voor vroegere verschijningen der komeet heb kunnen afleiden. Vooreerst omvatten de waarnemingen slechts een tijdsverloop van 43 dagen, waarin de komeet met haar grooten periheliumafstand slechts een heliocentrischen boog van nog geen 12° heeft afgelegd. Ten tweede zijn 3 waarnemingen met hun onvermijdelijke onvolkomenheden in het algemeen slechts voldoende om een benaderd denkbeeld te krijgen van de baan. Het mag reeds worden beschouwd als een bewijs voor de bekwaamheid en nauwgezetheid der Heidelberger waarnemers, dat met hun kortfocale fotografische opnamen van een visueel nog geheel onzichtbaar neveltje, een nauwkeurigheid te bereiken was, vergelijkbaar met die van micrometer-metingen bij honderden malen helderder voorwerpen. Toch vergete men niet, dat reeds de verwerping van één der 4 vergelijkingssterren op de plaats van 28 Augustus een invloed had van 0^s16 in α en $1''6$ in declinatie, of van $2''39$ in boog van een grooten cirkel.

Als proef op de som heb ik de 3 waarnemingen ten slotte door directe berekening uit de gevonden elementen afgeleid.

Heliocentrische aequatoriale coördinaten:

$$x = [9.993\ 7648.63]\ sin\ (v + 77°37'28''36)$$
$$y = [9.876\ 2140.59]\ sin\ (v - 20\ 58\ 46.82)$$
$$z = [9.832\ 7020.56]\ sin\ (v - 1\ 46\ 46.76)$$

De volgende tabel bevat de hiermee berekende schijnbare plaatsen der komeet, en de verschillen W—B.

TABEL VII.

N°.	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	h m s	° ′ ″	s	″
1	4 7 36.602	+ 42 30 51.32	+ 0.095	— 0.33
2	4 32 12.633	+ 47 34 45.69	+ 0.099	+ 1.26
3	4 34 52.412	+ 49 54 55.19	— 0.177	— 1.15

De overeenstemming tusschen deze direct gevonden verschillen, en de door substitutie in de foutenvergelijkingen verkregen waarden, is een voldoende controle op de geheele rekening.

De elementen μ, π en φ.

De elementen, waarop de voor 1906 gegeven efemeride berust,

zijn die van „Système VII" op p. 78 van mijn Deuxième Mémoire, door aanbrenging der Jupiterstoringen op 1906 herleid. De middelbare fout der daar gevonden waarde van μ is zoo klein, dat het, hoewel niet absoluut onmogelijk, toch zeer onwaarschijnlijk is, dat de gevonden correctie voor de middelbare anomalie geheel of zelfs grootendeels door een fout in μ verklaard kon worden. Rekent men, dat de gevonden ΔM eigenlijk geldt voor de middelste waarneming, dus voor 25 September, dan zou men hebben:

$$\Delta\mu = +\frac{44''\,6955}{2662.50} = +\,0''\,016787$$

zoodat de werkelijke fout van μ 67 maal grooter zou zijn dan de middelbare. De middelbare anomaliën voor 28 Augustus en 10 October zouden dan respectievelijk slechts $0''\,469$ kleiner en $0''\,249$ grooter worden dan de aangenomene.

Veeleer is het aan te nemen, dat de gevonden correctie van M ontstaan is door de verwaarloosde storingen van dat element, met name door Saturnus. Deze storing heeft den vorm

$$\Delta M = \int_{t_0}^{t} \frac{dM}{dt}\,dt + \int\int_{t_0}^{t} \frac{d\mu}{dt}\,dt^2.$$

Zelfs als men de waarde van beide termen afzonderlijk kende in plaats van hun som, ook dan nog zou het onmogelijk zijn, uit de waarde van het dubbelintegraal te besluiten tot de eindwaarde van $\int \frac{d\mu}{dt}\,dt$, d.i. tot de correctie van μ voor 1906. Eerst waarnemingen, die zich over veel langer periode uitstrekken, kunnen hieromtrent beslissen.

Iets dergelijks geldt van π en φ. Voor het korte tijdvak, door de waarnemingen omvat, kan zelfs een willekeurig deel van de correctie van M vervangen worden door een wijziging van de twee genoemde elementen. Houden we het baanvlak vast, dan hangt de schijnbare plaats van het hemellichaam, behoudens kleine veranderingen in den radius-vector, die nabij de oppositie van minder invloed zijn, geheel af van de lengte in de baan, dus van

$$l = \pi + v.$$

Men zal dus aan de elementen willekeurige kleine wijzigingen kunnen aanbrengen, zonder de berekende plaatsen merkbaar te veranderen, als slechts

$$\Delta l = \Delta\pi + \Delta v = 0$$

dus

$$\Delta \pi = - \Delta v.$$

Deze betrekking doet het middel aan de hand, om een deel van de voor M gevonden correctie op π of φ, of beide gezamenlijk te werpen. Voor het 1e geval heeft men te voldoen aan

$$\Delta \pi = - \frac{\partial v}{\partial M} \Delta M.$$

De waarden van $\frac{\partial v}{\partial M}$ zijn direct af te leiden door vergelijking van de twee vroegere rekeningen met $\Delta M = + 40''$ en $\Delta M = + 50''$. Zoodoende vind ik voor de drie waarnemingsdagen :

$$\begin{aligned} \Delta M = & - 0.506 \, \Delta \pi \\ & - 0.549 \, \Delta \pi \\ & - 0.573 \, \Delta \pi \end{aligned}$$

Houdt men π constant, en wil men een deel der correctie van M vervangen door een wijziging van φ, dan moet

$$\Delta v = 0$$

dus

$$\Delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_{v \text{ const.}} \Delta \varphi.$$

De waarden van $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_{v \text{ const.}}$ heb ik afgeleid door uit de drie waarden van v met een gewijzigde excentriciteit de bijbehoorende waarden der middelbare anomalie te berekenen. Dit gaf mij voor de drie waarnemingsdagen :

$$\begin{aligned} \Delta M = & - 1.040 \, \Delta \varphi \\ & - 1.186 \, \Delta \varphi \\ & - 1.260 \, \Delta \varphi \end{aligned}$$

Hoewel de coefficienten zoowel van $\Delta \pi$ als van $\Delta \varphi$ op een eenigszins veranderlijken invloed van die elementencorrecties wijzen, komt praktisch die invloed nog te veel overeen met een constante wijziging van M, om bij het spaarzame materiaal een scheiding toe te laten.

Leiden, November 1906.

Scheikunde. — De Heer P. v. Romburgh biedt eene mededeeling aan van Dr. N. H. Cohen. *„Over het lupeol"* [1]).

(Mede aangeboden door den Heer Holleman)

Trots de vele en fraaie onderzoekingen van verschillende chemici is de structuur van het, ook uit physiologisch oogpunt, belangrijke cholesterine nog verre van bekend. Daarom stelde prof. van Romburgh mij voor een daarmede nauw verwante stof en wel lupeol, een phytosterine, nader te onderzoeken. De phytosterinen toch kunnen met de cholesterinen tot één groep, de cholesterineachtige lichamen, gerekend worden. Oorspronkelijk was 't de bedoeling het alstol, door Sack [2]) in bresk [3]) gevonden, te bestudeeren. Uit door mij onderzochte bresk werden echter niet alstol, alstonine en isoalstonine, welke Sack er in meent gevonden te hebben, afgezonderd, maar α- en β-amyrine en lupeol. Later bleek, dat het alstol van Sack geen chemisch individu is.

Lupeol werd het eerst gevonden door Likiernik [4]) in de schillen van lupinezaden; daarna trof Sack [5]) het aan in den bast van Roucheria Griffithiana, terwijl van Romburgh en van der Linden [6]) het in de hars van Palaquium calophyllum, als cinnamaat, aantoonden. Eindelijk bewees van Romburgh, dat het krystalalbaan van Tschirch [7]) niets anders dan lupeolcinnamaat was. Het lupeol werd uit de bresk bereid door deze eerst met alcohol uit te trekken. Bij bekoelen zette zich hieruit een witte massa af, die zonder verder zuiveren met alcoholische kali verzeept werd. Het verzeepte product werd daarop met benzoylchloride en pyridine gebenzoyleerd, en het reactieproduct herhaaldelijk met aceton behandeld door op het waterbad tot even opkoken van de vloeistof te verhitten en dan snel af te filtreeren.

Ten slotte bleef lupeolbenzoaat achter, dat, na herhaaldelijk omkrystalliseeren uit aceton, bestond uit mooie, platte naalden, smp. 265-266°, gecorr. 273-274°.

Gev. C	83.71	83.81	Ber. voor C_{38} H_{54} O_2	84.07
H	10.41	10.36		10.03

Deze, zoowel als alle volgende, elementairanalyses, werden met loodchromaat uitgevoerd.

---

[1]) Uitvoeriger beschrijving, Diss. N. H. Cohen. 1906, Utrecht.
[2]) Sack. Diss. 1901, Göttingen.
[3]) Bresk of djeloetoeng is het ingedroogde melksap van eenige Dyera-soorten.
[4]) Ztschr. f. physiol. Chem. **15**. 415 (1891).
[5]) Sack l. c.
[6]) Ber. **37**. 3440 (1904).
[7]) Arch. der Pharm. **241**. 653 (1903).

$[\alpha]_D = + 60°,75$ in chloroform.

Door verzeepen van het lupeolbenzoaat met alcoholische kali en omkrystalliseeren uit alcohol of aceton, werd het lupeol in den vorm van mooie, lange naalden, smp. 211°, gecorr. 215°, verkregen.

Gev.	C	84.62	84.65	84.40	84.50	Ber. voor $C_{31} H_{50} O$ 84.85
	H	11.78	11.93	11.82	12.02	11.49

$[\alpha]_D = + 27°,2$ in chloroform.

In de eerste plaats scheen 't mij van belang om na te gaan of in lupeol dubbele bindingen voorkomen. Daartoe werd lupeol, in zwavelkoolstofoplossing, met broom, eveneens in zwavelkoolstof opgelost, behandeld. Er ontwikkelde zich broomwaterstof. Door omkrystalliseeren van het reactieproduct uit methylalcohol, scheidden zich naalden met één mol. krystalmethylalcohol af. Het smeltpunt van deze stof, op 100° gedroogd, was 184°, gecorr. 185°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	Ber. voor $C_{31} H_{49} OBr$.
C	72.14	72.30						71.90
H	10.26	10.07	Carius			Liebig		9.55
Br			14.48	14.50	15.40	15.07	14.67	15.45

$[\alpha]_D = + 3°,8$ in chloroform.

Er was dus waarschijnlijk een monosubstitutieproduct ontstaan. Daarop trachtte ik van het benzoaat een additieproduct te verkrijgen. Opgelost in een mengsel van ijsazijn en zwavelkoolstof, gaf dit met broom, in ijsazijn opgelost, na verdampen van de zwavelkoolstof aan de lucht, mooie blaadjes. Door uittrekken van dit product met kokende aceton, bleef een moeilijker oplosbare stof achter, die een *monobromide* bleek te zijn. Na herhaald omkrystalliseeren uit aethylacetaat verkreeg ik fraaie, dikke krystallen, die onder ontleding smolten. Bij 240° in het bad geplaatst, was het smeltp. 243°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C	72.62	72.90	72.58	72.46	72.59					
H	8.85	8.88	8.72	9.09	8.84	Carius			Liebig	
Br						13.14	13.04	12.97	13.40	13.01

Ber. $C_{38} H_{53} O_2 Br$, C = 73.38, H = 8.61, Br. = 12.87.

$[\alpha]_D = + 44°,9$ in chloroform.

Het broomatoom bevindt zich in de lupeolkern, daar door verzeepen een broomhoudende alcohol en benzoëzuur ontstaan.

Het makkelijker oplosbare gedeelte krystalliseert uit aceton in mooie blaadjes, Het is eveneens een monobromide, kon echter niet met zekerheid als een chemisch individu gekarakteriseerd worden.

Eén van de middelen, om de structuur van een lichaam op 't spoor te komen, is geleidelijke afbreking door oxydatie.

Het lupeol werd daarom met het mengsel van KILIANI[1]) geoxydeerd. Lupeol, opgelost in benzol, werd met een afgewogen hoeveelheid oxydatievloeistof, 6 atomen zuurstof berekend op één mol. lupeol, geschud. Titraties van de oxydatievloeistof met kaliumjodide en thiosulphaat maakten uit, dat na 6 uur één atoom zuurstof verbruikt was en dat verder de hoeveelheid chroomzuur niet meer verminderde en dus quantitatief één atoom zuurstof werd opgenomen. Het oxydatieproduct, dat uit alcohol in mooie, dikke naalden krystalliseerde, smolt bij 169°, gecorr. 170° en bleek een *keton* te zijn, waaraan ik den naam *lupeon* gaf.

Gev. C 84.95 84.91 85.07 84.76 Ber. voor $C_{31}H_{48}O$ 85.24
H 11.64 11.81 11.62 11.61 11.59 11.09

$[\alpha]_D = +63°,1$ in chloroform.

Dr. JAEGER was zoo welwillend den krystalvorm van het lupeon na te gaan. Het behoort tot de rhombisch-bipyramidale klasse. Een volledige beschrijving zal elders verschijnen.

Met hydroxylamine werd een oxim van het lupeon verkregen, dat zeer moeilijk in alcohol oplosbaar is.

Uit aethylacetaat omgekrystalliseerd, vormt het witte, zachte, lichte naalden, die onder ontleding smelten.

Bij 278° in het bad gebracht, smelten zij bij 278°,5.

Gev. C 81.98 ber. voor $C_{31}H_{48}NOH$ 82.41
H 11.44 met loodchr. 10.94
N 3.08 3.11

$[\alpha]_D = +20°,5$ in chloroform.

Broom, opgelost in ijsazijn, gaf met lupeon, in ijsazijn opgelost, onder broomwaterstofontwikkeling, een dibromide, dat zich uit de ijsazijn afzette.

Omgekrystalliseerd uit een mengsel van benzol en ijsazijn, waren het mooie, harde naalden, die onder ontleding smolten. Bij 253° in het bad gebracht, was het smp. 254°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C	62.31	62.71	62.50	62.30						
H	8.13	8.26	8.05	8.06	CARIUS		LIEBIG			
Br					26.88	26.91	27.08	26.85	27.35	27.23

Ber. voor $C_{31}H_{46}OBr_2$, C = 62.58, H = 7.80, Br = 26.90.

$[\alpha]_D = +21°,4$ in chloroform.

Opgelost in aether gaf lupeon met cyaanwaterstof, onder den invloed van een spoor ammoniak, een cyaanhydrine, dat zich na

[1]) Ber. **34**. 3564 (1901).

eenigen tijd in den vorm van mooie, dikke naalden afzette. Deze stof ontleedt zich bij hoogere temperatuur en bij het smelten. Bij 192° in het bad geplaatst, smolt het bij 194°. Door de cyaanwaterstof, die door verhitten vrij komt, in kaliloog op te vangen en deze met zilvernitraat te titreeren, kon aldus het stikstofgehalte bepaald worden.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	Ber. voor $C_{32} H_{49} ON$
C	82.63	82.76						82.86
H	11.25	11.26	koperoxyde		loodchromaat	getitreerd		10.66
N			3.92	3.94	3.30	2.87	2.70	3.03

Eén mol. cyaanhydrine gaf met één mol. aethylalcohol en één mol. zoutzuur een stof, die bij 230° in het bad geplaatst bij 235° smolt, deze was echter, zooals de elementairanalyse uitmaakte, niet de te verwachten aethylester van het correspondeerende zuur. Deze stof is niet verder onderzocht.

Lupeolbenzoaat op dezelfde wijze als lupeol met het mengsel van KILIANI behandeld, bleef onveranderd, evenals lupeon, dat, in benzol opgelost, bij 40° gedurende 4 uur daarmede geroerd werd.

Door inwerking van chroomzuuranhydride bij hoogere temperatuur op lupeon ontstonden zure producten, die niet krystallijn konden verkregen worden.

Het neutrale oxydatieproduct van lupeol met kaliumpermanganaat en zwavelzuur was een mengsel, dat zich uiterst moeilijk liet scheiden. Behalve lupeon kon er geen „einheitliche" stof uit afgezonderd worden. Daar SENKOWSKI [1]) uit cholzuur, door verhitten met alkalisch permanganaat, phtaalzuur verkreeg, behandelde ik 23 gram lupeol op dezelfde wijze. Het werd echter geheel weggeoxydeerd. Dit pleit dus *niet* voor een *benzolkern* in het lupeol.

Door oxydatie van lupeolacetaat in azijnzuur met chroomzuur verkreeg ik een product, waarvan de elementairanalyses getallen gaven, die voldoende overeenstemmen met de berekende waarden voor $C_{33} H_{52} O_4$.

Bij 285° in het bad geplaatst, smolt het bij 295° na sinteren tot een donkerbruine massa.

In alcoholische oplossing kleurde deze stof blauw lakmoes niet rood, ook niet bij verdunnen met water, toch liet ze zich zeer gemakkelijk titreeren met alcoholische kali, met phenolphtaleïne als indicator. Aannemende, dat één mol. één mol. KOH verbruikt, werd het M.G. uit deze titraties gevonden op 521 en 524; ber. voor $C_{33} H_{52} O_4$, M.G. = 512,5

[1]) Monatsch. f. Chem. 17. 1 (1896).

Gev. C 77.59 77.23 76.87 77.24 Ber. voor C_{33} H_{52} O_4 77.28
H 10.75 10.49 10.09 10.79 10.23

Door verzeepen met alcoholische kali werd hieruit een stof verkregen, die uit aether in naalden krystalliseerde. Bij 260° in het bad gebracht, was het smp. 263—265°. Ten opzichte van lakmoes gedraagt deze stof zich evenals het onverzeepte product, terwijl het weer met alcoholische kali en phenolphtaleïne te titreeren is. Uit deze titraties werd voor het M.G. gevonden 452 en 461 ; ber. voor C_{31} H_{50} O_3, M.G. = 470,5

Gev. C 78.42 78.61 Ber. voor C_{31} H_{50} O_3 79.08
H 11.07 11.05 10.71

De kaliumverbinding van deze stof is in alcohol moeilijk oplosbaar en krystalliseert hieruit in naalden.

Door behandelen van het verzeepte zoowel als het onverzeepte oxydatieproduct werd eenzelfde product verkregen, dat een di-geacetyleerd lichaam schijnt te zijn. De elementairanalyses gaven echter nogal uiteenloopende waarden ; wat daarvan de oorzaak was, heb ik nog niet kunnen vaststellen.

Gev. C 75.39 74.71 75.65 74.96 74.47 Ber. voor C_{35} H_{54} O_5 75.75
H 10.12 10.16 10.51 10.24 9.81

Door koken met overmaat alcoholische kali en terugtitreeren met alcoholisch zwavelzuur werd voor het M. G. gevonden 549, aannemende, dat zich in het molecule twee acetylgroepen bevinden. Ber. C_{35} H_{54} O_5, M. G. = 554.5

Het is wenschelijk deze, voor de kennis van het lupeol zoo belangrijke, oxydatieproducten nog nader te onderzoeken, alvorens een verklaring te geven van hun ontstaan.

Door natrium en kokenden amylalcohol werd lupeol niet gereduceerd, terwijl lupeon door natrium en aethylalcohol weer tot lupeol werd. Zoo lupeon dus een dubbele binding heeft zal deze wel niet $\alpha\beta$ ten opzichte van de carbonylgroep staan.

Noch lupeol, noch lupeolacetaat werden in kokenden aceton door kaliumpermanganaat aangetast. Dit gedrag zou dus niet voor een dubbele binding in lupeol pleiten, echter kon deze door middel van de jodiumoplossing van HÜBL vrij zeker in lupeol en lupeon aangetoond worden. Het oxydatieproduct C_{32} H_{52} O_4 bleek daarentegen de dubbele binding niet meer te bevatten. Op grond van de verschillende elementairanalyses en broombepalingen, vooral van dibroomlupeon, houd ik C_{31} H_{50} O voor de meest waarschijnlijke formule voor lupeol. De formule C_{26} H_{42} O, die LIKIERNIK [1]) en SACK [2]) geven, is zeker niet goed.

Utrecht, Org. Chem. Lab. d. Univ.

[1]) LIKIERNIK l. c.
[2]) SACK l. c.

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van Dr. N. H. COHEN: *„Over α- en β-amyrine uit bresk".*[1])

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

Over het β-amyrine, dat als acetaat in bresk of djeloetoeng aanwezig is, zijn reeds mededeelingen gedaan, (Versl. Koninkl. Akad. v. Wet. 1905, blz. 544). Sinds werd nog door mij het β-amyrinecinnamaat bereid. Uit aceton krystalliseert dit in kleine naaldjes, die bij 236,°5, gecorr. 241° smelten.

Behalve β-amyrine en lupeol werd uit de bresk nog een stof verkregen, die identiek bleek te zijn met het door VESTERBERG gevonden α-amyrine.

Deze stof krystalliseert uit alcohol in lange, dunne naalden, smp. 185°, gecorr. 186°. VESTERBERG geeft op smp. 181—181°,5.

Gev. C 84.22 84.30 Ber. voor $C_{30}H_{50}O$ 84.43
H 11.91 12.02 11.82

Deze, evenals alle volgende elementairanalyses, zijn met loodchromaat uitgevoerd.

$[\alpha]_D = +82°,6$ in chloroform; in benzol werd gevonden, $[\alpha]_D = +88°,2$.[2])

Van het α-amyrine werden ter karakteriseering verschillende esters gemaakt.

Het α-amyrineacetaat werd door verhitten met azijnzuuranhydride en natriumacetaat verkregen.

Uit alcohol omgekrystalliseerd, vormt het naaldvormige blaadjes, smp. 220—221°, gecorr. 224—225°. VESTERBERG geeft op voor het α-amyrineacetaat, smp. 221°.

Gev. C 81.85 82.27 81.79 ber. voor $C_{32}H_{52}O_2$ 81.98
H 11.34 11.40 11.33 11.19

$[\alpha]_D = +75°,8$ in chloroform.

Het α-amyrinebenzoaat werd verkregen met behulp van benzoylchloride en pyridine. Uit aceton krystalliseerde het in lange, prismatische naalden; smp. 192°, gecorr. 195°. VESTERBERG geeft op, smp. 192°.

Het α-amyrinecinnamaat, dat nog niet beschreven is, werd m.m. verkregen als het α-amyrinebenzoaat. Uit aceton herhaaldelijk omgekrystalliseerd, vormt het harde naaldjes, die bij 176,5—177°, gecorr. 178°, smelten.

Utrecht. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

---

1) Uitvoeriger beschrijving, Diss. N. H. COHEN. 1906, Utrecht.

2) VESTERBERG vond in benzol $[\alpha]_D = +91°,6$.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen.*

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM.)

§ 1. De hier bestudeerde verbindingen behooren tot de reeks der vetzure cholesteryl-esters, waaromtrent ik reeds vóór korten tijd mededeeling heb gedaan [1]). Zij kunnen als aanvulling der daar gesyntheseerde esters beschouwd worden, en omvatten: *Cholesteryl-Heptylaat, -Nonylaat, -Lauraat, -Myristaat, -Palmitaat* en *-Stearaat.* De *palmitine*-zure ester is, naar bekend is, ook fysiologisch van beteekenis, daar hij, nevens het *Oleaat* (Smpt. 43° C.) standvastig in het *bloedserum* voorkomt [2]).

Ik heb deze verbindingen bereid, door samensmelten van gelijke gewichtshoeveelheden zuiver cholesterine en vetzuur, en zuivering door gefraktioneerde kristallisatie uit mengsels van aether en alkohol, of van aethylacetaat en alkohol. Bijzonderheden zal ik later, in een uitvoeriger opstel in 't Receuil, mededeelen. De stoffen werden als zuiver beschouwd, als hunne karakteristieke temperatuurgrenzen en de daarbij optredende, typische omzettingen, óók na nògmalig omkristalliseeren, onveranderd tot in bijzonderheden bleven, terwijl de vaste fase mikroskopisch bovendien geene heterogene bestanddeelen meer bleek te bevatten.

De meesten dezer esters werden verkregen in den vorm van prachtigschitterende, als visch-schubben uitziende, zeer buigzame, plaatvormige kristallen; enkelen, o.a. het *heptylaat* en het *lauraat*, kristalliseeren in harde, lange naalden.

Het onderzoek heeft geleerd, dat deze esters der hoogere vetzuren, voor 't grootste deel, *drie stabiele vloeibare fasen* bezitten. Terwijl bij de eerste termen der reeks ééne dezer anisotrope fasen of beide *labiel* waren met betrekking tot de isotrope smelt, — zijn zij thans alle drie onder de gegeven omstandigheden *stabiel*, hoewel somtijds bepaalde irreversibele overgangen hier nog voorkomen. Opmerkelijk is 't, dat het *stearaat* weer meer analogie met de lagere termen gaat vertoonen, in zoo verre hier òf geene, òf slechts *labiele* vloeibaar-anisotrope fasen schijnen op te kunnen treden. Een verband en

[1]) F. M. JAEGER, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterd. 1906; Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, T. XXIV, p. 334—351.

[2]) K. HÜRTHLE, Z. f. physiol. Chem. **21**. 331. (1895); 't bloedserum werd onderzocht van: mensch, paard, rund, schaap, zwijn en hond.

overeenkomst tusschen begin- en eindtermen der homologe reeks is hier alleszins erkenbaar.

Eerst zal in 't volgende het thermisch, en vervolgens het mikroskopisch gedrag dezer lichamen beschreven worden.

§ 2. Het Thermometrisch Gedrag dezer Lichamen.

Het *Cholesteryl-Lauraat* vertoont de volgende verschijnselen: De isotrope smelt L van dit lichaam is bij 100° C. nog zoo dik-vloeibaar als glycerine, en wordt bij afkoeling allengs dikker in konsistentie. Bij 87°.8 C. ($= t_3$) treedt plotseling eene eigenaardige violette en groene opalisatie der fase op, welke aan het oppervlak beginnend, weldra de geheele fase omvat. De nog doorzichtige, dun-geleiachtige massa gelijkt geheel op eene koaguleerende kolloïdale oplossing; de opalisatie is analoog aan die, welke zich veelal bij de ontmenging van twee vloeistoflagen openbaart.

Bij verdere afkoeling wordt nu de massa, onder 't verdwijnen der opalisatie-kleuren, allengs minder doorzichtig, en tevens dunner vloeibaar. Ze is thans zelfs dunner dan de isotrope smelt L. Deze dubbelbrekende vloeistof A nu, stolt bij 82°.2 C. ($= t_1$) onder een duidelijk warmte-effekt, tot eene kristalmassa S.

Gaat men daarentegen van de vaste fase S uit, en smelt men deze op, dan is 't gedrag oogenschijnlijk geheel anders, De stof wordt week en levert na eenigen tijd eene dikke, dubbelbrekende massa, welke identiek zal blijken te zijn met de zooeven genoemde fase A. Bij verder verhitten neemt de viskositeit af, en wordt zelfs bij circa 86° zeer gering. Van eene dan optredende opalisatie, als bij de afkoeling, merkt men echter thans niets. Men kan de troebele massa tot over 90° C. verwarmen, zonder dat zij helder wordt, en een enkele maal schijnt het, alsof er in de vloeibare fase vaste deeltjes zweven. Bij 90°.6 C. ($= t_5$) gaat alles over in de isotrope smeltmassa L. Het mikroskopisch onderzoek leert dat tusschen A en L thans nog eene zwakker dubbelbrekende, stabiele vloeistoffase B doorloopen wordt, en dat, ingevolge van optredende vertragingen, de fase S voor enkele oogenblikken naast L te houden is, als A en B al reeds verdwenen zijn.

Hier is dus een geval, waarin eene stof enkele graden boven haar feitelijk smeltpunt verhit kan worden, zonder te smelten. [1])

Echter dient opgemerkt te worden, dat de volgorde der temperaturen hier volkomen onvereenigbaar is met de tot dusverre bij homogene stoffen als mogelijk beschouwde verschijnselen; de temperatuur van 90°.6, waarbij deze kristallen, in aanraking met L verdwijnen,

[1]) Zie hieromtrent eone analoge waarn. van Wallérant, Compt. rend. (1906). 695.

vindt in het *p-t*-diagram der figuur 1 geene plaats. Mogelijk ware zulk eene ligging der betr. temperaturen wèl, wanneer men het stelsel als een systeem van twee komponenten kon opvatten, zooals bv., indien hier van *tautomere* vormen, die met eindige snelheden in elkaar omgezet worden, sprake ware. Dat hier, bij al deze stoffen „vertragingsverschijnselen" echter eene groote rol spelen, acht ik hoogst waarschijnlijk; de enorme onderkoeling trouwens, welke de fase *A* kan ondergaan zonder transformatie, bewijst zulks voldoende, en wel bij 't grootste aantal dezer esters.

Het verschillend gedrag van 't lauraat bij opsmelting en bij afkoeling der gesmolten massa is zóó karakteritiek, dat aan de onomkeerbaarheid van elke reeks overgangen niet getwijfeld kan worden. Meer gedetailleerd is een en ander hieronder, bij het mikrofysisch onderzoek besproken.

§ 6. Het *Cholesteryl-Nonylaat* is bij 90° C., als isotrope, gesmolten massa nog zoo dik-vloeibaar als paraffine-olie. Bij afkoeling treedt er bij 89.°5 C. eene stabiele, eenigzins grauwige dubbelbrekende vloeistoffase *B* op, die gradueel dikker wordend, bij 72.°8 C. overgaat in eene tweede, sterk dubbelbrekende vloeistoffase *A*, welke overgang met schitterende kleurspelingen gepaard gaat. Alle drie deze vloeistoffen zijn binnen elk specifiek temperatuurtrajekt, volkomen stabiel. Zoowel bij opsmelting als bij de afkoeling der stof treden ze steeds in behoorlijke volgorde achter elkaar op.

Deze dikvloeibare, sterk dubbelbrekende vloeistoffase *A* nu, wordt bij afkoeling steeds meer viskeus, en gaat ten slotte in eene hoornachtige, doorschijnende massa over, die geen spoor van eene intredende kristallisatie vertoont. Ook na uren is de soms nog zeer taaie massa nog niet in kristallen overgegaan. Een stolpunt, en bij opsmelting evenmin eene temperatuur van vloeibaar-worden, is dus bij deze stof niet aan te geven. Oorzaak daarvan is, dat de dubbelbrekende vloeistof *A* enorm onderkoeld kan worden, en allengs in den vasten toestand overgaat, zonder te kristalliseeren.

Gelijk 't mikrofysisch onderzoek ook heeft geleerd, treedt dan later plotseling eene sferoliethenvorming in de massa op, welke ten slotte tot algeheele kristallisatie der stof leidt.

De snelheid, waarmee zich zulke sferoliethen vormen, bleek in enkele gevallen niet grooter te zijn dan 0.000035 tot 0.000070 m.m. per sekunde!

§ 4. Het *Cholesteryl-Myristaat* is bij 85° C. nog eene isotrope, paraffine-olieachtige vloeistof. Bij afkoeling wordt ze allengs dikker-

vloeibaar; dàn gaat bij 82.°6 C. ongeveer de glycerine-achtige fase onder violetblauwe opalisatie in eene dikke, sterk dubbelbrekende massa *A* over, die allengs dikker wordende in konsistentie, geleidelijk overgaat in eene hoornachtige massa, zonder dat een behoorlijk stolpunt kan worden aangegeven. In dit opzicht is de stof geheel analoog aan de vorige. Daarentegen gedraagt ze zich bij het opsmelten meer op de wijze van het lauraat, in zooverre ze dan nl. nog, vóór geheel in *L* over te gaan, — in eene dubbelbrekende vloeistof *B* overgaat. De overgangstemperatuur is ook hier niet scherp aan te geven; ik schat haar op circa 80° C.

§ 5. Het *Cholesteryl-Palmitaat* smelt bij 80° C. tot eene heldere, isotrope vloeistof, die zoo dik is als suikerstroop. Bij afkoeling gaat de isotrope fase bij 80° C. onder groene opalisatie over in eene vrij helder doorschijnende, dubbelbrekende gelei *A*, welke snel dunner wordt in konsistentie en tegelijk troebeler, om bij 77.°2 C., onder een merkbaar kalorisch effekt, te stollen tot eene kristalmassa *S*. Oók hier blijkt bij 't opsmelten, nog voor 't optreden der isotrope smelt *L*, eene dubbelbrekende fase *B* doorloopen te worden; ik schat de overgangstemperatuur op cirka 78° C.

§ 6. Bij het *Cholesteryl-Stearaat* gelukte het mij niet, 't optreden van eene dubbelbrekende vloeistof aan te toonen. De isotrope, dikvloeibare smelt, stolt bij 81° C. tot goedgevormde kristallen *S*.

§ 7. Het *Cholesteryl-Heptylaat* vertoont alleen in onderkoelde smelt ééne dubbelbrekende vloeistoffase, welke labiel is met betrekking tot de vaste fase *S*. De verbinding gedraagt zich thermisch analoog aan 't caprylaat. De stoltemperatuur der stof ligt bij 110.°5 C., de overgangstemperatuur van de labiele dubbelbrekende fase ligt slechts weinig lager.

Van 't *Cholesteryl-Arachaat* kon ik slechts een onzuiver produkt verkrijgen, waaromtrent derhalve verder geen mededeelingen worden gedaan. De zuivering kon niet naar behooren geschieden, daar de ester in bijna geen enkel oplosmiddel in eenigzins belangrijke hoeveelheid oplost. De stof, zooals zij verkregen werd, schijnt geen anisotroop-vloeibare fasen te vertoonen.

§ 8. **Mikrofysisch gedrag dezer lichamen.** Smelt men een weinigje van het zuivere, vaste *cholesteryl-lauraat* op een objektglaasje tot eene isotrope, heldere vloeistof *L* en laat deze zeer langzaam afkoelen, dan vormt zich gewoonlijk eerst eene sterkdubbelbrekende, zeer

strooperige, in levendige interferentie-kleuren schitterende, vloeibare fase. Zij bestaat uit groote, kogelronde droppels, die het zwarte assenkruis vertoonen, en bij afwisselende verwarming en afkoeling licht tot eene strooperige, kleurrijke, in hoofdtoon geelwitte vloeistof tezamen vloeien. Deze fase heete voortaan *A*. Bij afkoeling wordt ze gradueel dikker, tot dat geene beweging der massa, die een korrelstruktuur blijft vertoonen, meer is waar te nemen. Rondom deze massa bevindt zich eene isotrope randvloeistof. Eerst meende ik in deze taaie, isotrope vloeibare massa, die kennelijk van de smelt *L* verschillend is, eene afzonderlijke, van *A* verschillende, fase te moeten zien. Eechter bleek mij, bij 't werken met een dekglaasje, en 't aandrukken daarvan met een pincet, alsmede door roeren met een haarfijn platina-draadje, dat deze randvloeistof slechts „pseudo-isotroop" is (volgens de benaming van LEHMANN), en in waarheid *niet* van *A* verschillend is; slechts zijn de optische assen der vloeibare kristallen hier alle loodrecht op 't glasoppervlak gericht. Ook de andere cholesterylesters vertoonen dit verschijnsel. Bij verdere afkoeling kristalliseert deze fase *A*, evenals de pseudo-isotrope rand, tot eene zelfde, veelal sferolietische kristalmassa *S*. Tusschen de sferoliethen door ziet men vaak stroomingen der pseudo-isotrope randvloeistof.

Laat men de geheele massa nu tot *S* stollen, en smelt dan deze voorzichtig op, dan gaat ze onmiddellijk over in de vloeistof *A*, kenbaar aan hare hooge interferentiekleuren en hare trage stroomingen. Vervolgens treedt plotseling eene nieuwe, grauwige, uit kleinere individuën bestaande, zwakker dubbelbrekende vloeistof *B* op, die na korten tijd op eenmaal voor de isotrope smelt *L* plaats maakt. Koelt men *L* nu weer af, dan treedt *niet* eerst de fase *B* op, maar terstond *A*. Slechts een uiterst zwak grauwig schijnsel, gedurende een ondeelbaar oogenblik even lichtend, duidt op een vluchtig passeeren der fase *B*; geheel te realiseeren echter schijnt ze thans niet te zijn. Bij verder afkoelen ontstaat dan plotseling *S*, soms in meer plaatvormige kristallen. Is die kristallisatie eenmaal ingetreden, en verhit men nu de massa, dan zal *S niet*, zooals te verwachten was, smelten, maar juist *aangroeien*, en wel wordt thans de kristallisatie-snelheid vele malen vergroot. Op te merken valt, dat de aangroeiende platte naalden van *S* aan hunne omtrekken de vloeibare fase *A* onder hevige stroomingen voor zich uitstuwen. Als men nu iets langer verwarmt, kan men somtijds maken, dat, terwijl de plaatjes van *S* voor een gedeelte blijven bestaan, eerst *A* in de grauwe fase *B* en deze in de isotrope massa *L* overgaat. Dan heeft men naast *L* dus de vaste fase *S* over, *welke men aldus boven haar smeltpunt kan verhitten*, vóór ze tenslotte in de isotrope smelt *L* verdwijnt.

Uit een en ander blijkt, dat het *lauraat drie stabiele vloeibare fasen* bezit, en tevens, dat men bij afkoeling der isotrope smelt steeds B overslaat, daarentegen bij opsmelting der vaste stof, de fase B steeds realiseert. Schematisch laat zich een en ander in bijgaand p-t-diagram

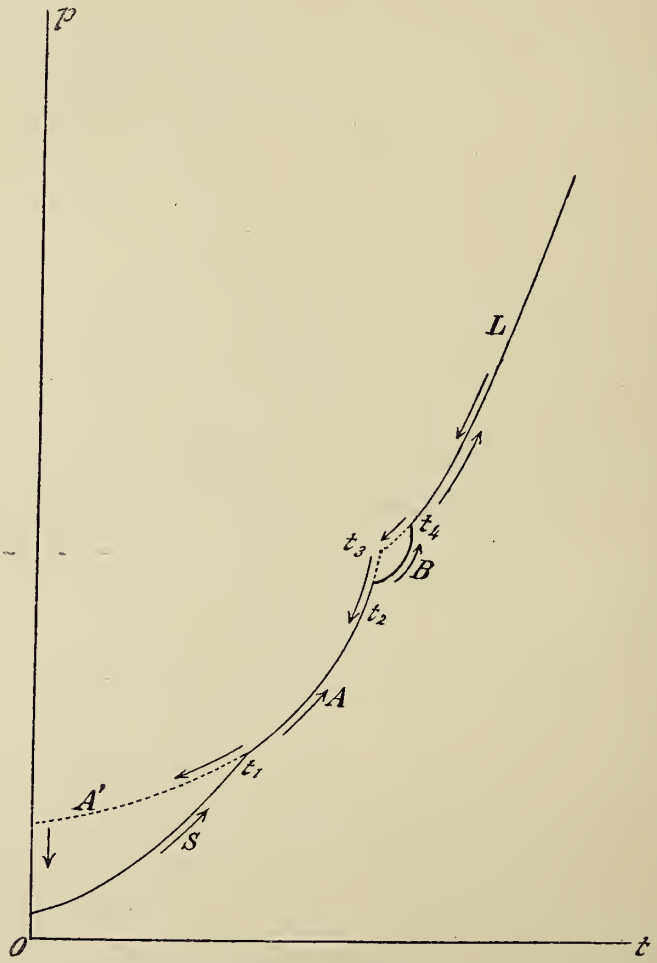


Fig. 1. Schematisch p-t-diagram voor Cholesteryl-Lauraat.

voorstellen; de pijltjes geven dus de volgorde der doorloopen fasen aan bij opsmelting en bij afkoeling. De fase A in hare quasi-onbewegelijke periode, is geruimen tijd bij kamertemperatuur vast te houden, en derhalve aanmerkelijk te onderkoelen, vóór ze in S overgaat. Ook in dien onderkoelden toestand is A, zooals ik door roeren der massa met een platinadraadje kon bewijzen, ondanks haar schijnbaar star voorkomen, nog eene taaie, dikke *vloeistof*.

Het punt (t_3) komt overeen met de bij afkoeling der isotrope smelt

intredende *opalisatie*; deze laatste geeft dus 't moment aan, *waarop de stabiele fase B wordt vervangen door de thans nog minder stabiele fase A*, die eerst kort daarna de stabielere wezen zal; een feit, dat toekomstig wellicht van belang kan zijn voor de verklaring van 't analoge verschijnsel bij de *ontmenging van twee vloeistoflagen*, en *'t koaguleeren eener kolloïdale oplossing* waargenomen. Inderdaad vertoont de overgang bij (t_3) geheel en al het aspekt van 't tot een gel worden van eene kolloïdale oplossing. De temperatuur van dit overgangspunt is onscherp op 87°.8 C. te bepalen. De temperatuur, waarbij men, de vaste stof opsmeltende, waarschijnlijk tengevolge van 't metastabiele aanwezig-zijn der plaatvormige kristalletjes van *S*, de vloeistof nog troebel houden kan, bepaalde ik op 90°.6 C., de stollingstemperatuur (l) ligt bij 82°.2 C.

Dat de bij afkoeling der isotrope smelt *L* verkregen randvloeistof, van *L* zelve verschillend was, kon op meer dan ééne wijze aangetoond worden. Door verhitting en afkoeling n.l. kan men 't zóóver brengen, dat er van *A* schijnbaar niets meer te zien is, maar alleen de randvloeistof over is, die dan bij bekoeling dadelijk tot *S* kristalliseert, waarbij soms een enkele maal hier of daar in de massa even de dubbelbrekende individuen van *A* voor een moment opduiken, om terstond weer te verdwijnen. Maar die aldus verkregen isotrope vloeistof is niet anders dan *A* zelve, wanneer door de temperatuurwisselingen zich alle individuen, evenals magneetjes, met hunne (optische) assen parallel gericht hebben, en 't geheel dus pseudo-isotroop is geworden. Dit zelfde verschijnsel treedt nu ook op bij de andere esters, zoo b.v. zeer schoon bij het nonylaat en het myristaat. Het verschil van deze pseudo-isotrope fasen met de isotrope smeltmassa's *L* dezer lichamen, openbaart zich, o.m. ook dáárdoor, dat de pseudo-isotrope massa van *A*, evenals 't dubbelbrekende deel daarvan, eene zeer dikvloeibare konsistentie heeft; de isotrope smelt *L*, van 't *lauraat* b.v., heeft meer de dikte van glycerine.

Wat ten slotte de vaste fase betreft, en haar overgang in den vloeibaren toestand, zoo laat zich óók hier weer niet bewijzen, dat een kontinue overgang tusschen de laatste vaste deeltjes en de eerste anisotroopvloeibare bestaat. Uit de snelheid, waarmee de diverse fasen voor elkaar plegen plaats te maken bij mikroskopische beschouwing, zou men juist geneigd zijn, te besluiten tot het tegendeel. De thermische waarneming der overgangen, welke laatste hier in 't algemeen slechts onbeduidende kalorische effekten openbaren, zou den waarnemer echter meer doen neigen tot opvatting von de zaak als eene ononderbroken aaneenschakeling van min of meer stabiele tusschen-toestanden, zooals dit reeds vroeger door mij bij het *cholesteryl-cinnamylaat* werd

opgemerkt. Slechts bij de kristallisatie der vaste fase treedt in enkele gevallen een eenigszins belangrijk warmte-effekt op, bij alle overige omslagen is de juiste temperatuur van overgang langs thermischen weg niet nauwkeurig te bepalen.

§ 9. Het *Cholesteryl-nonylaat* vertoont mikroskopisch de volgende verschijnselen ;

Uitgaande van de gekristalliseerde stof, werd deze eerst op een objektglaasje tot eene isotrope vloeistof L gesmolten. Bij afkoeling treedt eene grauwgekleurde, dubbelbrekende vloeistoffase B op, welke bij lager temperatuur voor eene zeer taaie, sterk dubbelbrekende, meest geelwitte fase A plaats maakt. Deze fase A is veelal door een isotropen rand omgeven; drukt men op 't dekglaasje, of roert men de massa met een zeer fijn platinadraadje, dan blijkt deze isotrope vloeistof identiek te zijn met A, en alleen pseudo-isotroop te zijn door homoeotropie. De optische assen der dubbelbrekende modifikatie A stellen zich dan weer loodrecht op 't dekglasoppervlak. Bij voortgezette afkoeling wordt A toenemend dikker vloeibaar; ten slotte is er nog alleen bij 't omroeren beweging in de massa te bespeuren. Na langeren tijd ontstaan er in deze taaie massa, van uit talrijke centra, fijnstralige sferoliethen, wier aangroeiingssnelheid slechts zeer gering is. Wanneer zich een aantal dezer sferoliethen hebben gevormd, en men verhit de massa nu voorzichtig, dan smelten de sferoliethen niet, maar *vermeerderen* zich juist, ingevolge de toename der kristallisatiesnelheid. Spoedig daarop echter, bij verdere verwarming, smelten zij tot de dubbelbrekende fase A, *waarbij de omtrekken der sferoliethen, en de zwarte assenkruisen een tijdlang behouden blijven*, zoodat het geheel veel op een vloeibaar mozaïek gelijkt [1]). Vervolgens treedt de fase B weder op, en dan de isotrope smelt L. De geheele reeks fasen wordt op *reversibele* wijze doorloopen; de vloeibare fase A kan echter zóózeer onderkoeld worden, dat een behoorlijk smelt- of stolpunt der stof niet op te geven is. In grootere massa's der stof treedt die kristallisatie soms eerst na uren in, en wordt de stof vóór dien tijd tot eene hoornachtige massa, welke steeds dubbelbrekend blijft, om ten slotte lokaal witte, ondoorschijnende plekken te gaan vertoonen, van waaruit de sferoliethenvorming zich dan langzaam voortplant door de geheele massa heen. Men zou geneigd zijn, dezen overgang van vloeibaar-anisotrope in gekristalliseerde stof, *kontinu* te noemen, ware het slechts mogelijk, om de tusschentoestanden bij dien overgang ook maar voor een oogenblik waar te nemen. Waar het experiment zulks niet vermag, en wellicht nimmer zal vermogen te doen, daar

[1]) Zie o.a. over 't analoge verschijnsel nog de zooeven verschenen mededeeling van : Wallérant, Compt. rend. (1906). p. 606.

rest ons niets anders, dan thans dien overgang vooralsnog als diskontinu te veronderstellen.

Ook hier, en 't zelfde geldt voor de andere cholesteryl-esters even-zeer, is de *sferoliethen-struktuur* der vaste fase voor dezen geheelen overgang van onderkoelden, anisotroop-vloeibaren toestand in den vasten, van groot gewicht. Ik zal aan 't einde van deze mededeeling nog kortelijks eenige gevallen noemen, waardoor de bijzondere beteekenis van de sferoliethen-struktuur bij de overgangen tusschen anisotroop-vloeibare en anisotroop-vaste fasen, op eene andere wijze eveneens duidelijk blijkt.

§ 10. Het *Cholesteryl-Palmitaat* gedraagt zich geheel analoog : ook dáár nam ik ééne vaste fase, en drie vloeibare toestanden A, B en L waar; evenals bij 't *lauraat*, wordt B gewoonlijk alleen bij verwarming waargenomen. Echter geschiedt hier de opeenvolging der vloeibare en vaste fasen relatief snel, zoodat een werkelijk stolpunt waarneembaar is, gelijk de thermische onderzoeking ook heeft geleerd. De vaste fase kristalliseert in breede platte naalden, gesmolten en dan gestold, in aaneengesloten sferoliethen. Bij opsmelting, is de dikke, dubbelbrekende vloeistof A veelal georienteerd ten opzichte der vroegere vaste sferoliethen.

§ 11. Het *Cholesteryl-Stearaat* heb ik niet in dubbelbrekenden vloeistofvorm kunnen verkrijgen : steeds kristalliseert de isotrope smelt L dadelijk, onder snelle, roteerende bewegingen, tot kleine naaldjes, welke vaak in rosetten vereenigd zijn. Wellicht, dat door sterke onderkoeling of door toevoeging van eenig bijmengsel, zich labiele anisotrope fasen openbaren [1]).

§ 12. Het *Cholesteryl-Myristiaat* is een zeer schoon objekt voor de proefneming. Het gedraagt zich in hoofdzaak op dezelfde wijze als 't *lauraat*; de fase B is hier alleen bij verhitting, niet bij afkoeling der isotrope smelt L waarneembaar. Schitterend is de vorming van groote, kogelronde kristaldroppels der modifikatie A, benevens de kleurenzoom, die de vorming van A uit L bij afkoeling voorafgaat. Deze fase A vertoont ook het verschijnsel der pseudo-isotropie in bijzonder duidelijken vorm. Dearentegen is een voornaam verschil met het lauraat gelegen in de zeer veel geringere snelheid, waarmee zich uit A bij afkoeling de sferoliethen S vormen; in dit opzicht

[1]) Naar ik voor korten tijd van prof. LEHMANN vernam, bezit het stearaat inderdaad twee labiele, anisotrope vloeistoffasen.

vertoont de verbinding weer meer overeenkomst met het nonylaat Soms kan men zeer goed waarnemen, hoe in de fase *A*, die uit een enorm aantal aaneengereide, kogelronde kristaldroppels bestaat, welke ieder het zwarte kruis der sferoliethkristallen vertoonen, zich vanuit een aantal punten der massa, centrifugale stroomingslijnen ontwikkelen, waarlangs zich de kristaldroppels scharen. Na verloop van eenigen tijd ziet men die dubbelbrekende bolletjes verdwijnen, terwijl de stroomingslijnen nu tot stralen van den sferolieth geworden zijn. Ook hier dringt zich weer onwillekeurig de vraag aan den beschouwer op, of de overgang van de dubbelbrekende, langs de stroomingslijnen georienteerde vloeistofbolletjes in den waren sferolieth-vorm, inderdaad niet kontinu plaats grijpt, en of wij eigenlijk dáárom weer alleen van een bruusken overgang spreken, omdat wij de doorloopen tusschenstadiën bij dezen overgang niet in staat zijn waar te nemen?

De vloeistofbolletjes der fase *A* vertoonen zèlve uiterlijk veel overeenkomst met eene soort van vloeibare sferoliethen; zelfs heb ik een enkele maal zulke „vloeibare sferoliethen" van grooter afmetingen kunnen waarnemen, welke snel tot vaste sferokristallen stolden. Ook bij dit lichaam dringt zich de overtuiging op, dat er tusschen sferolieth-vorming eener stof, en haar vermogen om anisotroop-vloeibare fasen te vormen, een zeer intiem verband moet bestaan; van welken aard hoop ik later toe te lichten.

Het valt echter voorloopig al op te merken, dat bij alle overgangen: vloeibaar $\leftrightarrows$ vast, waar „vertragingsverschijnselen" optreden kunnen van eenigszins belangrijken aard, de onderkoeling of oversmelting b.v., gewoonlijk wordt opgeheven onder eene differentiatie der fase in *sferoliethen*. Alle hier bedoelde *cholesteryl*-derivaten vertoonen deze sferoliethenvorming. Dat een komplex, van een groot aantal dubbelbrekende, mikroskopische sferoliethen, de optische eigenaardigheden der zich ontmengende vloeibare fasen en der kolloïdale opalisatie kan nabootsen, heb ik kunnen demonstreeren aan *α-Phytosterylproprionaat*. Een en ander zou kunnen leiden, o.a. tot versterking van de vroegere opvatting der kolloïdale stolling als een ontmengingsverschijnsel van labiele vloeistoffen.

§ 13. Het *Cholesteryl-Heptylaat* bezit slechts *labiele* vloeibare anisotrope fasen. Het vertoont groote overeenkomst met het vroeger beschrevene *caprylaat*; slechts ééne enkele, dikvloeibare fase *A* heb ik enkele malen uit de onderkoelde isotrope smelt *L* kunnen verkrijgen. De vaste fase kristalliseert snel, en wel in schoone, platte naalden, welke hooge interferentiekleuren vertoonen. De stof ver-

plaatst zich bij 't verwarmen gemakkelijk naar de koele deelen van 't objektglaasje.

§ 14. Tenslotte kan ik nog enkele gegevens meedeelen van verschijnselen, welke de beteekenis der sferoliethen-struktuur voor deze kwestie's duidelijk bewijzen.

Voor eenigen tijd heb ik een onderzoek gepubliceerd over de vetzure esters van 't *Phytosterine* uit Calabarvet, en daarbij meegedeeld, hoe zij alle in „sferoliethenvorm" plegen te kristalliseeren uit hun afgekoelde, isotrope smeltmassa, terwijl daarbij anisotrope vloeistoffasen *niet* werden waargenomen, met uitzondering van het *normale valeraat*, dat eene dikvloeibare anisotrope modifikatie bezit, en 't verschijnsel vertoont van het veranderlijke, en na langdurig liggen weer normaalwordende smeltpunt, een feit, dat ook bij enkele vetzure glycerine-esters is waargenomen. Sedert dien is door WINDAUS bewezen, dat het uit Calabarvet geëxtraheerde phytosterine een mengsel is van twee isomorfe, en door kristallisatie niet te scheiden phytosterinen. Bezig zijnde, uit het voornaamste dier twee phytosterinen, nl. uit de α-verbinding, (smpt : 136°), de zuivere vetzure esters te bereiden, ontdekte ik, dat 't gesmolten *propionaat* van het *α-phytosterine* (smpt : 108° C.), bij snelle afkoeling in koud water, de schitterendste interferentiekleuren vertoonde, zooals dit óók 't geval is bij diè cholesteryl-esters (acetaat bv.), welke *labiele* anisotrope vloeistoffasen bezitten. De gedachte lag natuurlijk onmiddellijk voor de hand, om deze verschijnselen aan 't optreden van vloeibare kristallen bij den thans *zuiveren* α-phytosterine-ester toe te schrijven. Een dergelijk gedrag vertoonde ook het volmaakt zuivere *α-phytosterine-acetaat*, hoewel met veel minder groote kleurenpracht. Opmerkelijk echter was het, dat het *α-phytosterine-propionaat*, óok nà volkomen vast-wording, *die kleuren nog onbepaald langen tijd bleef behouden*, vooral aan de wanden van het reageerbuisje, dáár, waar de laag der stof eene geringere dikte had, en zeer snel was afgekoeld.

Het mikroskopisch onderzoek liet nu erkennen, dat deze beide stoffen waarschijnlijk *geene*, of althans zeer snel verdwijnende anisotrope vloeibare fasen [1]) vertoonen, maar dat *'t genoemde kleuren-*

[1]) Terwijl de *phytosteryl*-esters uit Calabarvet, dus bij een bepaald gehalte aan het β-homoloog, *geene* vloeibare kristallen vertoonen, bleken de „zuivere" α-esters thans dit verschijnsel al van af 't *butyraat*, — misschien zelfs van af 't *propionaat*, wèl te vertoonen. Deze ontdekking is een gewichtig argument tegen de, met betrekking tot de *cholesteryl*-esters meermalen geuite beweringen, als zouden de merkwaardige, hier bestudeerde verschijnselen, aan bijmenging van homologe cholesterinen toe te schrijven zijn. Vreemde bijmengsels verhinderen in 't algemeen juist deze verschijnselen geheel en al; steèds echter worden ze eer bedorven dan verbeterd.

verschijnsel wordt teweeggebracht door een zeer eigenaardige sferoliethen-struktuur. Ik heb in 't volgende de beschrijving der stollingsverschijnselen van het *α-propionaat* gegeven, benevens eene figuur, welke de typische struktuur der gesmolten en daarna gestolde verbinding weergeeft, zooals deze aan de kleurige wandgedeelten aanwezig is.

Fig. 2.

Smelt men een weinig der vaste stof op een objektglaasje tot eene isotrope vloeistof, dan neemt men bij afkoeling het volgende waar: De massa stolt geheel en al sferoliethisch, en wel tot een konglomeraat van cirkelronde, koncentrisch gegroepeerde figuren, welke door eene reeks van banden met elkaar verbonden schijnen. Waar drie sferoliethen elkaar ontmoeten, sluiten zij aan elkaar volgens rechte lijnen, welke hoeken van circa 120° insluiten. De massa is zwak dubbelbrekend, en grauwig van kleur; de ringen en banden zijn lichtgrijzig op donkerder achtergrond. Elke sferolieth vertoont, behalve eene koncentrische struktuur, het zwarte kruis, echter gewoonlijk zeer flauw. Het geheel gelijkt op de teekening, die veelal bij gepolijst malachiet (b. v. uit den Oeral) wordt waargenomen, en ook wel bij sommige gepolijste agaten.

De wanddeelen nu van 't buisje of 't objektglas, die de bedoelde kleurverschijnselen vertoonen, hebben diezelfde struktuur, doch met dit onderscheid, dat de bolvormige, koncentrisch-gelaagde sferoliethen daar veel geringer afmetingen hebben, en veel dichter op elkaar sluiten. Elk sferoliethje heeft eveneens een kruis; dit is echter niet donker, maar gekleurd, met gele en violette armen. De sferolieth is evenzoo in de afwisselende cirkelkwadranten gekleurd.

Dit ensemble van kleine, kleurige sferoliethen nu is de oorzaak van de bedoelde, schitterende kleurverschijnselen; zij zijn volkomen analoog aan die, welke in 't geval van vloeibare kristallen plegen op te treden en blijven onbepaald langen tijd bestaan. Elk hunner vertoont één, of meestal twee lichtende puntjes in het midden; zij zijn sterk cirkulair polariseerend en linksdraaiend. Het geheel vertoont zich tusschen gekruiste nicols als een prachtig bont mozaiek van gekleurde, celvormige deelen. De grootte van elk individu is 0,5 tot 1 mikron.

Ook het acetaat vertoont iets dergelijks; dáár zijn de sferoliethen echter meer radiaal gebouwd, en is alles veel onduidelijker.

Ik hoop binnen kort over deze merkwaardige *phytosteryl*-verbin-

dingen nog meerdere gegevens te kunnen verstrekken; hier heb ik ze slechts aangehaald als bewijs van 't belang van dezen struktuurvorm voor de bij anisotroop-vloeibare fasen waargenomen, optische verschijnselen.

Zaandam, 14 November 1906.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over irreversibele faseovergangen bij stoffen, die meerdere vloeistoestanden kunnen vertoonen"*.

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM.)

§ 1. De vetzure esters van het *α-Phytosterine* uit *Calabarvet*, welk phytosterine het in 't plantenrijk 't veelvuldigst voorkomende is, en dat o. a. uit de rogge en 't koren is geïsoleerd onder den naam van „sitosterine", — vertoonen in meer dan één opzicht hoogst merkwaardige eigenschappen.

Terloops heb ik in mijne vorige mededeeling reeds bericht omtrent de kleurverschijnselen en de sferoliethenstruktuur bij het *propionaat* en bij het *acetaat*. Bij dezen laatstgenoemden ester kon ik geene anisotrope vloeistoffasen waarnemen; bij 't propionaat is, even vóór 't smelten, eene dubbelbrekende fase waar te nemen, echter te kort, om 't temperatuurtrajekt nauwkeurig te kunnen meten.

Bij de vier volgende termen der reeks echter treden deze verschijnselen steeds duidelijker op, en wel onder zóó bijzonder gunstige konditie's, als wellicht tot nog toe bij geene der bekende stoffen dezer soort verwezenlijkt konden worden. Tevens vertoonen deze lichamen enorme vertragingsverschijnselen bij hunne diverse overgangen, en vaak eene typische onomkeerbaarheid daarvan, waarover ik thans hier een en ander wil mededeelen.

§ 2. **Termometrisch gedrag der vetzure α-phytosteryl-esters.**

A. Het *α-Phytosteryl-norm.-Butyraat* smelt, bij zeer langzame temperatuurstijging, bij 89°.5 C. tot eene troebele, dubbelbrekende vloeistof *A*, welke eerst zeer viskeus is, maar dàn snel dunner wordt, en bij 90°.6 overgaat in eene glycerine-dikke, heldere, isotrope smelt *L*.

Koelt men nu omgekeerd deze voorzichtig af, dan daalt de thermometer geleidelijk, terwijl de isotrope vloeistof steeds dikker in konsistentie wordt, doch volkomen helder blijft. Bij 80° C. kristalliseert dan opeens de geheele massa tot kleine kristalletjes *S*, onder zóó

groot kalorisch effekt, dat de thermometer tot 85° C. oploopt. Van anisotroop-vloeibare fasen is thans in 't geheel geen sprake. Men kan deze twee proeven naar willekeur herhalen, steeds met hetzelfde resultaat. Over den aard van de troebele fase zie men beneden, bij de beschrijving van 't mikrofysisch gedrag.

Koelt men de isotrope smelt plotseling af in koud water, dan krijgt men onder blauwgrijze kleuring, eene weeke, dubbelbrekende massa, die eerst na zeer langen tijd langzaam gaat kristalliseeren.

B. Het *α-Phytosteryl-Isobutyraat* smelt, op dezelfde manier onderzocht als boven, bij 101°.4 C. tot eene glycerine-dikke, troebele, dubbelbrekende vloeistof *A*, die geleidelijk de konsistentie van paraffine-olie verkrijgt, en bij ± 103°.2 C. schijnbaar kontinu in eene heldere smelt *L* overgaat.

Koelt men deze af, dan wordt ze weliswaar geleidelijk dikker vloeibaar, doch tevens blijft ze geheel helder en isotroop.

Bij 80°.4 C. wordt ze troebel en dubbelbrekend; dese fase is identiek met *A*, en hare konsistentie is dan als die van glycerine; bij 73° is ze als boter zoo dik geworden, bij 66° C. kan de thermometer er nog slechts noode in bewogen worden, terwijl men haar tot taaie, dubbelbrekende vloeistofdraden kan trekken. Bij 65° C. rijst de thermometer plotseling tot 68°.8 C., terwijl de massa tot lange, fijne naalden *S* kristalliseert.

Bij snelle afkoeling der smeltmassa, gaat deze, zonder dat kleurverschijnselen optreden, over in eene troebele, vetachtig uitziende, dubbelbrekende massa, welke eerst na zeer langen tijd langzaam in kristallen overgaat.

C. Het *α-Phytosteryl-norm.-Valeraat* smelt, in gekristalliseerden toestand, bij *geene* bepaalbare temperatuur. Bij 48° C. ongeveer begint de stof zichtbaar week te worden, bij 54° is hare konsistentie als dikke boter, bij 80° C. wordt ze al dunner, bij 85° C. is ze werkelijk vloeibaar maar nog steeds troebel en dubbelbrekend. *Alle deze overgangen gaan volkomen kontinu.* Bij ongeveer 97.°5 C. is de vloeistof helder en isotroop; ze heeft dan de dikte van paraffineolie.

Koelt men daarentegen de isotrope smeltmassa af, dan blijft de isotrope, paraffineolie-achtige vloeistof helder tot cirka 87.°3 C., waarbij eene troebele, dubbelbrekende fase ontstaat. Deze neemt nu bij verdere afkoeling geleidelijk in dikvloeibaarheid toe; bij 80° is ze als boter zoo dik, bij 66° haast niet meer om te roeren, en dan tot taaie vloeistofdraden te trekken. Men kan haar afkoelen tot kamertemperatuur zonder dat ze stolt. Uren achtereen blijft zij in dezen toestand, doch na 24 uren is ze weer in kristallen overgegaan. De stof heeft dus noch bepaalbaar stolpunt, noch smeltpunt.

D. Het *α-Phytosteryl-Isovaleraat* gedraagt zich volkomen analoog aan het norm. Valeraat. Ook hier is noch een smeltpunt, noch een stolpunt aan te wijzen. De massa wordt week bij ongeveer, 45° is bij 65° anisotroop-dikvloeibaar, en wordt bij 81° C. helder en isotroop. Bij afkoeling ontstaat bij 78.°1 een begin van troebeling; de vloeistof wordt gradueel dikker, en gaat bij geen bepaalbare temperatuur over in eene taaie, kleverige dubbelbrekende massa, die na 24 uren weer tot eene kristalmassa vastgeworden is.

§ 3. Het thermometrisch gedrag dezer merkwaardige lichamen, is voor 't geval van het normale *butgraat* en *isobutgraat* in een schematisch *p- t-* diagram, hiernevens weergegeven. De typische irreversibiliteit dezer verschijnselen springt aldus terstond in 't oog. Bij de twee *valeraten* kan men bovendien het geheele gedrag niet anders kwalificeeren, dan als een werkelijk geheel *geleidelijken* overgang vast $\rightleftarrows$ vloeibaar, onder intermediaire realiseering van een oneindig aantal optisch-anisotrope vloeistoffen.

§ 4. **Het mikrofysisch gedrag der vetzure α-phytosteryl-esters.** Er zijn wellicht geene stoffen bekend, welke de voor anisotrope vloeistoffen zoo karakteristieke verschijnselen mikroskopisch op zóó schoone en tevens zoo kurieuze wijze openbaren als deze esters; in dit opzicht munten vooral uit het isobutyraat en het valeraat. Bij

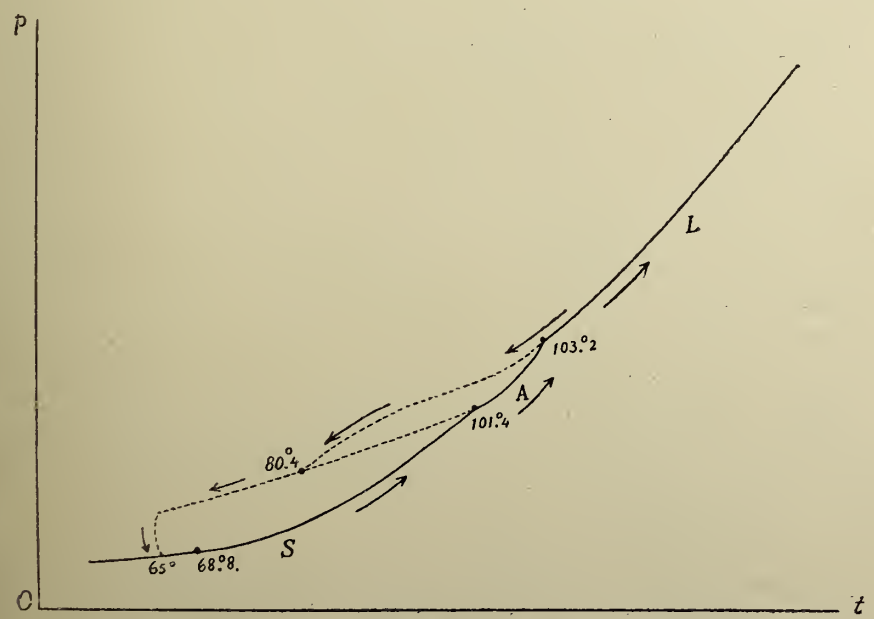


Fig. 1. Schematisch *p-t* diagram voor α-Phystoryl-Isobutyraat.

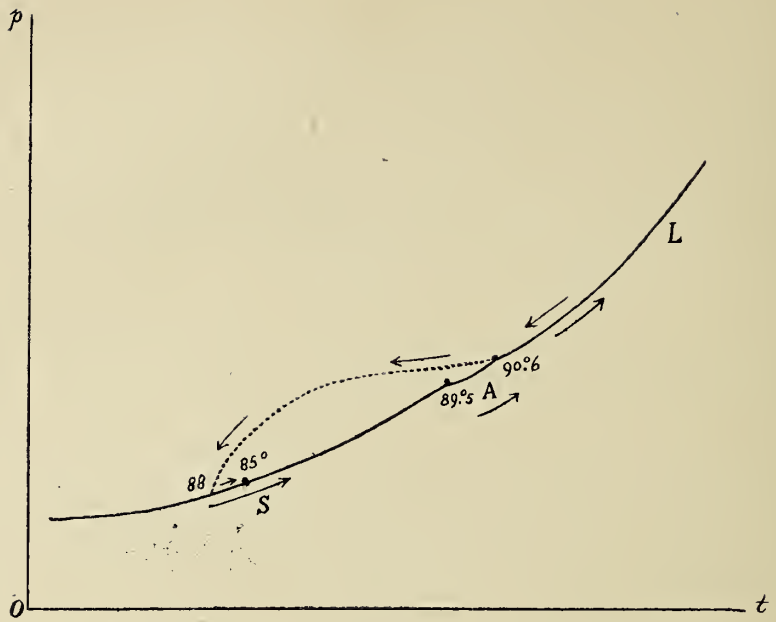


Fig. 2. Schematisch p-t-diagram voor α-Phytosteryl-n-Butyraat.

het normale butyraat is 't trajekt, waarover de vloeibare kristallen bestaanbaar zijn, wat erg klein. Daarom zal ik, hoewel 't gedrag der vier lichamen wel in details verschilt, hier meer in 't bijzonder 't gedrag van 't normale valeraat beschrijven, en van de andere hier en daar meedeelen, waarin ze van 't valeraat afwijken.

Van de thermisch waargenomene, zoo eigenaardige irreversibiliteit en geleidelijkheid der overgangen merkt men thans niets. Dit is het gevolg van de geheel andere omstandigheden, welke 't werken volgens de mikroskopische methode met zich brengt. De thermometrische methode verdient, voor de studie van 't wezen der diverse fase-overgangen zeker de voorkeur boven de mikroskopische, wijl bij de laatste de fijnere temperatuurveranderingen lang niet zóó beheerscht kunnen worden, als dit bij de eerste methode 't geval is. Daarom maken de fase-overgangen, mikroskopisch waargenomen, ook veel eer den indruk van bruusk te zijn, dan bij de thermische observatie.

Echter vult het mikroskoop hier de taak van den thermometer op niet te onderschatten wijze aan, daar ze een inzicht geeft in den bouw der diverse fasen, en veroorlooft hun verschil of identiteit vast te stellen.

§ 5. Smelt men een weinig van het schoongekristalliseerde norm. *valeraat* voorzichtig op een objektglas, dan gaat de stof bij eene bepaalde temperatuur, schijnbaar plotseling, over in een aggregaat

van een enorm aantal, kogelronde, zeer groote en sterk dubbelbrekende vloeistofdruppels, welke alle het bekende zwarte kruis der sferoliethen vertoonen [1]), doch met dat al werkelijk vloeien kunnen. Men kan dezen toestand soms (zie Noot) willekeurig langen tijd bestendigen. Doch ook kunnen zij daarna samen stroomen tot grootere, eenigszins op scherpbegrensde kristallen gelijkende, plaatvormige, hooggekleurde vloeibare individuen. Deze zijn vaak veellingen van vloeistofdruppels; de grenzen tusschen de afzonderlijke individuen wisselen door temperatuurslingeringen telkens.

Opmerkelijk, en terstond in 't oog vallend, is hierbij de isotrope rand van de massa. Door druk of door verschuiving van 't dekglaasje, evenzoo bij de slierige stroomingen, die men hierin door temperatuurveranderingen kan teweeg brengen, kan licht aangetoond worden, dat deze isotrope rand, door eene parallele oriënteering der vloeibare individuen, slechts „pseudo-isotroop" is, en identiek met de rest der fase. Zelfs gelukt 't soms, door veelvuldig herhaalde verwarming en daarop volgende snelle afkoeling, om de geheele massa dit pseudoisotroop aspekt te bgeven [2]). Deze stof is van dit verschijnsel wel het best-bekende voorbeeld.

§ 6. Verhit men nu verder, en wel héél voorzichtig, dan ziet men de grootere vloeiende kristallen zoowel als de nog tusschen hen inliggende kleinere druppels in snelle beweging komen: de grootere individuen, die veelal uit twee-, en vierlingen bestaan, lossen zich weer op in een menigte bolvormige druppels, en deze verdwijnen mèt de kleinere, bij eene bepaalde temperatuur geheel in de isotrope vloeistof, die nu ook werkelijk isotroop *is*. De bolletjes van de vloeistof roteeren daarbij in rechtschen en linkschen zin, onder tordeering

---

[1]) Men kan echter veeltijds eene scheeve uittreding der optische symmetrie-as waarnemen, waardoor de indruk ontstaat, of men loodrecht op eene der optische assen van een twee-assig kristal ziet, of op een éénassig kristal, scheef op de optische as gesneden, Ook neemt men dan gekleurde ringen waar, die thans elliptischen vorm hebben. Hoogst merkwaardig is 't, dat, als de fase door afkoeling zeer taai vloeibaar is geworden, deze ellipsoïdale droppels, voorzien van ringen en scheeve, doch onderling *parallel* gerichte assen langen tijd in schijnbaar onbewegelijken toestand te houden zijn te midden der pseudo-isotrope of zwak dubbelbrekende vloeistof. Zij richten zich onderling als ellipsoïdale magneetjes.

[2]) De anisotroop-vloeibare fase heeft, o.a. bij de twee *valeraten*, eene buitengewone neiging, om zich in dezen pseudo-isotropen toestand te verplaatsen. Men kan dit waarnemen, doordat de grens van den droppel zich veelal, onder verbreeding van de isotroop-lijkende strook, van zelf binnenwaarts verplaatst. Oók is 't opmerkelijk om te zien, hoe de vloeiende kristallen zich om eene luchtbel heen, normaal op de begrenzing daarvan, aaneengesloten heenleggen.

der massa, zooals aan de spiraalsgewijze vervormiug van 't zwarte kruis waar te nemen is. Soms kan men, vóór 't isotroop worden, nog eerst eene intredende vergrooting der „plaatvormige vloeiende kristallen" ten koste van de kleinere tusschenliggende bolletjes observeeren; een gevolg van de bij verwarming zich een oogenblik vergrootende kristallisatie-snelheid.

§ 7. Bij afkoeling der isotrope smelt, differentieert zich deze eerst in een onnoemelijk aantal der dubbelbrekende vloeistofbollen, welke dan lokaal hier en daar tot de meer plaatvormige vloeiende kristallen samenvloeien. Bij verdere afkoeling blijven deze laatste individuen geruimen tijd, ondanks de onderkoeling, bestaan, terwijl de bolletjes zich ondertusschen tot deze zelfde soort van plaatvormige individuen vereenigd hebben. Dit, in hooge interferentiekleuren schitterende aggregaat, wordt bij langer liggen geleidelijk taaier en taaier in konsistentie, terwijl de aggregatie, door eene schijnbare barsting, hoe langer zoo kleinkorreliger wordt. Echter blijft de fase, nog uren lang soms, anisotroop-vloeibaar, zooals men door verschuiving der massa, en door den pseudo-isotropen rand, welke fijne, dubbelbrekende stroomingslijnen gaat vertoonen, duidelijk bewijzen kan. Tenslotte gaat ze, nadat eerst de pseudo-isotrope vloeistof tot dezelfde, haast volmaakt onbewegelijke aggregatie van dubbelbrekende individuën is overgegaan als de rest, na zeer langen tijd *geleidelijk* over in een aggregaat van plaatjes en sferoliethachtige massa's, met sterke dubbelbreking voorzien.

§ 8. Als men de, eenige uren gelegen hebbende, gedeeltelijk vaste massa, of wèl de eenmaal geheel vast geworden massa, voorzichtig opsmelt, dan gelukt 't soms, om bij de twee *valeraten*, de kristallen der fase S (dus de *vaste* kristallen), — nog eenige oogenblikken *nevens* de isotrope smelt L te houden, bij eene temperatuur, welke gelegen is *boven* 't hoogste omzettingspunt. Dit verschijnsel is derhalve weder geheel analoog aan dàt, hetwelk bij het *cholesteryl-lauraat* 't eerst door mij werd waargenomen, en dat als *eene verhitting eener vaste stof S boven haar smeltpunt zonder intredende smelting* zou kunnen gekwalificeerd worden. Voorloopig schijnt, volgens de bestaande opvattingen althans, dit gedrag slechts verklaard te kunnen worden, indien men hier een twee-komponenten-systeem, met b.v. aan sterke vertraging onderhevige tautomere omzettingen, wil aannemen.

Wanneer men de nauwelijks tot enkele vloeibare dubbelbrekende droppels afgekoelde isotrope smelt L voorzichtig verhit, dan kan men soms waarnemen, hoe daàr, waar een oogenblik te voren de sterk

lichtende, geelwitte bolletjes zichtbaar waren, thans grauwige, met zwart kruis voorziene bolletjes aanwezig zijn, welke allengs kleiner worden, en tevens donkerder, om tenslotte als (isotrope?) bolletjes in de isotrope smelt te verdwijnen [1]). Dit verschijnsel lijkt me, in verband met de hieronder nog te beschrijven, bij de verbinding $Fe_2 Cl_6$, 12 aq. opgemerkte fenomenen, en met alles, wat ik van dien aard bij de cholesterylesters kon waarnemen, van groote beteekenis voor de verklaring van het ontstaan der vloeibare kristallen.

§ 9. Eindelijk valt er nóg iets op te merken omtrent de afscheiding van het *α-Phytosteryl-norm.-Valeraat* uit organische oplosmiddelen. Men kan de stof uit aethylacetaat + weinig alcohol in schoone, harde, goedgevormde kristalletjes verkrijgen. Wanneer men echter de verzadigde, *koude* oplossing in aethylacetaat, met veel *aceton* vermengt, (waarin n.l. de stof zeer weinig oplosbaar is), dan wordt de vloeistof plotseling tot eene melkwitte emulsie, die bij bezinking het lichaam afzet, echter *niet* in een fijn poeder, doch in den vorm van eene *dubbelbrekende zeer dikke en zeer kleverige vloeistof*.

Ik heb deze praecipitatie in een uitgehold objektglaasje onder het mikroskoop herhaald. De emulsie is een, van een onnoemelijk aantal *dubbelbrekende, kogelronde vloeistofbolletjes*, welke zich òf snel bewegen in de vloeistof, òf, tot grootere massa's vereenigd, geheel en al identiek lijken met de gewone, anisotroop-vloeibare fase *A*, als deze op kamertemperatuur is afgekoeld. Deze bolletjes vertoonen alle het kruis der sferoliethen en der dubbelbrekende vloeistoffen. Zij worden spoedig vast, en gaan dan in naaldjes en sferoliethachtige aggregaties's over. Dat de eerst afgezette bolletjes vloeibaar zijn, kan men door roeren gemakkelijk bewijzen; trouwens de dubbelbrekende massa's kommuniceeren veeltijds met elkaar door zeer smalle, dubbelbrekende stroomingen, terwijl zij veelal ook de verschijnselen der pseudo-isotropie vertoonen.

Hier heeft men dus blijkbaar de vloeibaar-anisotrope fase *A* uit eene oplossing door snelle praecipitatie bij kamertemperatuur verkregen, en wel in geïsoleerde droppels! Enkele andere *phytosteryl-esters* vertoonen analoge verschijnselen, welke ik later, in eene uitvoeriger mededeeling over deze lichamen, zal beschrijven.

§ 10. Hoogst merkwaardig is bij het norm. *valeraat*, bij 't *isovaleraat* en *isobutyraat*, de differentiatie der isotrope smelt in een groot aantal kogelronde, dubbelbrekende vloeistofbollen van aanzien-

[1]) Vóór dien tijd ziet men de bolletjes soms zich hièr door samenvloeien, tot veellingen vergrooten, daàr een grooter overgaan in een kleiner, soms hièr een in de vloeistof verdwijnen, en elders, veelal er vlak naast, nieuwe individuen opduiken.

lijke afmetingen, welke als vetoogjes op een soep, over en langs elkander heendrijven, en zich veelal tot veellingen, wier afzonderlijke deelen nog erkenbaar blijven, vereenigen. Ook kransvormige aggregatie's der vloeistofbollen kan men soms waarnemen. In de meeste gevallen vertoonen de afzonderlijke vloeistofbollen het zwarte kruis en de vier lichtende kwadranten goed centrisch gegroepeerd. Men ziet ze echter ook meermalen rondwentelen, zoodat de uittreding der optische symmetrie-as thans excentrisch geschiedt. Door de enorme grootte der individuen en de lage grenstemperaturen, leenen zich deze esters voor de studie dezer verschijnselen zeker niet minder goed dan de p-azoxybenzoëzureaethylester van VORLÄNDER.

Als men de temperatuur der in vloeistofbollen geheel gedifferentieerde massa, — en vooral 't *isobutyraat* is voor deze differentiatie bijzonder geschikt, — zeer weinig opvoert, dan ziet men de vloeistofbollen soms opeens verdwijnen, nadat ze een oogenblikje van te voren hunne grenzen even, als door eene *expansie*, hebben vergroot 't Is, of eene zeepbel barst door te sterke opblazing.

§ 11. Eindelijk wil ik nog opmerken, dat de in 't vorige beschreven thermische overgangen, en vooral die der twee *valeraten* werkelijk niet anders kunnen worden geïnterpreteerd, dan door aanname van een geheel en al kontinu verloop. Voor al deze geleidelijke transformatie's, zoowel bij opsmelting als bij de langzame stolling, is een meetbare tijd noodig, en nergens is eenige aanwijzing te ontdekken van een plotselingen sprong. Uitgezonderd is alleen hierop 't plotseling kristalliseeren der twee *butyraten*.

§ 12. Wat nu de differentiatie der smelt L in een aggregaat van anisotrope vloeistofbollen aangaat, zoo wil ik hier tenslotte mededeeling doen van eene proefneming omtrent het kristalliseeren van 't *ijzerchloridehexahydraat*, welke stof iets dergelijks vertoont, en, evenals haast alle onderkoelde smelten, en als vele der, de vloeibare kristallen vertoonende verbindingen, in typische *sferoliethen* kristalliseert.

Smelt men de verbinding: $Fe_2 Cl_6 + 12 H_2O$ voorzichtig in een buisje, zóó, dat geen water ontsnapt, en neemt men van deze bruinroode smelt een druppel op een objektglaasje, dan kan men de vrij liggende smelt, uren en uren lang bij kamer-temperatuur laten, zonder dat er een zweem van kristallisatie bemerkbaar is. De vloeistof is thans sterk onderkoeld, en verkeert in een toestand van metastabiel evenwicht. Met dat al heeft ze dezelfde chemische samenstelling als de vaste fase, waaruit ze ontstaan is.

Bij langer liggen treden nu in de vrij dikvloeibare massa, lokaal *kleine vloeistofbolletjes* op, waarschijnlijk dáár beginnende wegens

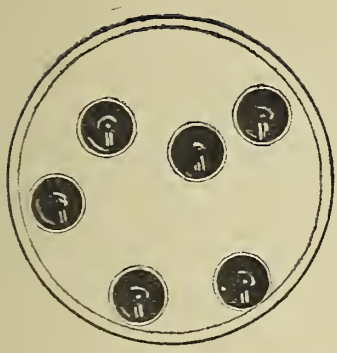


Fig. 3*a*.

plaatselijke afkoeling of door eenige spontane waterverdamping op die punten. Deze vloeistofbolletjes zijn volkomen isotroop, en omgeven door een fijnen, geelgekleurden aureool van anderen brekingsindex dan de rest der vloeistof (fig. 3*a*). De waarneming leert, dat de bollen optisch slechts weinig of niet dichter zijn dan deze moederloog; verder moet men uit het feit, dat ze later *in hun geheel* tot een sferolieth van het hexahydraat worden, wel besluiten, dat hunne chemische samenstelling niet van die der smeltmassa verschilt.

Fig. 3*b*.

Deze bollen van vloeistof nu, gaan allengs over in dubbelbrekende massa's, wier doorsnede die is van een regelmatigen zeshoek met afgeronde hoeken: kristalindividuën zijn in de dubbelbrekende massa nog niet waarneembaar, en de lichtende hof om het geheel heen, blijft ook nù nog nog bestaan (fig. 3*b*). Hier en daar ziet men ook in de vloeistof zeshoekige, scherpbegrensde, zeer kleine plaatvormige kristallen ontstaan, *zonder* voorafgaande vloeistofbollen te dier plaatse [1]). Tenslotte wordt de dubbelbrekende zeshoekige massa, allengs door meer onregelmatige zijden begrensd, terwijl ook eene meerdere differentiatie der massa in lichte en donkere gedeelten op een langzaam intredend en vorderend kristallisatieproces wijst. Tenslotte kan men een *sferolieth* van het hexahydraat, met radiale struktuur waarnemen, die nu verder centrifugaal aangroeit tot de groote, welbekende, halfbolvormige sferoliethen van het ijzerchloride (fig. 3*c*).

Fig. 3*c*.

§ 13. Deze proef bewijst, dat de opheffing van den metastabielen vloeistoftoestand of althans van een vloeistoftoestand, die onder den

[1]) Deze kunnen wellicht echter ook door de aanwezigheid van zeer kleine sporen salmiak ontstaan, waarvoor 't ijzerchloride een zeer gevoelig reagens is.

invloed van *vertragingsverschijnselen* mogelijk is, — kan geschieden door de vorming van *sferoliethen, die voorafgegaan worden door de differentiatie der smelt in een aggregaat van vloeistofbolletjes.* Wel is waar zijn deze laatste hier, in tegenstelling met de zooeven beschreven phytosteryl esters, isotroop; maar de anisotropie dezer laatste vloeistoffen kan óók 't gevolg zijn van faktoren, welke van ondergeschikt belang zijn voor den blijkbaar bestaanden samenhang tusschen: metastabiliteit van vloeistoftoestanden, opheffing daarvan door sferoliethenvorming, en 't mogelijk optreden van vloeistofbollen als intermediair verschijnsel. Ter loops wil ik er even aan herinneren, dat als men onder toevoeging van eene, de kristallisatie vertragende stof, eene oplossing laat uitkristalliseeren, deze kristallisatie begint met de afscheiding van oorspronkelijk isotrope vloeistofbolletjes, zoogenaamde globulieten, welker studie reeds indertijd door BEHRENDS en VOGELSANG begonnen werd.

Een en ander dringt het vermoeden op, dat de vorming der anisotrope vloeistoffasen, als agregaten van dubbelbrekende vloeistofbollen, eveneens hare oorzaak mag hebben in een soort van *vertragingsverschijnselen*, wier natuur ons echter momentaan nog onbekend is. Over niet te langen tijd hoop ik op deze kwestie nader terug te komen.

Zaandam, 21 November 1906.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan: „*Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde.*"

Men weet dat de differentiaalvergelijking van LEGENDRE

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

voldaan wordt door een polynomium $P_n(x)$ van den n^{den} graad en door eene functie $Q_n(x)$ die o. a. geschreven kan worden in den vorm

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(z)\,dz}{x-z}$$

waardoor zij echter niet bepaald is op het deel inliggende tusschen -1 en $+1$ van de reëele as, ter weerszijde waarvan deze functie waarden bezit die $2i\pi P_n(x)$ verschillen.

Naar aanleiding hiervan hebben wij de vraag gesteld alle homo-

gene lineaire differentiaalvergelijkingen tweede orde, van den vorm

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + S(x)\frac{dy}{dx} + Ty = 0$$

waarin R, S en T polynomia voorstellen, te bepalen die de eigenschap bezitten, dat $y_1(x)$ een eerste particuliere integraal zijnde, de tweede kan geschreven worden in den vorm

$$y_2(x) = \int_\alpha^\beta \frac{y_1(z)\,dr}{x - z}$$

in de onderstelling namelijk dat deze integraal buiten de discontinuiteitslijn eene beteekenis heeft, terwijl α en β reëele waarden voorstellen.

Stellen we dat de polynomia van denzelfden graad zijn, dus

$$R(x) = \sum_0^\lambda r_p\, x^p \quad , \quad S(x) = \sum_0^\lambda s_p\, x^p \quad , \quad T(x) = \sum_0^\lambda t_p\, x^p$$

dan blijkt vooreerst dat deze polynomia moeten voldoen aan de voorwaarden

$$R(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,r(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\sum_0^{\lambda-2} \varrho_p\, x^p$$

$$S(x) = R'(x) + (x-\alpha)(x-\beta)\sum_0^{\lambda-2} h_p\, x^p.$$

Stelt men verder

$$G_p'' = \int_\alpha^\beta z^p\, y_1''(z)\,dz \quad , \quad G_p' = \int_\alpha^\beta z^p\, y_1'(z)\,dz \quad , \quad G_p = \int_\alpha^\beta z^p\, y_1(z)\,dz$$

en

$$M = -G_0''$$
$$N = (\alpha+\beta)\,G_0'' - G_1'' - 2G_0'$$
$$m = -G_0'$$
$$n = (\alpha+\beta)\,G_0' - G_1' - G_0$$

dan worden de verdere voorwaarden gevonden uit de vergelijking

$$I + J = 0$$

waarin I en J polynomia van graad $\lambda-1$ voorstellen van de volgende vormen

$$I = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (\varrho_p N + \varrho_{p-1} M)\, x^p$$
$$+ \sum_{p=0}^{\lambda-1} [\{h_p + (p+1)\varrho_{p+1}\} n + \{h_{p-1} + p\varrho_p\} m]\, x^p$$

$$J = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (r_{p+1} G_p'' + s_{p+1} G_p' + t_{p+1} G_p)$$
$$+ x \sum_{p=0}^{\lambda-2} (r_{p+2} G_p'' + s_{p+2} G_p' + t_{p+2} G_p)$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ x^{\lambda-2} \sum_{p=0}^{1} (r_{p+\lambda-1} G_p'' + s_{p+\lambda-1} G_p' + t_{p+\lambda-1} G_p)$$
$$+ x^{\lambda-1} \sum_{p=0} (r_{p+\lambda} G_p'' + s_{p+\lambda} G_p' + t_{p+\lambda} G_p).$$

Voor het geval dat $\lambda = 2$, vindt men hieruit dat de meest algemeene vergelijking, die de gevraagde eigenschap bezit, is

$$(x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + [t_1(x-\alpha)(x-\beta) + 2x - \alpha - \beta]\frac{dy}{dx} + (t_0+t_1x)y = 0$$

waarin α, β, t_0 en t_1 onbepaald zijn,

Is $\lambda = 3$ dan blijkt de meest algemeene vergelijking te zijn

$$(x-\alpha)(x-\beta)(\varrho_1x+\varrho_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (t_2x^3+s_2x^2+s_1x+s_0)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ (t_2x^2+t_1x+t_0)y = 0$$

waarin de grootheden $\alpha_1\ \beta_1\ \varrho_0\ \varrho_1\ s_0\ s_1\ s_2\ t_6\ t_1\ t_2$ voldoen aan de drie betrekkingen

$$s_1 + (\alpha+\beta)s_2 + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)t_2 = 2\varrho_0 + (\alpha+\beta)\varrho_1$$
$$s_0 - \alpha\beta s_2 - \alpha\beta(\alpha+\beta)t_2 = -(\alpha+\beta)\varrho_0 - 2\alpha\beta\varrho_1$$
$$(t_1-s_2+2\varrho_1)G_0 - t_2 G_1 = 0.$$

Wiskunde. — De Heer Schoute biedt namens den Heer F. Schuh eene mededeeling aan: „*Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels.*" 1e gedeelte.

(Mede aangeboden door den Heer D. J. Korteweg).

1. *Gegeven zijn drie vlakke krommenbundels* (C_r), (C_s) *en* (C_t) *van de graden* r, s *en* t. *Gevraagd de meetkundige plaats* M *der puntenparen, waardoor een kromme van ieder dier bundels gaat.*

Zijn P en P' de punten van zulk een paar. Bij het zoeken naar de meetkundige plaats zullen we alleen op die punten P en P' letten, die voor ieder tweetal bundels *beweeglijke* (d. w. z. niet noodzakelijk in de basispunten vallende) snijpunten zijn, een onderscheiding, die alleen behoeft gemaakt te worden als de bundels gemeenschappelijke basispunten hebben. De zoo verkregen meetkundige plaats M zullen

we de *eigenlijke meetkundige plaats* noemen, ter onderscheiding van de *totale meetkundige plaats*, die men verkrijgt door toe te laten, dat een der punten P en P' een vast snijpunt voor twee der bundels is.

Onderstel nu, dat de bundels (C_s) en (C_t) α vaste snijpunten vertoonen en dat dit aantal voor de bundels (C_t) en (C_r) β en voor de bundels (C_r) en (C_s) γ bedraagt.

Den graad n van M bepalen we uit hare snijpunten met een willekeurige rechte l. Op l nemen we een willekeurig punt Q_{rs} aan en leggen daardoor een C_r en een C_s, die elkaar, behalve in basispunten en in Q_{rs}, nog in $rs - \gamma - 1$ punten snijden. Door ieder dier punten leggen we een C_t. Deze $rs - \gamma - 1$ krommen C_t snijden l in $t(rs - \gamma - 1)$ punten Q_t, die we met het punt Q_{rs} laten correspondeeren. Om omgekeerd te vinden hoeveel punten Q_{rs} met een gegeven punt Q_t van l correspondeeren, nemen we op l een willekeurig punt Q_r aan en leggen daardoor een C_r, die de door Q_t gaande C_t buiten de basispunten in $rt - \beta$ punten snijdt. Door ieder dier punten brengen we een C_s, waarvan we de snijpunten met l Q_s noemen. Met een punt Q_r correspondeeren nu $s(rt - \beta)$ punten Q_s en met een punt Q_s $r(st - \alpha)$ punten Q_r. De $2\,rst - \alpha r - \beta s$ coincidenties $Q_r Q_s$ zijn de t snijpunten van l met de door Q_t gaande C_t en de met Q_t correspondeerende punten Q_{rs}, die dus ten getale van $2\,rst - \alpha r - \beta s - t$ aanwezig zijn.

Tusschen de punten Q_{rs} en Q_t van l heeft men dus een $(rst - \gamma t - t,\ 2\,rst - \alpha r - \beta s - t)$- correspondentie. De $3\,rst - \alpha r - \beta s - \gamma t - 2t$ coincidenties zijn de snijpunten van l met M en de snijpunten van l met de aanrakingskromme der bundels (C_r) en (C_s), d. i. de meetkundige plaats van de raakpunten der elkaar rakende krommen C_r en C_s. Heeft men nu twee krommenstelsels (μ_1, ν_1) en (μ_2, ν_2) [1]), dan is graad dier aanrakingskromme

$$\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2$$ [2]).

[1]) Een krommenstelsel (μ, ν) is een enkelvoudig oneindig stelsel van krommen, waarvan er μ door een willekeurig gegeven punt gaan en ν een willekeurig gegeven rechte aanraken.

[2]) Deze graad wordt gevonden door de snijpunten met een willekeurige rechte l te tellen. Daartoe beschouwt men de omhullende der raaklijnen van de krommen van het stelsel (μ_1, ν_1) in hare snijpunten met de rechte l; deze omhullende is van de klasse $\mu_1 + \nu_1$, daar de door een willekeurig punt Q van l gaande raaklijnen dier omhullende zijn: de raaklijnen in Q aan de μ_1 door Q gaande krommen van het stelsel en de ν_1-maal tellende rechte l. Evenzoo geeft het stelsel (μ_2, ν_2) een omhullende van de klasse $\mu_2 + \nu_2$. De $(\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)$ gemeenschappelijke raaklijnen van beide omhullenden zijn de $\nu_1\nu_2$-maal tellende rechte l en $\mu_1\mu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1$ andere rechten, wier snijpunten met l de snijpunten van l met de aanrakingskromme aanwijzen. Voor een afleiding met behulp van de voorwaarden symboliek zie SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, p. 51—52.

Nemen we voor de stelsels de beide bundels (C_r) en (C_s), dan is $\mu_1 = \mu_2 = 1$ en (zooals onmiddellijk uit het correspondentiebeginsel volgt) $\nu_1 = 2(r-1)$, $\nu_2 = 2(s-1)$. De graad der aanrakingskromme wordt dus:

$$2r + 2s - 3.$$

Voor het aantal snijpunten van l met M blijft dus over:

$$3rst - \alpha r - \beta s - \gamma t - 2t - (2r + 2s - 3) = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t).$$

We vinden dus:

De meetkundige plaats M der uit twee beweeglijke punten bestaande paren, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, is van den graad

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t);$$

hierin is α het aantal vaste snijpunten der bundels (C_s) en (C_t), β dat der bundels (C_t) en (C_r) en γ dat der bundels (C_r) en (C_s).

2. Terwijl de voorgaande beschouwingen juist blijven als er van de basispunten van een zelfden bundel eenige samenvallen, zullen we in het volgende onderstellen, dat de bundels (C_r), (C_s) en (C_t) resp. r^2, s^2 en t^2 verschillende basispunten hebben, zoodat we nog alleen toelaten, dat de basispunten van den eenen bundel gedeeltelijk met die van een anderen bundel samenvallen. Dan is α het aantal gemeenschappelijke basispunten der bundels (C_s) en (C_t) (die echter ook nog wel tot (C_r) kunnen behooren), enz.

Hebben de bundels geen gemeenschappelijke basispunten ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), dan wordt de graad der meetkundige plaats:

$$3(rst + 1) - 2(r + s + t).$$

Dit is ook bij gemeenschappelijke basispunten de graad der *totale* meetkundige plaats zoolang die bepaald is, d.i. zoolang er geen aan de drie bundels gemeenschappelijke basispunten zijn. Is er wel zulk een punt, dan levert dit te zamen met een geheel willekeurig punt een puntenpaar PP', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, van welk puntenpaar nu echter slechts één punt beweeglijk is; de eigenlijke meetkundige plaats is dan evenwel nog steeds bepaald.

Een basispunt alleen van den bundel (C_r) noemen we A_r, een gemeenschappelijk basispunt der bundels (C_s) en (C_t), dat geen basispunt van den bundel (C_r) is, noemen we A_{st} en een gemeenschappelijk basispunt der drie bundels A_{rst}. Is δ het aantal punten A_{rst}, dan bedraagt het aantal punten A_{st} $\alpha' = \alpha - \delta$, dat der punten A_{rt} $\beta' = \beta - \delta$ en dat der punten A_{rs} $\gamma' = \gamma - \delta$, terwijl het aantal punten A_r gelijk is aan $r^2 - \beta' - \gamma' - \delta$, enz. Met invoering van

α', β', γ' en δ wordt de graad n der eigenlijke meetkundige plaats:

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha' r + \beta' s + \gamma' t) - \delta(r + s + t).$$

Hieruit zien we, dat de graad der eigenlijke meetkundige plaats door een gemeenschappelijk basispunt A_{st} met r verlaagd wordt. Zijn er geen punten A_{rst} ($\delta = 0$), dan kan men zich van die graadverlaging gemakkelijk rekenschap geven door op te merken, dat zich van de totale meetkundige plaats de door A_{st} gaande C_r afsplitst, die niet tot de eigenlijke meetkundige plaats behoort. Het punt A_{st} geeft nl. te zamen met een willekeurig punt dier C_r een aan de vraag voldoend puntenpaar, waarvan echter slechts het laatstgenoemde punt beweeglijk is [1]). Verder blijkt, dat een punt A_{rst} den graad M met $r + s + t$ vermindert, iets waarvan men zich, door het onbepaald worden der totale meetkundige plaats, niet door afsplitsing rekenschap kan geven [2]).

3. De eigenlijke meetkundige plaats M heeft in de basispunten der drie bundels meervoudige punten, waarvan de multipliciteiten gemakkelijk te bepalen zijn.

Een basispunt A_r alleen van den bundel (C_r) is een $(st - \alpha - 1)$-voudig punt van M. Immers de door A_r gaande krommen C_s en C_t hebben buiten A_r en de basispunten $st - \alpha - 1$ snijpunten, waarvan ieder met A_r gecombineerd een puntenpaar oplevert, dat aan de vraag voldoet. De raaklijnen in A_r aan de $st - \alpha - 1$ door de genoemde snijpunten gaande krommen C_r zijn de raaklijnen van M in het meervoudige punt.

Om de multipliciteit van een punt A_{st} te bepalen merken we op, dat om een aan de vraag voldoend puntenpaar te krijgen, waarvan een der beweeglijke punten in A_{st} valt, noodig is, dat C_r door A_{st} gaat (waardoor ze bepaald is), terwijl C_s en C_t, die steeds door A_{st} gaan, een beweeglijk snijpunt in A_{st} moeten werpen, dus elkaar in A_{st} moeten aanraken. De vraag is nu: Hoe dikwijls gebeurt het, dat twee elkaar in A_{st} rakende krommen C_s en C_t elkaar nog eens op de door A_{st} gaande C_r snijden? Om deze vraag te beantwoorden brengen wij een willekeurige C_s aan, die de genoemde C_r buiten de basispunten in $rs - \gamma - 1$ punten snijdt. Door ieder dier punten leggen we een C_t, waardoor er tusschen de krommen C_s en C_t (en

---

[1]) Telt A_{st} voor ε vaste snijpunten der krommen C_s en C_t, dan splitst zich de door A_{st} gaande C_r ε-maal tellend af.

[2]) Telt A_{rst} voor ε vaste snijpunten van C_s en C_t, ζ vaste snijpunten van C_r en C_t en η vaste snijpunten van C_r en C_s, dan verlaagt A_{rst} den graad van M met $\varepsilon r + \zeta s + \eta t$; dit geldt ook voor een punt A_{st}, maar dan zijn ζ en η als nul te beschouwen.

dus ook tusschen hare raaklijnen in A_{st}) een correspondentie ontstaat, waarbij met een C_s $rs - \gamma - 1$ krommen C_t en met een C_t $rt - \beta - 1$ krommen C_s correspondeeren. Het gebeurt dus voor de elkaar in A_{st} rakende krommen C_s en C_t $(rs + rt - \beta - \gamma - 2)$-maal, dat C_s en C_r behalve A_{st} nog een tweede beweeglijk snijpunt hebben, dat ook beweeglijk snijpunt van C_t en C_r is. Hierbij is echter het geval medegeteld, waarin dit tweede snijpunt met A_{st} samenvalt, dus de krommen C_s en C_t in A_{st} aan de C_r raken; er valt dan nog steeds slechts één beweeglijk snijpunt van C_s en C_t in A_{st}, terwijl er geen ander beweeglijk snijpunt behoeft te zijn, dat op C_r ligt, zoodat we zoo geen puntenpaar krijgen, dat een door A_{st} gaanden tak van M oplevert. Het punt A_{st} is dus een $(rs + rt - \beta - \gamma - 3)$-voudig punt van M.

Om de multipliciteit van een punt A_{rst} te bepalen heeft men na te gaan hoe dikwijls het gebeurt, dat drie elkaar in A_{rst} rakende krommen C_r, C_s en C_t nog eens alle drie door hetzelfde punt gaan. Daartoe brengen we een willekeurige C_r aan en de C_s, die deze C_r in A_{rst} aanraakt. Door ieder der $rs - \gamma - 1$ buiten de basispunten gelegen snijpunten van deze C_r en C_s leggen we een C_t. De vraag is dan hoe dikwijls het gebeurt, dat deze C_t in A_{rst} aan C_r en C_s raakt. Noemen we l_{rs} de gemeenschappelijke raaklijn in A_{rst} van C_r en C_s en l_t de raaklijn van C_t in dat punt. Met l_{rs} komen nu $rs-\gamma-1$ rechten l_t overeen. Om omgekeerd te vinden hoeveel rechten l_{rs} met een willekeurig gekozen rechte l_t correspondeeren, brengen we een willekeurige C_r aan, die de door l_t bepaalde C_t buiten de basispunten in $rt-\beta$ punten snijdt. Door ieder dier snijpunten leggen we een C_s. Zijn l_r en l_s de raaklijnen in A_{rst} van C_r en C_s, dan komen met l_r $rt-\beta$ rechten l_s en met l_s $st-\alpha$ rechten l_r overeen. De $rt + st - \alpha - \beta$ coincidentiestralen wijzen de met l_t correspondeerende rechten l_{rs} aan; tot die coincidentiestralen behoort echter de lijn l_t zelf, die niet medegeteld moet worden, zoodat er $rt+st-\alpha-\beta-1$ met l_t correspondeerende rechten l_{rs} overblijven. Tusschen de rechten l_{rs} en l_t bestaat dus een $(rs-\gamma-1, rt + st-\alpha-\beta-1)$-correspondentie.

De gezochte rechten l_{rst} worden aangewezen door de $st + tr + rs - (\alpha + \beta + \gamma) - 2$ coincidentiestralen dezer correspondentie, waarvan er evenwel drie niet medegeteld moeten worden. Wanneer nl. de aanraking in A_{rst} van C_r en C_s een aanraking van de 2de orde wordt, valt een der $rs - \gamma - 1$ in het algemeen buiten de basispunten gelegen snijpunten van C_r en C_s in A_{rst} en wel in de richting van l_{rs}. De door dat snijpunt gaande C_t zal dus in A_{rst} aan l_{rs} raken, m. a. w. l_t valt met l_{rs} samen. Daar echter wel de krommen C_r en C_s, maar niet de krommen C en C_t en ook niet de krommen C_s en

en C_t in A_{rst} een aanraking van de 2de orde vertoonen, krijgt men zoo geen puntenpaar, dat aan de vraag voldoet. Nu komt het bij twee krommenbundels met een gemeenschappelijk basispunt, waartusschen een projectief verband daardoor is vastgelegd, dat de krommen elkaar in dat basispunt moeten aanraken, *driemaal* voor dat dit een aanraking van de 2de orde wordt, zoodat er van het aantal coincidentiestralen 3 moet worden afgetrokken om dat der gezochte rechten l_{rst} te vinden. Hieruit volgt, dat de multipliciteit van het punt A_{rst} $st + tr + rs - (\alpha + \beta + \gamma) - 5$ bedraagt.

We vinden dus:

Een basispunt alleen van den bundel (C_r) *is een*

$$(st - \alpha - 1)\text{-}$$

voudig punt der eigenlijke meetkundige plaats M. Een gemeenschappelijk basispunt der bundels (C_s) *en* (C_t), *dat geen basispunt van* (C_r) *is, is een*

$$(rs + rt - \beta - \gamma - 3)\text{-}$$

voudig en een gemeenschappelijk basispunt der drie bundels een

$$(st + tr + rs - \alpha - \beta - \gamma - 5)\text{-}$$

voudig punt van M [1]).

4. Met behulp van het voorgaande laten zich gemakkelijk de snijpunten van M met een willekeurige kromme van een der bundels, b.v. een C_r, aangeven. Deze zijn:

1°. De $r^2 - \beta - \gamma + \delta$ punten A_r, te zamen voor

$$(r^2 - \beta - \gamma + \delta)(st - \alpha - 1)$$

snijpunten tellend.

2°. De $\beta - \delta$ punten A_{rt}, te zamen voor

$$(\beta - \delta)(sr + st - \alpha - \gamma - 3)$$

snijpunten tellend.

---

[1]) Zijn er geen punten A_{rst} $(\delta = 0)$ en is dus de totale meetkundige plaats niet onbepaald, dan kan men ook naar de multipliciteiten der punten A_r en A_{st} als punten van de totale meetkundige plaats vragen. Nu bestaat het oneigenlijke deel der meetkundige plaats uit α krommen C_r, β krommen C_s en γ krommen C_t. Hiervan gaan door een punt A_r de α krommen C_r en door een punt A_{st} de β krommen C_s, de γ krommen C_t en een der krommen C_r. Hieruit volgt:

Een punt A_r *is een* $(st - 1)$*-, en een punt* A_{st} *een* $(rs + rt - 2)$*-voudig punt der totale meetkundige plaats.*

De multipliciteit van A_r als punt der totale meetkundige plaats is dus door het samenvallen der basispunten niet veranderd, terwijl de multipliciteit van A_{st} gelijk is aan de som der multipliciteiten, die dit punt hebben zou als het alleen basispunt van den bundel (C_s) of alleen basispunt van den bundel (C_t) was.

3°. De $\gamma - \delta$ punten A_{rs}, gevend

$$(\gamma - \delta)(tr + ts - \alpha - \beta - 3)$$

snijpunten.

4°. De δ punten A_{rst}, gevend te zamen

$$\delta(st + tr + rs - \alpha - \beta - \gamma - 5)$$

snijpunten.

5°. De beweeglijke snijpunten van M met C_r, dit zijn die snijpunten, die zich verplaatsen als we een andere C_r kiezen. Deze worden gevonden als de gemeenschappelijke puntenparen van de enkelvoudig oneindige lineaire scharen van puntgroepen op C_r door de bundels (C_s) en (C_t) ingesneden. Het aantal daarvan vindt men uit de volgende stelling:

Heeft men op een kromme van het geslacht p twee enkelvoudig oneindige lineaire scharen van puntgroepen uit a en b punten bestaande, dan bedraagt het aantal gemeenschappelijke puntenparen dier scharen

$$(a - 1)(b - 1) - p.$$

In ons geval is $a = rs - \gamma$, $b = rt - \beta$ en (daar C_r een willekeurige kromme van den bundel (C_r) is) $p = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$. Voor het aantal gemeenschappelijke puntenparen vindt men dus:

$$(rs - \gamma - 1)(rt - \beta - 1) - \tfrac{1}{2}(r - 1)(r - 2),$$

en voor het aantal beweeglijke snijpunten van M en C_r:

$$2(rs - \gamma - 1)(rt - \beta - 1) - (r - 1)(r - 2).$$

Het totale aantal snijpunten wordt dus:

$$r(3rst + 3 - 2r - 2s - 2t - \alpha r - \beta s - \gamma t),$$

in overeenstemming met de waarde, die we voor den graad van M gevonden hebben.

5. De puntenparen PP', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, bepalen op M een involutorische (1,1)-correspondentie; in het volgende zullen we P en P' als correspondeerende punten van M aanduiden.

Valt P in een buiten de basispunten gelegen dubbelpunt van M, dan zullen met P in het algemeen twee verschillende punten P' en P' correspondeeren, al naar gelang men P als punt van den eenen of den anderen door P gaanden tak van M beschouwt. De door P gaande krommen der bundels hebben nu nog twee andere gemeenschappelijke punten P' en P'', zoodat men zoo een puntentripel $PP'P''$ krijgt, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is.

Het kan echter ook voorkomen, dat de punten P' en P'' samenvallen. In dat geval correspondeeren met de beide takken door P

twee takken door P', zoodat P' eveneens dubbelpunt van M is. De door P gaande krommen der bundels hebben nu nog slechts één ander gemeenschappelijk punt P', maar nu doet zich de bijzonderheid voor, dat men P of P' op twee wijzen zoo verplaatsen kan, dat het andere gemeenschappelijke punt behouden blijft. PP' is dan dus als een dubbel correspondeerend puntenpaar op te vatten.

Heeft men nu omgekeerd een puntentripel $PP'P''$, dat op krommen van ieder der bundels ligt, dan is P een dubbelpunt van M, daar met P zoowel P' als P'' correspondeert en het dus mogelijk moet zijn P zoo te verplaatsen, dat het correspondeerende punt een door P' gaanden tak beschrijft, en zoo dat een door P'' gaande tak beschreven wordt. De kromme M heeft dus twee door P gaande takken $P1$ en $P2$, waarmede de takken $P'1$ en $P''2$ correspondeeren. Door het punt P' (dat natuurlijk eveneens dubbelpunt van M is, evenals P'') gaat nog een tweede tak $P'3$ en door P'' een tweede tak $P''3$, welke takken onderling correspondeeren. Doorloopt een punt Q den tak $P1$, dan hebben de door Q gaande krommen C_r, C_s, C_t nog een tweede gemeenschappelijk punt, dat den tak $P'1$ beschrijft, terwijl er nog een derde gemeenschappelijk punt P'' ontstaat en weer verdwijnt als Q het punt P passeert. Dit derde gemeenschappelijke punt verplaatst zich (en wel langs den tak $P''2$) als Q den anderen door P gaanden tak doorloopt, terwijl dan juist het in P' vallende gemeenschappelijke punt ontstaat en verdwijnt.

Puntentripels $PP'P''$, en dus ook buiten de basispunten vallende dubbelpunten van M, zullen aanwezig zijn, daar een puntentripel van 6 parameters afhangt en het een 6-voudige voorwaarde is, dat er een kromme van ieder der bundels door gaat. Men heeft dus:

De kromme M heeft buiten de basispunten der bundels dubbelpunten, die drie aan drie bij elkaar behooren en de puntentripels vormen, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is. Met den eenen of den anderen tak door een dubbelpunt van zulk een drietal correspondeert een tak door het tweede resp. het derde dubbelpunt van dit drietal.

Bovendien kan M echter nog paren van dubbelpunten bezitten, die de dubbele correspondeerende puntenparen aanwijzen. Met de beide takken door een dubbelpunt van zulk een paar correspondeeren de takken door het andere dubbelpunt van het paar.

6. Het aantal coincidenties der correspondentie tusschen P en P' laat zich als volgt bepalen. De punten P en P' vallen samen als de door P gaande krommen C_r, C_s en C_t in P dezelfde raaklijn hebben. P moet dan liggen zoowel op de aanrakingskromme R_{rs} der bundels

(C_r) en (C_s) als op de aanrakingskromme R_{rt} van (C_r) en (C_t). Het aantal snijpunten dier aanrakingskrommen, die van den graad $2r + 2s - 3$ resp. $2r + 2t - 3$ zijn, bedraagt

$$(2r + 2s - 3)(2r + 2t - 3).$$

Sommige dezer snijpunten liggen echter niet op de derde aanrakingskromme R_{st} en moeten dus niet medegeteld worden. De kromme R_{rs} gaat nl. éénmaal door een basispunt A_r of A_s en driemaal door een gemeenschappelijk basispunt A_{rs} of A_{rst}; immers in een punt van R_{rs} vallen twee beweeglijke snijpunten van C_r en C_s samen, zoodat het punt A_{rs} als punt der aanrakingskromme wordt opgeleverd als C_r en C_s in A_{rs} een aanraking van de 2de orde vertoonen, hetgeen driemaal gebeurt. Verder gaat R_{rs} door de dubbelpunten der krommen C_r en C_s, waarvan het aantal voor den bundel (C_r) $3(r-1)^2$ en voor den bundel (C_s) $3(s-1)^2$ bedraagt, zooals onmiddellijk uit den graad van den discriminant volgt.

Ieder der $r^2 - \beta' - \gamma' - \delta$ punten A_r is enkelvoudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt} (enkelvoudig, daar de raaklijnen in A_r aan R_{rs} en R_{rt} de raaklijnen der door A_r gaande krommen C_s en C_t zijn en dus in het algemeen verschillen), echter geen punt van R_{st}. Ieder der α' punten A_{st} is een dubbel snijpunt van R_{rs} en R_{rt}, daar die aanrakingskrommen in A_{st} een enkelvoudig punt hebben met dezelfde raaklijn, nl. die der door A_{st} gaande C_r; deze punten zijn ook punten van R_{st} en wel drievoudige. Ieder der β' punten A_{rt} is drievoudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt} (daar het enkelvoudig punt van R_{rs} en drievoudig punt van R_{rt} is) en ligt tevens op R_{st}; hetzelfde geldt voor de γ' punten A_{rs}. Ieder der δ punten A_{rst}, die basispunten der drie bundels zijn, is 9-voudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt}, daar het van ieder dier krommen een 3-voudig punt is; tevens is het drievoudig punt van R_{st}. Eindelijk zijn de $3(r-1)^2$ dubbelpunten van den bundel (C_r) enkelvoudige snijpunten van R_{rs} en R_{rt}, echter geen punten van R_{st}; van de door zulk een dubbelpunt gaande krommen C_r, C_s en C_t voert wel C_r aan C_s en aan C_t een oneigenlijke aanraking uit, zonder dat evenwel C_s en C_t elkaar aanraken.

Hieruit ziet men, dat de aanrakingskrommen R_{rs} en R_{rt}

$$r^2 - \beta' - \gamma' - \delta + 3(r-1)^2 = 4r^2 - 6r + 3 - \beta' - \gamma' - \delta$$

snijpunten hebben, die geen punten van R_{st} zijn, en dus geen samenvallende punten P en P' opleveren. Bovendien hebben R_{rs} en R_{rt}

$$2\alpha' + 3\beta' + 3\gamma' + 9\delta$$

in de gemeenschappelijke basispunten vallende snijpunten, die wel op R_{st} liggen, maar toch geen samenvallende punten P en P' opleveren, doordat daarvoor noodig is dat van drie door een zelfde

punt gaande krommen C_r, C_s en C_t ieder tweetal twee in dat punt vallende *beweeglijke* snijpunten vertoont. Voor het aantal samenvallende punten P en P' blijft derhalve over:

$$(2r + 2s - 3)(2r + 2t - 3) - (4r^2 - 6r + 3 - \beta' - \gamma' - \delta') - \\ - (2\alpha' + 3\beta' + 3\gamma' + 9\delta') = \\ = 4(st + tr + rs) - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha' + \beta' + \gamma' + 4\delta').$$

We vinden dus:

Het gebeurt

$$4(st + tr + rs) - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

maal, dat de beide punten P en P', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, samenvallen.

7. Met behulp van dit resultaat laat zich de klasse der omhullende van de verbindingslijnen PP' gemakkelijk bepalen. Daartoe heeft men te tellen hoeveel rechten PP' door een willekeurig punt S gaan. Dit aantal vindt men door de correspondentie tusschen de stralen SP en SP' te beschouwen, die we l en l' noemen. Dit is een involutorische (n, n)-correspondentie, waarin n de graad van de meetkundige plaats M der punten P en P' voorstelt; immers op een willekeurigen straal l (of l') liggen n punten P (of P'), met ieder waarvan één punt P' (of P) correspondeert. Er zijn dus $2n$ coincidentiestralen, die daardoor kunnen worden opgeleverd, dat PP' door S gaat, of daardoor dat P en P' samenvallen.

Voor het aantal coincidentiestralen, waarbij PP' door S gaat, vindt men dus:

$$2\{3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t)\} - \{4(st + tr + rs) - \\ - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\} = 6rst - 4(st + tr + rs) + \\ + 2(r + s + t) - 2\alpha(r - 1) - 2\beta(s - 1) - 2\gamma(t - 1) + 2\delta.$$

Deze coincidentiestralen vallen echter twee aan twee samen. Immers gaat de verbindingslijn der correspondeerende punten P_1 en P_1' door S, dan komen met P_1P_1', als lijn l beschouwd, n lijnen l' overeen, waarvan er twee met P_1P_1' samenvallen, daar als men het punt P van l in P_1 of in P_1' kiest het correspondeerende punt P' in P_1' resp. P_1 komt. Evenzoo komen met P_1P_1', als lijn l' beschouwd, n lijnen l overeen, waarvan er eveneens twee met P_1P_1' samenvallen, waaruit volgt, dat P_1P_1' een dubbele coincidentiestraal is[1]). Om het

[1]) Van de juistheid dezer gevolgtrekking kan men zich gemakkelijk overtuigen door de correspondentie tusschen de stralen SP en SP' in beeld te brengen. Daartoe beschouwen we de parameters der rechten SP en SP' als rechthoekige

aantal der door S gaande rechten PP', dus de klasse der omhullende, te vinden moet derhalve het bovengevonden aantal nog door 2 gedeeld worden, zoodat men heeft:

De omhullende der verbindingslijnen van puntenparen, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, is van de klasse

$$3\,rst - 2\,(st+tr+rs) + (r+s+t) - \alpha(r-1) - \beta(s-1) - \gamma(t-1) + \delta =$$
$$= 3\,rst - 2\,(st+tr+rs) + (r+s+t) - \alpha'(r-1) - \beta'(s-1) - \gamma'(t-1) -$$
$$- \delta(r+s+t-4).$$

8. Hebben de bundels geen gemeenschappelijke basispunten, dan is de klasse der omhullende $3\,rst - 2\,(st + tr + rs) + (r + s + t)$. Door een gemeenschappelijk basispunt A_{st} der bundels (C_s) en (C_t) wordt die klasse met $r-1$ verlaagd. *Dit komt doordat het punt A_{st} zich $(r-1)$-maal tellend van de omhullende heeft afgesplitst.* Immers de door A_{st} gaande kromme C_r heeft zich van de meetkundige plaats der punten P en P' afgesplitst. Kiest men nu P willekeurig op deze C_r, dan valt het correspondeerende punt P' in A_{st}. Een willekeurige door A_{st} gaande rechte is dus $(r-1)$-maal als verbindingslijn PP' op te vatten, daar men nog ieder der $r-1$ buiten A_{st} gelegen snijpunten met C_r als het punt P kan kiezen.

Hebben de drie bundels een gemeenschappelijk basispunt A_{rst}, dan blijft de totale omhullende van PP' (in tegenstelling met de totale meetkundige plaats van P en P') bepaald. Wel kan P geheel willekeurig worden aangenomen, maar dan valt P' in een punt A_{rst}, zoodat de lijn PP' door dat punt A_{rst} gaat en dus niet geheel willekeurig uitvalt. Daar de klasse der eigenlijke omhullende door het punt A_{rst} met $r+s+t-4$ verlaagd is, zoo blijkt, *dat A_{rst} zich $(r+s+t-4)$-maal tellend van de omhullende afsplitst.* Door het totaal onbepaald worden van een der punten van het puntenpaar laat zich die multipliciteit, voor zoover ik zie, niet op eenvoudige wijze verklaren.

Cartesiaansche coördinaten x en y van een punt, dat dan beeldpunt dier twee rechten is. De beeldkromme (die, daar de correspondentie involutorisch is, symmetrisch is ten opzichte der lijn $y=x$) wijst door hare snijpunten met de lijn $y=x$ de coincidentiestralen aan. Is nu B het beeldpunt der in P_1P_1' samenvallende stralen l en l', dan wordt de beeldkromme zoowel door een rechte evenwijdig aan de y-as als door een rechte evenwijdig aan de x-as in twee samenvallende punten B gesneden, daar P_1P_1' als l of l' tweemaal met zich zelf als l' resp. l correspondeert. B is dus dubbelpunt der beeldkromme, zoodat de rechte $y=x$ twee in B vallende snijpunten oplevert.

Wiskunde. — De Heer J. C. KLUYVER biedt een mededeeling aan: *„Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n."*

Het aantal $\varphi(n)$ van de getallen ν kleiner dan n en ondeelbaar met n kan door middel van de deelers d worden uitgedrukt.

Men heeft

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, d', \qquad (dd' = n)$$

indien men door $\mu(q)$ aanduidt de rekenkundige functie, die gelijk is aan nul, als q deelbaar is door een kwadraat, en die overigens gelijk is aan $+1$ of -1, naargelang q het product is van een even of van een oneven aantal priemgetallen.

Deze vergelijking is een bijzonder geval van eene meer algemeene, met behulp waarvan zekere symmetrische functies van de getallen ν uitgedrukt kunnen worden door de deelers d.

Deze algemeene betrekking kan geschreven worden als volgt [1])

$$\sum_{\nu} f(\nu) = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} f(k\,d).$$

Voor het bewijs heeft men op te merken, dat in de onderstelling $(m, n) \sim D$ de term $f(m)$ in het rechter lid zoo dikwijls voorkomt, als d een deeler is van D. Daarom wordt de totale coëfficiënt van den term $f(m)$ in het rechterlid gelijk aan

$$\sum_{d/D} \mu(d),$$

en deze som is nul voor D grooter dan één, en gelijk aan één, wanneer m gelijk is aan een der getallen ν.

Van deze vergelijking van KRONECKER zullen eenige eenvoudige gevallen worden beschouwd.

Laat vooreerst zijn

$$f(y) = e^{xy}.$$

De vergelijking wordt

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} e^{xkd} = \sum_{d/n} \mu(d)\, e^{xd}\, \frac{e^{xn} - 1}{e^{xd} - 1},$$

of omdat

$$\sum_{d/n} \mu(d) = 0$$

is,

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d)\, \frac{e^{xn} - 1}{e^{xd} - d}.$$

---

[1]) KRONECKER, Vorlesungen über Zahlentheorie. I, p. 251.

Schrijft men

$$\sum_{\nu} \frac{x e^{x\nu}}{e^{xn} - 1} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{x}{e^{xd} - 1},$$

dan kunnen de functies van BERNOULLI $f_k(\theta)$, bepaald door de vergelijking

$$\frac{e^{\theta x} - 1}{e^x - 1} = \theta + \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k f_k(\theta),$$

worden ingevoerd, en men kan op deze wijze aantoonen, dat

$$\sum_{\nu} \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k n^{k-1} f'_k\left(\frac{\nu}{n}\right) \right\} = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} xd + \frac{B_1}{2!} x^2 d^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 d^4 + \ldots \right\}.$$

Door de overeenkomstige termen in beide leden aan elkaar gelijk te stellen vindt men

$$\sum_{\nu} f'_{2m}\left(\frac{\nu}{n}\right) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m!} \sum_{d/n} \mu(d) d^{-2m+1}$$

als eene eerste uitbreiding van de betrekking

$$\sum_{\nu} \nu^0 = \sum_{d/n} \mu(d) d'.$$

Als men opmerkt, dat

$$\sum_{d/n} \mu(d) d^{-2m+1} = \frac{1}{n^{2m-1}} \sum_{d/n} \mu(d) d^{2m-1},$$

volgt er voor twee getallen n en n', die dezelfde priemfactoren hebben

$$\frac{\sum_{\nu} f'_{2m}\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\sum_{\nu'} f'_{2m}\left(\frac{\nu'}{n'}\right)} = \left(\frac{n'}{n}\right)^{2m-1}.$$

Op dezelfde wijze kan eene uitdrukking voor de som van de k^{de}-machten der getallen ν worden verkregen. Als men beide leden der vergelijking

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{e^{xn} - 1}{e^{xd} - 1}$$

ontwikkelt, vindt men

$$\frac{1}{k!} \sum \nu^k = \sum_{d/n} \mu(d) d^k f_k(d').$$

Andere betrekkingen van denzelfden aard, die goniometrische functies bevatten, kan men afleiden door x te veranderen in $2\pi i x$.

Uit

$$\sum_{\nu} e^{2\pi i x \nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{e^{2\pi i x n} - 1}{e^{2\pi i x d} - 1}$$

vindt men door de bestaanbare en de imaginaire stukken te scheiden

$$\sum_{\nu} \cos 2\pi x\nu = \tfrac{1}{2} \sin 2\pi xn \sum_{d/n} \mu(d) \cot \pi xd,$$

$$\sum_{\nu} \sin 2\pi x\nu = \sin^2 \pi xn \sum_{d/n} \mu(d) \cot \pi xd.$$

In het bijzonder geeft de eerste dezer vergelijkingen eene eenvoudige uitkomst, als men $x = \frac{1}{n} + \varepsilon$ stelt, waar ε is eene tot nul naderende grootheid.

Daar de factor $\sin 2\pi xn$ tegelijk met ε tot nul nadert, wordt het geheele rechter lid nul op den term na, waarin $d = n$. Op deze wijze komt er

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi\nu}{n} = \mu(n),$$

en men heeft de functie $\mu(n)$, die oorspronkelijk alleen afhing van de ondeelbare factoren van n, uitgedrukt als een functie van de getallen ondeelbaar met n.

Op eene dergelijke wijze kan men in de tweede vergelijking stellen $x = \frac{1}{2n}$, waardoor gevonden wordt

$$\sum_{\nu} \frac{\sin \pi\nu}{n} = \sum_{d/n} \mu(d) \cot \frac{\pi d}{2n}.$$

Nog eene andere goniometrische formule wordt verkregen uit de cosinus-betrekking door de substitutie $x = \frac{q}{n} + \varepsilon$. Laat D de grootste gemeene deeler zijn van de getallen n en q, zoodat men heeft

$$n = n_0 D \quad , \quad q = q_0 D.$$

In het rechterlid zijn dan, wanneer ε tot nul nadert, alleen die termen te behouden, in welke qd deelbaar is door n, of wat hetzelfde is, die termen voor welke de complementaire deeler d' deelbaar is op D.

Men heeft dus

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi q\nu}{n} = \sum_{d'/D} \mu\left(\frac{n}{d'}\right) d' = D \sum_{d/D} \mu(n_0 d) \frac{1}{d}. \qquad (dd' = D)$$

In plaats van hier de sommatie uit te strekken over alle deelers d van D, is het voldoende alleen in aanmerking te nemen die deelers δ van n, die ondeelbaar zijn met n_0. Aldus vindt men

$$D \sum_{d/D} \mu(n_0 d) \frac{1}{d} = \mu(n_0) D \sum_{\delta} \mu(\delta) \frac{1}{\delta},$$

en daar het rechterlid blijkbaar herleid kan worden tot

$$\mu(n_0) \frac{\varphi(n)}{\varphi(n_0)} = \mu\left(\frac{n}{D}\right) \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{D}\right)},$$

verkrijgt men voor elk willekeurig getal q, wanneer geldt $(n, q) \sim D$,

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi q\nu}{n} = \mu\left(\frac{u}{D}\right) \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{D}\right)}.$$

Aangaande de uitkomst

$$\sum_{\nu}' \cos \frac{2\pi\nu}{n} = \mu(n)$$

kan nog eene enkele opmerking gemaakt worden. Aan elk getal ν is een tweede $\nu' = n - \nu$ toegevoegd; stelt men nu voor door ϱ_n eene onherleidbare breuk $< \frac{1}{2}$ met den noemer n, dan kan men dus schrijven

$$2\sum \cos 2\pi\varrho_n = \mu(n),$$

en ook

$$2\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n = \sum_{n \leq g} \mu(n).$$

Voor groote waarden van g nu zullen de breuken ϱ_n zich niet gelijkmatig maar toch min of meer geregeld over het vak $0 - \frac{1}{2}$ verspreiden, en er is eenige grond om te verwachten, dat de positieve en de negatieve termen van de som $\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n$ grootendeels elkaar zullen vernietigen; daarom is de vergelijking

$$2\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n = \sum_{n \leq g} \mu(n)$$

geheel in overeenstemming met de onderstelling van VON STERNECK, dat als g grooter en grooter wordt, de volstrekte waarde van $\sum_{n \leq g} \mu(n)$ de waarde $\sqrt{g}$ niet te boven gaat.

Men verkrijgt een ander stel formules door in de vergelijking van KRONECHER te nemen

$$f(y) = \log\left(e^{\frac{2\pi ix}{n}} - e^{\frac{2\pi iy}{n}}\right).$$

Er komt dan

$$\sum_{\nu} \log\left(e^{\frac{2\pi ix}{n}} - e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}\right) = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} \log\left(e^{\frac{2\pi ix}{n}} - e^{\frac{2\pi ikd}{n}}\right),$$

of

$$\sum_{\nu} \log\left(e^{\frac{2\pi ix}{n}} - e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}\right) = \sum_{d/n} \mu(d) \log\left(e^{\frac{2\pi ixd'}{n}} - 1\right)$$

en na eenige herleiding

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \sum_{d/n} \mu(d) \log 2 \sin \frac{\pi x}{d}.$$

Door herhaalde differentiaties ten opzichte van x, kan men uit

deze vergelijking verdere formules vinden, die in aard en strekking overeenkomen met de formule

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, d'.$$

Zoo bijv. vindt men door twee maal te differentieeren

$$\sum_{\nu} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi\nu}{n}} = \frac{1}{3} \sum_{d/n} \mu(d)\, d'^2$$

en komt er door die bewerking te herhalen

$$-\sum_{\nu} \left[\frac{d^{2m}}{dy^{2m}} \log \sin y\right]_{y=\frac{\pi\nu}{n}} = \frac{B_m 2^{2m}}{2m} \sum_{d/n} \mu(d)\, d'^{2m},$$

eene uitkomst, bevat in de nog iets meer algemeene betrekking

$$n^s \sum_{\nu} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(nk-\nu)^s} = \zeta(s) \sum_{d/n} \mu(d)\, d'^s,$$

die uit zichzelve evident is.

Terugkeerende tot de vergelijking

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin y \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \sum_{d/n} \mu(d) \log 2 \sin \frac{\pi x}{d},$$

leidt men af, als x tot nul nadert,

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin \frac{\pi\nu}{n} = -\sum_{d/n} \mu(d) \log d.$$

Ten einde de waarde van het rechterlid te bepalen, merkt men op, dat voor $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ geldt de vergelijking

$$-\sum_{d/n} \mu(d) \log d = -\left[\frac{d}{dy}(1 - e^{y \log p_1})(1 - e^{y \log p_2}) \ldots\right]_{y=0}.$$

Men ziet hieruit, dat als men stelt

$$-\sum_{d/n} \mu(d) \log d = \gamma(n),$$

de functie $\gamma(n)$ nul zal zijn voor alle getallen n, die verschillende ondeelbare factoren hebben, en dat deze functie de waarde $\log p$ zal hebben, als n is eenige macht van het ondeelbare getal p.

Men heeft alzoo

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi\nu}{n} = e^{\gamma(n)},$$

eene uitkomst door KRONECKER [1]) langs anderen weg afgeleid.

In de vergelijking

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \prod_{d/n} \left(2 \sin \frac{\pi x}{d}\right)^{\mu(d)}$$

[1]) KRONECKER, Vorlesungen über Zahlentheorie. I, p. 296,

kan nog eene andere substitutie worden uitgevoerd; men kan x laten naderen tot $-\frac{n}{2}$.

Als n oneven is zijn alle deelers d en d' ook oneven, en men heeft onmiddellijk

$$\prod_{\nu} 2\cos\frac{\pi\nu}{n} = \prod_{d/n}(-1)^{\frac{d'-1}{2}\mu(d)} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)}.$$

Als $n = 2m$ is en m is oneven, zal men hebben $\varphi(m) = \varphi(n)$. Voor de helft zullen de getallen $\varkappa$ ondeelbaar met m en kleiner dan m gelijk zijn aan eenig getal ν, voor de andere helft zullen de getallen $\varkappa$ zijn van de gedaante $\nu - m$.

Men heeft derhalve

$$\prod_{\nu} 2\sin\frac{2\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} 2\sin\frac{2\pi\varkappa}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} 2\sin\frac{\pi\varkappa}{m},$$

waaruit volgt

$$\prod_{\nu} 2\cos\frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \frac{\prod_{\varkappa} 2\sin\frac{\pi\varkappa}{m}}{\prod_{\nu} 2\sin\frac{\pi\nu}{n}} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{\gamma\left(\frac{n}{2}\right)-\gamma(n)}$$

Eindelijk, als $n = 2m$ en m is even, zal men hebben $\varphi(m) = \frac{1}{2}\varphi(n)$. Nu zal elk der getallen $\varkappa$ ondeelbaar met m en kleiner dan m tegelijkertijd gelijk zijn aan eenig getal ν en ook aan der verschillen $\nu - m$.

De berekening geeft in dit geval

$$\prod_{\nu} 2\sin\frac{2\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(u)} \prod_{\varkappa}\left(2\sin\frac{2\pi\varkappa}{n}\right)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa}\left(2\sin\frac{\pi\varkappa}{m}\right)^2.$$

en verder

$$\prod_{\nu} 2\cos\frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \frac{\prod_{\varkappa}\left(2\sin\frac{\pi\varkappa}{m}\right)}{\prod_{\nu} 2\sin\frac{\pi\nu}{n}} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{2\gamma\left(\frac{n}{2}\right)-\gamma(n)}.$$

Uit het bovenstaande kan men besluiten als volgt. Indien men stelt

$$\prod_{\nu} 2\cos\frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{\lambda(n)},$$

zal de rekenkundige functie $\lambda(n)$ alleen dan van nul verschillen, als n het dubbel is van eene macht van eenig priemgetal p, in welk geval $\lambda(n) = \log p$. Men kan hier opnieuw invoeren de onherleidbare

breuken $\varrho_n < \frac{1}{2}$ met den noemer n, en zal kunnen schrijven, wanneer men met $M(q)$ aanwijst het kleinste gemeene veelvoud van alle getallen, die q niet overtreffen,

$$2 \sum_{n \leqq g} log\, 2 \sin \pi \varrho_n = \sum_{n \leqq g} \gamma(n) = log\, M(g),$$

$$2 \sum_{n \leqq g} log\, 2 \cos \pi \varrho_n = \sum_{n \leqq g} \lambda(n) = log\, M\left(\frac{g}{2}\right).$$

Als men nu het quotient $log\, M(g) : log\, g$ als eene benaderde (maar altijd te kleine) waarde beschouwt van het aantal $A(g)$ der ondeelbare getallen kleiner dan g, kan men aan de uitkomst van KRONECKER

$$A(g) = \frac{2}{log\, g} \sum_{n \leqq q} log\, 2 \sin \pi \varrho_n$$

toevoegen de nieuwe vergelijking

$$A\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{2}{log \frac{g}{2}} \sum_{n \leqq g} log\, 2 \cos \pi \varrho_n .$$

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt namens den Heer E. E. MOGENDORFF te Leeuwarden eene mededeeling aan: *„Over eene nieuwe empirische spectraalformule."*

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

Door de fundamenteele onderzoekingen van KAYSER en RUNGE en van RYDBERG werd het bestaan van spectraalreeksen bewezen. Voor de eerste lijnen eener reeks geven echter de door deze natuurkundigen voorgeslagen formules in het algemeen te groote afwijkingen. Ik heb getracht de door RYDBERG gegeven formule

$$n = A - \frac{N_0}{(m + a)^2}$$

te verbeteren. In het bijzonder merkwaardig is in de formule van RYDBERG de daarin voorkomende universeele constante N_0. Voor waterstof volgt uit de formule van BALMER, die in RYDBERG's formule als bijzonder geval is opgesloten, voor de tot vacuum gereduceerde waarneming $N_0 = 109675$.

Ik heb, een oogenblik veronderstellende, dat de N_0 mede veranderlijk was voor de verschillende reeksen, de constanten A,a en N_0 uit 3 van de best waargenomen lijnen berekend. Voor N_0 werden de volgende waarden gevonden:

Hoofdreeks	Lithium	109996
,,	Natrium	107178
,,	Kalium	105638
,,	Rubidium	104723
,,	Caesium	104665
Eerste nevenreeks	Waterstof	109704
,, ,,	Helium	109703
,, ,,	Natrium	110262
,, ,,	Kalium	109081
,, ,,	Zilver	107162
,, ,,	Magnesium	108695
,, ,,	Zink	107489
,, ,,	Zuurstof	110660
Tweede ,,	Natrium	107819
,, ,,	Magnesium	105247
,, ,,	Calcium	103702
,, ,,	Zink	105399
,, ,,	Aluminium	105721

Deze waarden zijn berekend uit niet tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen.

Zooals uit deze getallen blijkt is N_0 niet absoluut constant. Zooals KAYSER [1]) op andere wijze besloot, zien we echter dat N_0 relatief weinig van element tot element verandert. [2]) Het vermoeden ligt voor de hand, dat in de ware formule eene natuurconstante zal voorkomen.

[1]) KAYSER, Handbuch II. p. 553.

[2]) De B in de formule van KAYSER en RUNGE verandert tusschen aanmerkelijk ruimer grenzen, dan de N_0 uit RYDBERG's formule.

Voor de eerste nevenreeks van Aluminium geeft de berekening eene aanmerkelijke afwijking. Berekend uit de eerste termen dier reeks wordt $N_0 = 207620$ gevonden, uit de middenste lijnen $N_0 = 138032$ en uit de lijnen met kleinere λ $N_0 = 125048$.

De 1e nevenreeks van Al. gedraagt zich dus geheel abnormaal.

In de formule van RYDBERG moet een andere functie van het ordegetal m, dan $(m + a)^{-2}$, gebruikt worden, om een betere aansluiting, vooral aan de begintermen van een reeks, te verkrijgen.

In mijn proefschrift, dat binnenkort zal verschijnen, heb ik onderzocht de formule:

$$n = A - \frac{109675}{\left(m + a + \frac{b}{m}\right)^2},$$

waarin n de tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen, A, a en b te bepalen constanten voorstellen. Het ordegetal m doorloopt de rij der positieve, geheele getallen, te beginnen met $m = 1$. Met deze formule wordt in de meeste gevallen eene goede aansluiting verkregen, ook aan de eerste lijnen van een reeks. De nevenreeksen convergeeren vrij wel naar eenzelfde grens, terwijl ook aan de wet van RYDBERG—SCHUSTER goed wordt voldaan, in die gevallen, waar behalve nevenreeksen ook een hoofdreeks is waargenomen.

Ook door RITZ is eene spectraalformule voorgesteld [1]).

In mijne dissertatie heb ik tegen de formules van RITZ bezwaren ingebracht, daar ze aanleiding geeft tot hoogst onwaarschijnlijke combinaties van lijnen. Bij de metalen van de 2de kolom van het systeem van MENDELEJEFF is bovendien zijn beschouwing geheel niet in overeenstemming met de waarneming.

In de volgende tabellen wordt onder m het orde getal, onder λ_w de waargenomen golflengte in Å. E., onder F de foutengrens der waarneming, onder A de afwijking volgens de door mij voorgestelde formule, onder A. K. R. de afwijking volgens de formule van KAYSER en RUNGE weergegeven. Door het teeken * rechts boven een golflengte wordt aangewezen, dat deze lijnen aan de berekening der constanten A, a en b ten grondslag werden gelegd.

De constanten zijn berekend uit de tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen [2]).

---

[1]) Ann. d. Phys. Bd. 12, 1903, p. 264. W. RITZ, Zur Theorie der Serienspectren.

[2]) Deze getallen nam ik, zoo 't mogelijk was steeds uit de „Index of Spectra" van MARSHALL WATTS.

Lithium.

Hoofdreeks : $A = 43480{,}13$; $a = +\,0{,}95182$; $b = +\,0{,}00722$
1e neven reeks : $A = 28581{,}8$; $a = +\,1{,}998774$; $b = -\,0{,}000822$
2e „ : $A = 28581{,}8$; $a = +\,1{,}59872$; $b = -\,0{,}00321$
3e „ ; $A = 28581{,}8$; $a = +\,1{,}95085$; $b = +\,0{,}00404$

De nevenreeksen convergeeren hier blijkbaar naar een zelfde grens.

Het trillingsverschil tusschen de grenzen van hoofd- en nevenreeksen is 43480;13—21581,8=14898,33. Het trillingsgetal van de 1ste lijn der hoofdreeks is 14902,7. Aan de wet van RYDBERG-SCHUSTER voldoet de formule hier dus vrij goed.

HOOFDREEKS.

m	λ_W	F	K	A. K. R.
1	6708,2 *	0,20	.0	+ 108
2	3232,77*	0,03	0	0
3	2741,39	0,03	— 0,06	0
4	2562,60*	0,03	0	0
5	2475,13	0,10	— 0,22	— 0,2
6	2425,55	0,10	— 0,18	— 0,01
7	2394,54	0,20	— 0,13	+ 0,30
8	2373,9 L. D.	?	+ 0,02	+ 0,75
9	2359,4 L. D.	?	+ 0,17	+ 1,18

EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_W	F	A	A. K. R.
1	6103,77*	0,03	0	0
2	4602,37*	0,10	0	0
3	4132,44	0,20	— 0,11	0
4	3915,20*	0,20	0	— 0,20
5	3794,9	5,00	+ 0,09	— 0,35
6	3718.9	5,00	— 1,94	— 2,25
7	3670,6	5,00	— 1,06	— 1,41

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	8127,0* S	0,30	0	— 65
2	4972,11	0,10	— 0,13	0
3	4273,44*	0,20	0	0
4	3985,94	0,20	+ 0,22	0
5	3838,30	3,00	+ 2,40	— 0,2

DERDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	6240,3* S	0,40	0	—
2	4636,3* S	0,40	0	—
3	4148,2 S	1,00	+ 1,6	—
4	3921,8 E H	?	— 0,88	

Met de hoofdletters achter de golflengten worden de waarnemers aangewezen: L. D. Liveing en Dewar; S. Saunders en E. H. Exner en Haschek. Waar geen verdere aanwijzing staat, is de waarneming van Kayser en Runge.

Natrium.

Hoofdreeks (lijnen der doubletten met grootste λ)

$$A = 41447{,}09; \quad a = 1{,}147615; \quad b = -0{,}031484$$

Hoofdreeks (lijnen der doubletten met kleine λ)

$$A = 41445{,}20; \quad a = 1{,}148883; \quad b = -0{,}031908.$$

Voor de berekening van de grens der nevenreeksen is gebruik gemaakt van de wet van Rydberg-Schuster. Met het oog op de constante trillingsverschillen van de doubletten der nevenreeksen, heb ik de berekening alleen uitgevoerd voor de componenten met kleine golflengte.

Voor de 1e nevenreeks is $A = 24491{,}1$; $a = 1{,}98259$; $b = +0{,}00639$

Voor de 2e nevenreeks is $A = 24491{,}1$; $a = 1{,}65160$; $b = -0{,}01056$

HOOFDREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	5896,16*	—	0	+ 78
1	5890,19*	—	0	+ 86
2	3303,07*	0,03	0	0
2	3302,47*	0,03	0	0
3	2852,91	0,05	— 0,14	0
3	2852,91	0,05	— 0,06	0
4	2680,46*	0,10	0	0
4	2680,46*	0,10	0	0
5	2593,98	0,10	+ 0,03	+ 0,03
5	2593,98	0,10	— 0,02	+ 0,09
6	2543,85 L. D.	0,10	— 0,06	+ 0,10
6	2543,85 L. D.	0,10	— 0,14	+ 0,24
7	2512,23 L. D.	0,20	+ 0,03	+ 0,50
7	2512,23 L. D.	0,20	— 0,10	+ 0,60

EERSTE NEVENREEKS

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	8184,33* L.	0,2	0	0
2	5682,90	0,15	0,01	0
3	4979,30*	0,20	0	0
4	4665,20	0,50	— 0,13	+ 0,52
5	4494,30	1,00	— 0,28	+ 0,50
6	4390,70 L. D.	?	+ 0,28	+ 1,30
7	4325,70 L. D.	?	+ 4,00	+ 1,76

TWEEDE NEVENREEKS.

1	11404	?	+ 1,00	+ 100,--
2	6154,62*	0,10	0	0
3	5149,19*	0,10	0	0
4	4748,36	0,15	+ 0,12	0
5	4542,75	0,20	+ 0,65	+ 1,39
6	4420,20 L. D.	?	+ 0,02	+ 1,55
7	4343,70	?	+ 2,00	— 1,36

Zink.

Van dit element heb ik de formules berekend van de 1e en 2e nevenreeks, voor de componenten met grootste golflengte van de tripletten.

De grenzen werden voor beide reeksen afzonderlijk bepaald, voor de 1e nevenreeks gaf de berekening 42876,25 en voor de 2e nevenreeks bleek de grens te zijn 42876,70. Een zeer goede overeenstemming.

De formule wijst als 1e lijn van de 1e nevenreeks van Zink aan de lijn 8024,05, welke niet is waargenomen. De 8e lijn der 1e nevenreeks 2409,22 is ook niet waargenomen. Als 9e lijn dezer reeks werd 2393,93 berekend, die merkwaardig goed overeenkomt met de intense lijn 2393,88. Deze lijn was tot dusverre niet in het reeksverband opgenomen. De groote intensiteit van een lijn in de staart der reeks is wel vreemd; een onderzoek van de magnetische splitsing zou hier kunnen uitmaken, of het juist is die lijn onder de 1e nevenreeks te rangschikken.

De formule voor de 1e nevenreeks is:

$$n = 42876{,}25 - \frac{109675}{\left(m + 0{,}909103 - \frac{0{,}007085}{m}\right)^2}$$

en voor de 2e nevenreeks:

$$n = 42876{,}70 - \frac{109675}{\left(m + 1{,}286822 - \frac{0{,}058916}{m}\right)^2}$$

EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	——	—	—	—
2	3345,13*	0,03	0	— 0,08
3	2801,00*	0,03	0	+ 0,03
4	2608,65*	0,05	0	+ 0,06
5	2516,00	0,20	+ 0,04	— 0,11
6	2463,47	0,20	— 0,14	— 0,39
7	2430,74	0,30	+ 0,22	+ 9,00
8	——	—	—	—
9	2393,88	0,05	— 0,05	—

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	4810,71*	0,03	0	+ 58
2	3072,19*	0,05	0	0,00
3	2712,60*	0,05	0	+ 0,02
4	2567,99*	0,10	+ 0,11	— 0,01
5	2493,67	0,15	+ 0,12	— 0,04
6	2449,76	0,25	— 0,11	— 0,20

Thallium.

De formule voor de 1e nevenreeks is:

$$n = 41466{,}4 - \frac{109675}{\left(m + 1{,}90141 - \frac{0{,}00366}{m}\right)^2}$$

voor de satellieten:

$$n = 41466{,}4 - \frac{109675}{\left(m + 1{,}88956 - \frac{0{,}00085}{m}\right)^2}$$

en voor de 2e nevenreeks:

$$n = 41466{,}4 - \frac{109675}{\left(m + 1{,}26516 - \frac{0{,}07108}{m}\right)^2}$$

De grens is berekend uit 3 lijnen van de 1e nevenreeks; van de satellieten en van de 2e nevenreeks waren nu nog maar 2 lijnen noodig. In dit spectrum zijn dus alle constanten berekend uit 7 lijnen, en 31 lijnen worden door de formule goed weergegeven.

EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	3519,39*	0,03	0	—
2	2918,43	0,03	— 0,04	—
3	2709,33*	0,03	0	—
4	2609,08	0,03	+ 0,04	—
5	2552,62*	0,10	0	—
6	2517,50	0,10	— 0,06	— 0,34
7	2494,00	0,10	— 0,03	— 0,19
8	2477,58	0,10	— 0,09	+ 0,06
9	2465,54	0,20	— 0,17	+ 0,24
10	2456,53	0,20	— 0,15	+ 0,47
11	2449,57	0,30	— 0,17	+ 0,68
12	2444,00	0,30	— 0,28	+ 0,79
13	2439,58	0,30	— 0,24	+ 0,95

SATELLIETEN.

m	λ_W	F	A	A. K. R.
1	3529,58*	0,03	0	+ 0,02
2	2921,63	0,03	+ 0,06	— 0,07
3	2710,77*	0,03	0	+ 0,13
4	2609,86	0,03	— 0,03	— 0,02
5	2553,07	0,10	— 0,05	— 0,12

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λ_W	F	A	A. K. R.
1	5350,65*	0,03	0	— 168
2	3229,88*	0,03	0	— 21,7
3	2826,27	0,05	— 0,05	— 3,65
4	2665,67	0,05	— 1,32	— 1,69
5	2585,68	0,05	— 0,16	+ 0,01
6	2538,27	0,10	— 0,17	+ 0,04
7	2508,03	0,15	— 0,14	— 0,01
8	2487,57	0,20	— 0,06	+ 0,08
9	2427,65	0,20	— 0,34	— 0,21
10	2462,01	0,30	— 0,20	— 0,03
11	2453,87	0,30	— 0,17	+ 0,07
12	2447,59	0,30	— 0,05	+ 0,22
13	2442,24	0,30	— 0,37	— 0,01

Even wil ik nog stilstaan bij het spectrum van Aluminium. De 1ste nevenreeks van dit element wordt door geen van de tot dusverre gegeven formules ook maar eenigszins bevredigend weergegeven; evenmin bereikt men met mijne formule een voldoend resultaat. In het begin van deze mededeeling heb ik er op gewezen, dat zeer afwijkende waarden voor N_0 uit drie van de 1ste lijnen der reeks werden berekend.

De formule luidt :

$$n = 48287{,}9 - \frac{109675}{\left(m + 0{,}89436 + \frac{1{,}038060}{m}\right)^2}$$

De constanten zijn berekend uit de lijnen 4, 5 en 6.

ALUMINIUM. EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	3082,27	0,03	— 268,82	+ 384,8
2	2568,08	0,03	+ 3,46	+ 53,5
3	2367,16	0,03	+ 2,52	+ 6,1
4	2263,83*	0,10	0	+ 0,03
5	2204,73*	0,10	0	+ 0,17
6	2168,87*	0,10	0	— 0,13
7	2145,48	0,20	+ 0,06	— 0,31
8	2129,52	0,20	+ 0,11	— 0,21
9	2118,58	0,20	— 0,18	+ 0,44

De aansluiting aan de eerste lijnen (1, 2 en 3), laat veel te wenschen over. De waarde van de constante b is hier 1,03806, grooter dan de waarde van a in die formule; zoo iets komt bij geen van de andere reeksen voor.

Met 4 constanten, dus met

$$n = A - \frac{109675}{\left(m + a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2}\right)^2}$$

bereikt men waarschijnlijk een beter resultaat. Wanneer de constanten b en hier waarschijnlijk ook de c niet klein zijn ten opzichte van a, dan is de invloed van die constanten vooral voor de kleine ordegetallen zeer groot. De afwijking voor de eerste lijn van bovenstaande reeks (3082,27) is echter zóó groot, dat ik betwijfel, of dit wel de 1ste lijn van deze reeks is.

Het gedrag van deze Aluminium reeks is zeker eigenaardig, en een verder onderzoek is gewenscht.

Voor de wijze, waarop de constanten in de formule berekend werden en voor de spectra van Kalium, Rubidium en Caesium, van Magnesium, Calcium, Cadmium en van Helium en Zuurstof verwijs ik naar mijne binnenkort verschijnende dissertatie.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. Oudemans doet eene mededeeling over: *„Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter* in 1908."

TWEEDE AFDEELING. — VERDUISTERINGEN.

Medegedeeld in de vergadering van 27 October 1906.

Om van de bedekkingen over te gaan tot de verduisteringen is slechts één stap.

Er is tusschen deze beide verschijnselen dit verschil, dat de bedekkingen, zooals boven, blz. 180, is medegedeeld, meer dan eens zijn waargenomen, terwijl wij van die eener verduistering van den eenen wachter door den anderen, slechts één, en dan geen volledig bericht kennen uit een bijzonderen brief van den heer Stanley Williams van 7 December 1906. Hij schreef ons namelijk „With „regard to the heliocentric conjunctions there does seem to be one „observation of the rare phenomenon of the eclipse of a satellite „in the shadow of another one on record. It occurred on the 14th „August 1901 and was observed by Mr. J. Comas at Valls in Spain „and by the writer at Hove. Mr. Comas' observation was published „in the French periodical L'Astronomie, 1891, p. 397 (read 398) 1), „The following is an account of my observation. No particulars of „this have hitherto been published.

„ „1891 Aug. 14. $6^1/_2$ inch reflector, power 225. Definition good, „ „but interruptions from cloud. Satellite I. transitted on the S. Equa- „ „torial belt, (N. component). *Immediately* on its entering the disc „ „it became lost to view. At 11^h49^m a minute dark spot was seen „ „about in the position which the satellite should have then occupied. „ „The shadows of satellites I. and II. were confounded together at „ „this time, there seeming to be one very large, slightly oval, black „ „spot. At 11^h59^m the two shadows were seen neatly separated, „ „thus, ●● . The preceeding shadow must be that of II., the follo- „ „wing and *much smaller* one that of I.. At 12^h10^m satellite I. was „ „certainly visible as a dark spot, much smaller than the shadow „ „of either satellite. It had moved with respect to the shoulder of „ „the Red Spot Hollow, so that there could be no doubt of its „ „identity. It is on the north band of the north (south) equatorial „ „belt 2). Satellite I. [This should evidently be II.] shines brightly „ „on the disc near the limb. Definition good, but much thin cloud „ „about." "

„The foregoing is an almost literal transcript from my observation

„Book. I take it that when satellite I. entered on the disc of Jupiter, „it was already partly eclipsed by the shadow of II., so that it „became lost to view immediately, instead of shining, as usual, for „some time as a brillant disc. Also that the minute dark spot seen „at 11^h49^m was produced by the portion of the shadow of II., then „projected on I. Also that the small size of the following shadow „spot at 11^h59^m was due to a part only of the shadow of II. being „projected on the disc of Jupiter, other part of this shadow having „been intercepted by satellite I. 3)

— — — „But combining Mr. COMAS' observation with my own, „there can be no doubt but that satellite I. was actually partially „eclipsed by the shadow of II. on the night of August 14, 1891. „So far as I am aware, this is the only indubitable instance of one „satellite being eclipsed by the shadow of another.". . . . .

„P.S. The above times are Greenwich mean times. The Nautical „Almanac time for the transit ingress of satellite I. is 11^h33^m." 4).

Alvorens tot de berekening der tijdstippen van dergelijke heliocentrische conjuncties over te gaan, hebben wij onderzocht in hoeverre in het algemeen verduisteringen van den eenen wachter door de schaduw van den anderen wachter mogelijk zijn. Dat zij kunnen plaats hebben, bewijzen ons de schaduwen der wachters op Jupiter zelven. De vraag was echter, 1°. of bij *alle* heliocentrische conjuncties der wachters de schaduw van den voorsten den achtersten bereikt en 2°. of er ook somstijds totale verduisteringen kunnen plaats hebben.

Om dit na te gaan, stelden wij ons voor, dat de loopbanen alle in één vlak liggen, dat verlengd zijnde, door het middelpunt der zon gaat, en dat eene lijn, die van de zon uitgaat, in het vlak der loopbanen, Jupiter voorbijgaat, op een afstand gelijk aan zijn' straal, dus op een afstand van het middelpunt gelijk aan zijne middellijn. (Zie Plaat I.) Deze lijn snijdt de vier loopbanen der wachters, ieder in twee punten, die wij, van de zon afgaande *g*, *e*, *c*, *a*, *b*, *d*, *f* en *h* zullen noemen. Duidelijkheidshalve hebben wij de figuur hierachter bijgevoegd, (zie Plaat II).

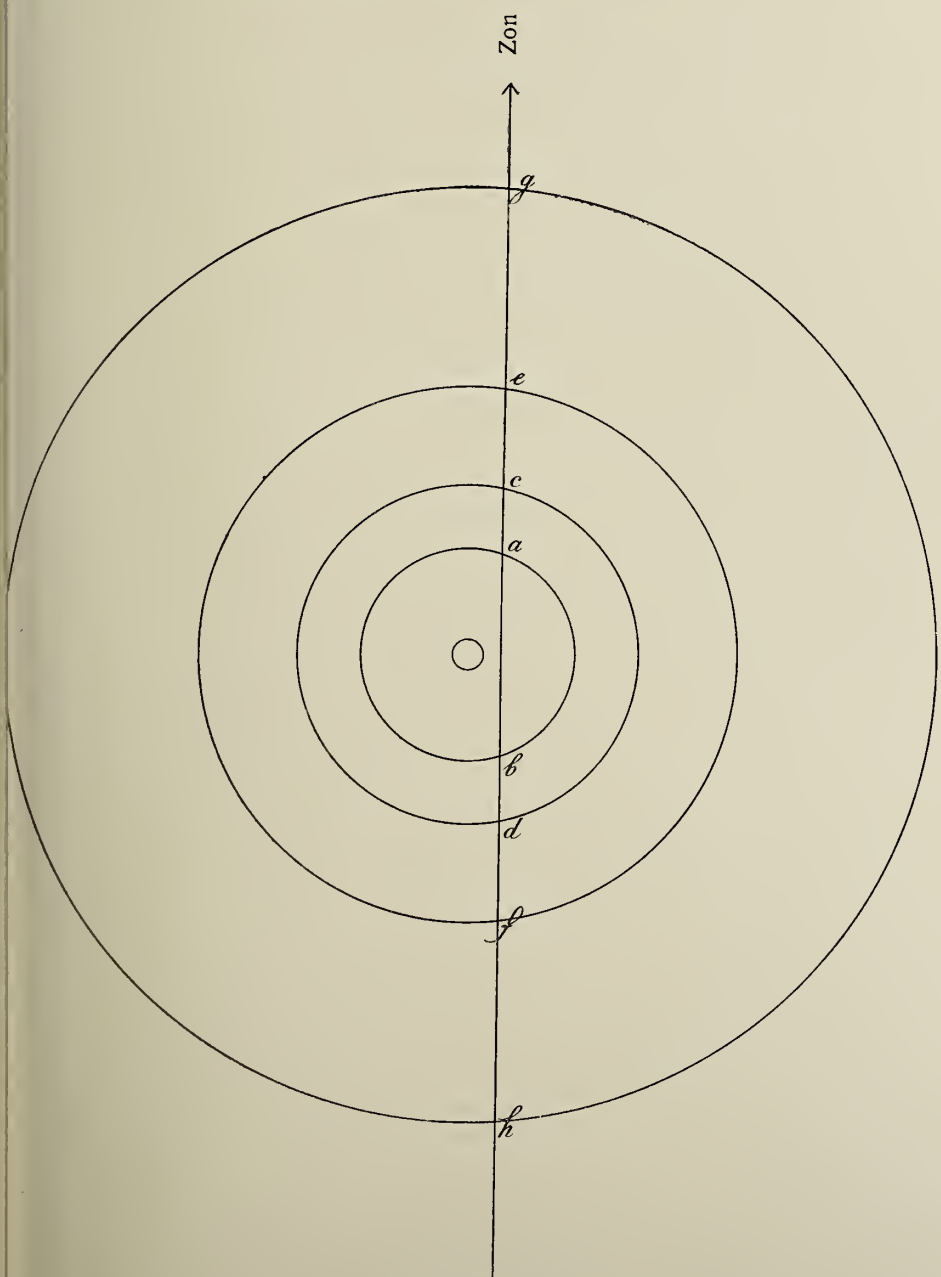
Stellen wij nu dat I zich òf in *a*, òf *b* bevindt, dàn zullen in beide gevallen de andere wachters zich in zijn schaduwkegel bevinden, als zij komen: II_v in *d*, III_v in *f* en IV_v in *h*.

De snijpnnten met de loopbaan van II zijn *c* en *d*. Bevindt zich II_n in *c*, dan kan ook I_n in *a* verduisterd worden, maar evenzoo I_v in *b*, III_v in *f* en IV_v in *h*.

Maar als II_v zich in *d* bevindt, dan kunnen alleen III_v en IV_v verduisterd worden, en wel III_v in *f* en IV_v in *g*.

De snijpunten met de loopbaan van III zijn *e* en *f*. Bevindt hij

C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van upiter in 1908." Tweede Afdeeling: Verduisteringen.



Schaal $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$. Naar deze schaal heeft de zon eene middellijn van 0.24 m. en bevindt zij zich op 25,783 m. afstand

zich in e, dan kunnen II_n in c, I_n in a, I_v in b, II_v in d en IV_v in h verduisterd worden. Is hij daarentegen in f, dan kan dit alleen met IV_v in h het geval zijn.

IV kan natuurlijk alleen in g een anderen wachter verduisteren, en wel ieder der drie anderen in de beide reeds beschouwde snijpunten zijner loopbaan.

Elke wachter zou dus zes verschillende verduisteringen kunnen opleveren, maar berekent men de stralen der kernschaduwen voor de plaatsen der andere wachters, dan verkrijgt men in sommige gevallen eene negatieve uitkomst, een teeken dat de top van den kegel der kernschaduw den anderen wachter niet bereikt.

Nemen wij voor de stralen der wachters de in de eerste afdeeling dezer mededeeling genoemde waarden aan, doch verminderd met het bedrag der irradiatie, 5) dan blijkt, dat in slechts twee gevallen eene totale verduistering kan plaats hebben. III_n kan namelijk II_n en I_n totaal verduisteren; I_v op weinig na II_v. Bereikt de schaduw den anderen wachter niet, dan zou een bewoner van dezen laatsten eene ringvormige zoneklips zien.

Dit heeft nl. plaats voor I_n ten opzichte van IV_v .

„ II_n „ „ „ III_v en IV_v,

„ III_n „ „ „ IV_v,

„ IV_n „ „ „ II_v en III_v.

In de overige 15 gevallen kan er eene gedeeltelijke verduistering plaats hebben.

Het spreekt wel van zelf, dat dit toch alleen gebeuren kan, als bij de heliocentrische conjunctie het verschil der heliocentrische breedten $(y'—y)$, kleiner is dan de som der stralen. Daar het mij echter, bij toetsing der door de heeren Fauth en Nijland waar genomene bedekkingen, gebleken is, dat volgens de tafels van Damoiseau het verschil in breedte wel eens iets grooter gevonden werd dan die som, de door die tafels berekende breedten dus niet geheel te vertrouwen zijn, zoo zijn in de volgende tabel *alle* heliocentrische conjuncties tusschen 1 April en 20 Mei 1908 (beide ingesloten) opgenomen.

Wij willen nog even opmerken dat de plaat opzettelijk geteekend is, om een ongunstig geval voor te stellen, althans voor het geval dat de eclipseerende wachter „nabij" en de „geëklipseerde „veraf" staat. Naarmate de schijnbare afstand (elongatie) van Jupiter af gerekend, grooter is, wordt voor dit geval de kans op verduistering grooter.

De voorbereiding voor de berekening, nl. het teekenen van de boopbanen der wachters, is dezelfde als bij het berekenen der geocentrische conjunctie (zie hiervoor de eerste afdeeling), maar uit de

aan den Nautical Almanac ontleende tijden der *geocentrische* bovenste conjuncties der wachters moeten eerst, met behulp van hunne uurbewegingen en den hoek G, d. i. den hoek Aarde—Jupiter—Zon de tijden der *heliocentrische* bovenste conjuncties afgeleid worden. Dan moet verder, zoodra de jovicentrische middelbare lengten voor de vereffeningen en storingen verbeterd zijn, in plaats van S—G, d. i. de *geocentrische* lengte van Jupiter, afgetrokken worden S, d. i. de *heliocentrische*.

Van de argumenten behoeft 3 niet berekend te worden, daar dit argument alleen dient om in verbinding met 1, de jovicentrische breedte der aarde te berekenen, waarvan de kennis hier niet noodig is. De schemas's bevatten dus voor elken wachter één kolom minder.

Onze uitkomsten zijn vervat in de hierachter gevoegde tabel. Van 1 April tot 20 Mei vonden wij 81 heliocentrische conjuncties, en zoo als de voorlaatste kolom $y-y'$ aantoont, schijnt bij zeer vele eene eklips mogelijk.

(1) Zie hier het bericht van den heer José Comas:

Ombres de deux satellites de Jupiter et éclipse. — Dans la nuit du 14 août, j'ai observé un phénomène bien rare: la coïncidence partielle, sur Jupiter des ombres de ses deux premiers satellites, et par suite l'éclipse de Soleil pour le satellitie I produit par le satellite II.

A 11^h (temps de Barcelone) [1]) l'ombre du satellite II est entrée sur la planète. Près du bord, elle n'était pas noire, mais d'un gris rougeâtre. Comme l'image était fort agitée, j'ai cessé d'observer, mais je suis retourné à l'obsersation vers 11^h37^m pour oberver l'immersion du premier satellite, qui a eu lieu à 11^h42^m (grossissement 100 fois; lunette de 4 pouces). J'ai été surpris de voir disparaître Io [2]) à son entrée sur le disque, ne se détachant pas en blanc, quoique'il se projetât sur la bande foncée équatoriale australe.

A 11^h52^m, avec des images plus tranquilles et un grossissement de 160, je remarquai que l'ombre complètement noire que l'on voyait était allongée dans une direction un peu inclinée vers la droite, relativement à l'axe de Jupiter. La phase maxima de l'éclipse du satellite I était déjà passée de quelques minutes. A 11^h56^m je pris le petit dessin que j'ai l'honneur de vous adresser; les deux

---

[1]) Barcelona ligt 2°10′ Oost van Greenwich, de m. tijd te Barcelona is dus 8^m40^s later dan die van Greenwich.

[2]) De Nautical Almanac vermeldt sedert eenige jaren de door Simon Marius voorgestelde namen voor de wachters van Jupiter: Io, Europa, Ganymedes en Callisto.

ombres se touchaient encore [1]). Aussitôt elles se séparèrent et, quoique je n'aie pas pu noter l'instant du dernier contact, je crois être assez près de la vérité, en disant qu'il s'est effectué vers 11^h58^m.

L'empiètement d'une ombre sur l'autre pourrait être de la troisième partie du diamètre. Dans cette supposition la distance minima des centres des deux ombres a dû avoir lieu vers 11^h47^m et le premier contact vers 11^h37^m. Le premier satellite pénétra dans le disque de la planète à 11^h42^m, comme j'ai dit plus haut, donc l'éclipse a commencé quand le satellite se projetait encore dans l'espace, cinq minutes avant l'immersion.

L'invisibilité de l'ombre d'Europe sur Io peut s'expliquer par la mauvaise qualité des images. Toutefois, la pénombre et l'ombre du II satellite ont été suffisantes pour diminuer notablement l'éclat du premier.

(2) De bedoeling hiervan is blijkbaar dat in een *omkeerenden* kijker de donkere vlek op den noordelijken band van den noordelijken gordel scheen te staan, maar dat het in werkelijkheid de zuidelijke band van den zuidelijken gordel was. Het is ook bekend, dat de zoogenaamde *roode vlek* zich aldaar bevindt.

(3) Dat de Schrijver hier niet spreekt van het zichtbaar zijn eener schaduw van II op I, kan mijns inziens door het bestaan der irradiatie en diffractie verklaard worden.

(4) Voor de heliocentrische conjunctie der twee wachters geven de tafels van Damoiseau, tweede afdeeling: 23^u45^m burgerlijke tijd te Parijs, $= 11^u36^m$ Grw. De Nautical Almanac van 1891 geeft voor 14 Augustus de volgende tijden:

II	Shadow.	Ingress	10^h51^m	M. T.	Grw.
I	,,	,,	10 59	,,	,,
I	Transit	,,	11 33	,,	,,
II	,,	,,	11 58	,,	,,
I	Shadow.	Egress	13 18	,,	,,
II	,,	,,	13 45	,,	,,
I	Transit	,,	13 51	,,	,,
II	,,	,,	14 49	,,	,,

[1]) Deze teekening vertoont het rechtsche (volgende) gedeelte, in een omkeerenden kijker, van de bekende roode vlek in de zuidelijke helft van Jupiter. Daaronder op eenigen afstand een donkeren band, en daarop twee zwarte schaduwen ieder van 4 mm. middellijn, die nog met elkander één geheel uitmaken; de gemeenschappelijke koorde is 2,5 mm. lang, de geheele lengte der beide schaduwen vereenigd, 7,2 mm.; de richting der lijn die de middelpunten vereenigt, maakt een hoek van 40° met de vertikaal. De *beweging* der beide schaduwen moet echter nagenoeg horizontaal geweest zijn.

Berekent men uit den 1^{en}, 2^{en}, 5^{en} en 6^{en} regel, wanneer de schaduwen moesten samenvallen, dan verkrijgt men 11^{u}31^{m}, gevende een verschil van 5^{m} met het zoo even medegedeelde cijfer; maar men moet in aanmerking nemen, dat beide wachters denzelfden kant opgingen, en hunne relatieve beweging, ook natuurlijk die hunner schaduwen, in vijf minnten zeer gering was.

De heer Stanley Williams schijnt niet voor 11^{u}49^{m} M. tijd te Greenwich eene schaduw gezien te hebben, terwijl de heer Comas reeds te 11^{u}43^{m}20' M. te Greenwich eene langwerpige schaduw ontwaarde; verder zag de heer Stanley Williams de schaduw van II grooter dan die van I, de heer Comas schatte hare middellijnen gelijk. Zonder twijfel ligt het gelijk hier aan de zijde van den Engelschen waarnemer.

(5) In het jaar 1901 heeft See met den 28 inch kijker te Washington herhaaldelijk de middellijnen der wachters van Jupiter gemeten. Hij gebruikte daarbij een dradenmikrometer, maar legde er zich op toe, de systematische fouten, die dit werktuig oplevert, onschadelijk te maken. (Zie Astron^{e}. Nachrichten, N°. 3764, 21 Jan, 1902. De mededeeling van See is gedateerd 19 Oct. 1901).

In de maanden Mei t/m Augustus van het jaar 1901 had hij die middellijnen steeds des nachts gemeten, en had daarbij zeer veel last van de golving der randen, ontstaande door de undulatie der lucht. Daarna heeft hij, in de maanden September en October van hetzelfde jaar, de metingen kort voor en kort na den zonsondergang herhaald, als wanneer kunstmatige verlichting onnoodig was, de wachters zich als rustige schijfjes voordeden, en bovendien een met koperchloride en pikrienzuur gevuld schermpje aan het veld en aan den wachter een groenachtig gele kleur mededeelde. De middellijnen werden nu alle kleiner bevonden dan te voren en het verschil wordt aan irradiatie toegeschreven. Ziehier zijne uitkomsten, herleid op den middelbaren afstand van de zon tot Jupiter (5,2028).

Wachter	Bij nacht	Bij dag	Verschil, aan irradiatie toegeschreven
I	1″,077 ± 0″018	0″834 ± 0″,006	0″243 ± 0″019
II	0 ,976 ± 0 ,043	0 ,747 ± 0 ,007	0 ,229 ± 0 ,0435
III	1 ,604 ± 0 ,038	1 ,265 ± 0 ,009	0 ,339 ± 0 ,039
IV	1 ,441 ± 0 ,018	1 ,169 ± 0 ,006	0 ,372 ± 0 ,019

Merkwaardig is het, dat de helderste wachter, III, ook de sterkste irradiatie vertoont. Beschouwt men dit verschil echter als onzeker, en vereenigt men de verschillende voor de irradiatie verkregene uitkomsten met in acht neming der uit de waarschijnlijke fouten afgeleide gewichten, dan verkrijgt men

$$\text{Irradiatie} = 0'',264 \pm 0'',012.$$

Dit betreft de geheele middellijn, zoodat men aan elke zijde de helft, d. i. 0″,132 irradiatie verkrijgt, welk getal echter alleen betrekking heeft op den kijker te Washington, bij welken, wegens de groote opening van zijn objectief, de diffractie uiterst gering moet zijn.

Ik kan niet nalaten, hier nog op te merken, hoe groot het verschil is tusschen de door denzelfden waarnemer in 1900 en 1901 gevondene middellijnen.

	1900	1901	1901—1900
I	0″672 ± 0″098	0″,834 ± 0″,006	+ 0″162
II	0,624 ± 0,078	0 ,747 ± 0 ,007	+ 0,121
III	1,361 ± 0,103	1 ,265 ± 0 ,009	— 0,096
IV	1,277 ± 0,083	1 ,169 ± 0 ,006	— 0,108

Stone, te Oxford, verhaalde mij eens dat Airy, in een gesprek over de bepalingen van declinaties met den meridiaancirkel, hem zeide: „I assure you, Stone, a second is a very small thing".

Men komt, als men de opgenoemde verschillen tusschen de resultaten van twee reeksen waarnemingen, beschouwt, die door denzelfden waarnemer in twee op elkander volgende jaren verkregen zijn, tot het besluit dat bij mikrometerwaarnemingen nog altijd geldt: „a tenth of a second is an exceedingly small thing".

Aanhangsel. *In hoeverre zijn de tafels van* Damoiseau *nog vertrouwbaar?*

Wij hebben reeds in de 1e afdeeling, blz. 194 en 195, vermeld, waarom wij ons gerechtigd achtten, voor deze vooruitberekeningen de tafels van Damoiseau te gebruiken. Wij willen hier nog aan toevoegen, dat wij ook nog onderzocht hebben, welke verschillen in eenige der laatste jaren de waarnemingen der eklipsen van de wachters, op verschillende sterrewachten verricht, met die tafels, of juister met de in den Nautrial Almanac opgegeven oogenblikken vertoond hebben. De heer Kress, amanuensis der sterrewacht te Utrecht, is ons daarin behulpzaam geweest, door met zorgvuldigheid

eenige deelen van de *Astronomische Nachrichten* en van de *Monthly Notices* door te zoeken, de waargenomene tijden van „verdwijnen en wederverschijnen" voor elken wachter afzonderlijk bij een te voegen, op den meridiaan van Greenwich te herleiden, en met de opgaven van den Nautical Almanac te vergelijken. Om het onderzoek te vereenvoudigen, lette hij op ons verzoek alleen op de waarneming van het laatste licht bij het verdwijnen, en op die van het eerste licht bij het wederverschijnen. [1]) Ons plan was, dit onderzoek van 1894 tot 1905 of 6 uit te voeren, maar toen een viertal jaren gereed waren, en wij kennis namen van de resultaten, kwam het ons voor, dat wij voldoende ingelicht waren, en dat het algemeen resultaat was, dat de tafels nog nauwkeurig genoeg waren voor ons doel, dat niet anders was dan de sterrekundigen voor te bereiden voor het waarnemen der onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters.

Nu het werk echter eenmaal gereed is, dat lang geen aanspraak maakt op eene trouwens niet nagestreefde volledigheid, (de in Frankrijk, Amerika, enz. verschenen tijdschriften waren niet onderzocht), willen wij toch de resultaten niet achterhouden.

De volgende sterrewachten hebben voor ons onderzoek bijgedragen:

	Opening van de objectieven der kijkers, in mm^s.
Greenwich	102, 170, 254, 714.
Utrecht	260
Uccle	150
Jena (Winkler)	162
Halifax (Gledhill)	237
Pola	162
Christiania	74, 190
Kasan	66, 81, 84, 96, 244
Göttingen	161
Windsor (Tebbutt) bij Adelaïde	203
Lyon (ééne enkele waarneming)	2

[1]) Delambre laat zich in de inleiding tot zijne tafels wel niet ondubbelzinnig er over uit, *welk* oogenblik zijne tafels naar zijne bedoeling moeten aangeven, maar uit enkele zinsneden is op te maken, dat ook hij *de hier genoemde* oogenblikken bedoeld heeft. Zoo zegt hij op blz. LIII, van onderen: *„Les demi-dureées ont été un peu diminuées, pour les rapprocher des observations qu'on a faites depuis la découverte des lunettes achromatiques"*.

En dat dit ook de opvatting van Laplace geweest is, blijkt uit Ch. VIII van het 8e boek der Mécanique Céleste.

Te Greenwich, Christiania en Kasan werden de eklipsen dikwijls door meer dan één waarnemer, door kijkers van verschillende openingen geobserveerd. Dan werd door ons alleen het oogenblik in de berekening opgenomen, waarop het verschijnsel in den kijker met de grootste opening gezien was. In den regel kon de waarnemer in dezen kijker den wachter bij de „verdwijning" langer volgen, en bij de „wederverschijning" eerder terugzien; hoewel op dien regel toch nu en dan ook uitzonderingen voorkwamen.

In de correcties van de opgaven in den Nautrial Almanac, voor de eklipsen in hetzelfde oppositie-tijdvak van Jupiter gevonden, was geen enkele maal een bepaalde gang te zien, zij slingerden telkens zoo om hetzelfde midden heen, dat er geen bezwaar in gezien kon worden er het arithmetisch midden uit te nemen, eene handelwijze die ook nog volkomen juist zou zijn, indien er een *regelmatig* toenemende of afnemende gang in was. Op de verschillende openingen van de objectieven der kijkers werd verder niet gelet; als die openingen een zeker bedrag, b.v. 150 mm² overtreffen, dan geven grootere openingen, theoretisch, zoowel als praktisch, slechts zeer kleine verschillen.

Ziehier nu de uitkomsten waartoe wij gekomen zijn:

Correctie der in den Nautical Almanac aangegeven tijden der eklipsen van de wachters van Jupiter.

Oppositie.	Gemiddelde Corr. N.A. Disapp.	Aantal.	Middelb. fout.	Gemiddelde Corr. N.A. Reapp.	Aantal.	Middelb. fout.	$\frac{1}{2}(D+R)$	*mf.*
				I.				
1894/95	+ 37ˢ	3	±14	− 18ˢ	25	+ 4ˢ	+ 9ˢ.5	± 7ˢ
1895/96	+ 30	9	8	0	32	4	+ 15	4⁵
1897	− 19⁵	2	18	− 5	12	6	− 12	9⁵
1898	+ 11	15	6	+ 7	13	6	+ 6	4
				II.				
1894	− 78	2	±32	0	7	±11ˢ	− 39ˢ	±17ˢ
1894/95	+ 52	4	22⁵	− 42	15	7⁵	+ 5	12
1895/96	+ 73	6	18	− 4	19	6⁵	+ 34	10
1897	− 72	3	26	+ 11	10	9	− 30	14
1898	− 36	5	20	− 15	9	9⁵	− 26	11

III.

1894	+151s	3	±22s	—242s	3	±38s	— 45s	±25s
1895	+101	4	19	—127	4	33	— 13	11s
1895/96	+ 87	9	13	— 50	9	22	+ 19	11s
1897	+181	4	19	+ 37	9	22	+109	14s
1898	+266	4	19	+ 10	1	66	+138	34
1899	+361	3	22	—126	4	33	+118	20

IV.

1895	+ 21m45s	3	—	— 17m 9s	2		+138s	
. . .	. . . .	. .	. .	. . . .	. .	. .	. .	. . .
1895/96	+ 3 49	10	±25	— 3 17	7	±22s	+ 16	±17s
1897	— 0 2	2	±57	+ 1 16	1	60	+ 37	—41

Middelbare fouten, door elkander, van ééne enkele waarneming.

	Disappearance	Reappearance	Gemiddeld	Delambre *) Introd. p. LIV
I	± 25s	± 20s	± 22s5	17s5
II	45	29	37	
III	37	66	51,5	{88,5 / 72,5 (met verwerping der waarnemingen, die meer dan 3 minuten afweken).
IV	80	60	70	

Het blijkt uit de hier medegedeelde cijfers wel, dat de klachten over de toegenomene onnauwkeurigheid der tafels van Damoiseau, althans voor de beide eerste wachters, niet van overdrijving zijn vrij te pleiten.

Lettende op de middelbare fouten, in de laatste kolom vermeld, zou de waarschijnlijkste correctie voor de epoche der jaren 1894—98 voor I bedragen + 8s,0 met eene m. fout = ± 2s,6

Evenzoo voor II — 3 ,8 „ „ „ „ = ± 5 ,4,

beide correcties, waarvoor moeielijk is in te staan.

Met III schijnt het anders gesteld te zijn. De negatieve correctie bij de wederverschijningen kan, evenals de positieve bij de verdwijningen, wel is waar aan het gebruik van sterkere kijkers toe te schrijven zijn; in de cijfers der voorlaatste kolom schijnt toch een zekere gang te bestaan, waarom nader onderzoek gewenscht is.

*) Delambre vermeldt de *gemiddelde* verschillen; wij hebben die met $1^1/_4$ vermenigvuldigd, om de *middelbare* fouten te verkrijgen.

Wat IV aangaat, het jaar 1895 gaf groote correcties, maar nadat gedurende een paar jaren van dezen wachter geene eklipsen hadden plaats gevonden, doordien de wachter bij de oppositie den schaduwkegel van Jupiter ten noorden voorbijging, begon in dit jaar het tijdvak der eklipsen op nieuw; in zulk een geval beschrijft de wachter, die zich dan lineair hoog boven het baanvlak van Jupiter verheft, slechts eene korte koorde in den schaduwkegel; eene kleine fout in zijne breedte veroorzaakt dan eene groote fout in den duur der eklips; duidelijk sprekend zijn daaromtrent de waarnemingen van den heer WINKLER te Jena en van den waarnemer op de Sterrewacht te Uccle bij Brussel, op 8 Maart 1895. Zij vonden namelijk

de correctie	Jena.	Brussel.	Gemiddeld.
van de verdwijning	$+19^m 48^s$	$+21^m 58^s$	$+20^m 53^s$
van de wereldverschijning	$-19\ 36$	$-18\ 33$	$-19\ 4{,}5$

waaruit duidelijk blijkt dat het niet zoo zeer de middelbare lengte van deze wachters was, die eene correctie behoefde. Eene verklaring dezer groote verschillen kan òf daarin liggen dat lengte of knoop van de loopbaan van IV of de aangenomene afplatting van Jupiter eene correctie behoefden, òf dat bij dergelijke verduisteringen eene *zeer langzame* lichtvermindering plaats grijpt.

Wat overigens deze eklips betreft, zij zou, volgens den Nautical Almanac van 1895, de vierde zijn na het lange tijdperk, dat er geene eklips van dezen wachter geweest was. Zie hier de opgaven op blz. 450, 452, 454:

17	Jan^y.	D.	1^h	36^m	16^s	M. T. Gr.,	R.	2^h	8^m	17^s,	dus duur		32^m	1^s
2	Feb^y.	„	19	26	12	„ „ „	„	20	36	58,	„	„	1^h 10	46
19	„	„	13	24	6	„ „ „	„	14	59	3,	„	„	1 34	57
8	March	„	7	24	14	„ „ „	„	9	18	28,	„	„	1 54	14

maar naar de waarneming van SCOTT-HANSEN, die in de laatste Noordpoolreis onder NANSEN de sterrekundige waarnemingen bezorgde, is de wachter IV den 17^{en} Januari in het geheel niet bedekt geworden [1]).

Ook den 2_{en} Februari 1895 moet IV niet bedekt zijn geweest; (ik herinner mij niet meer, waar ik deze negatieve waarneming gevonden heb;) den 19 Februari echter vond een waarnemer te Greenwich, met het Sheepshanks-equatoriaal, welks objectief 120 mm.

---

[1]) The Norwegian North Polar Expedition 1894—1896. Scientific Results, edited by FRIDTJOF NANSEN. VI. Astronomical Observations, arranged and reduced under the supervision of H. GEELMUYDEN, blz. XXIV.

opening heeft, bij de verdwijning van IV eene correctie van $+ 23^m 30^s$, hetgeen vrij wel uitkomt met de bovenvermelde, te Uccle en te Jena den 8en Maart verkregene uitkomsten.

De duur der verduistering was, indien wij het gemiddelde der waarnemingen te Brussel en te Jena aannemen, op dien dag $1^u 44^m 14^s - 39^m 57^s,5 = 1^u 14^m 16^s,5$, een getal, dat voor de verbetering der elementen van IV ook van dienst zou kunnen zijn.

Het bij deze gelegenheid gevonden verschil kan niet geweten worden aan eene te geringe afplatting, want de aangenomene afplatting, $\frac{1}{13,49}$, door Damoiseau aangenomen, is al sterker dan de door de meeste waarnemers door meting bepaalde; let men echter op de door den heer De Sitter verkregene resultaten, medegedeeld in de zitting dezer afdeeling van 31 Maart j.l., Dl. XIV, blz. 797, dan blijkt het dat de klimmende knoop van den 4en wachter eene vermeerdering van omtrent $+ 10°$ in zijne lengte noodig heeft, terwijl de helling op het vaste vlak, $= 0°,2504 = 15' 2''4$ gevonden wordt, nog geen volle minuut meer dan Damoiseau heeft.

De verdere verduisteringen van IV in 1895 en die van de twee volgende jaren gaven geene buitengewone afwijkingen. En daar in 1908 de eklipsen der wachters nagenoeg centraal zullen zijn, zooals uit de teekeningen in den Nautical Almanac te zien is, die de lijst dezer verschijnselen aldaar vergezellen, zoo is niet te vreezen, dat dergelijke groote verschillen zich in dat jaar bij IV zullen voordoen.

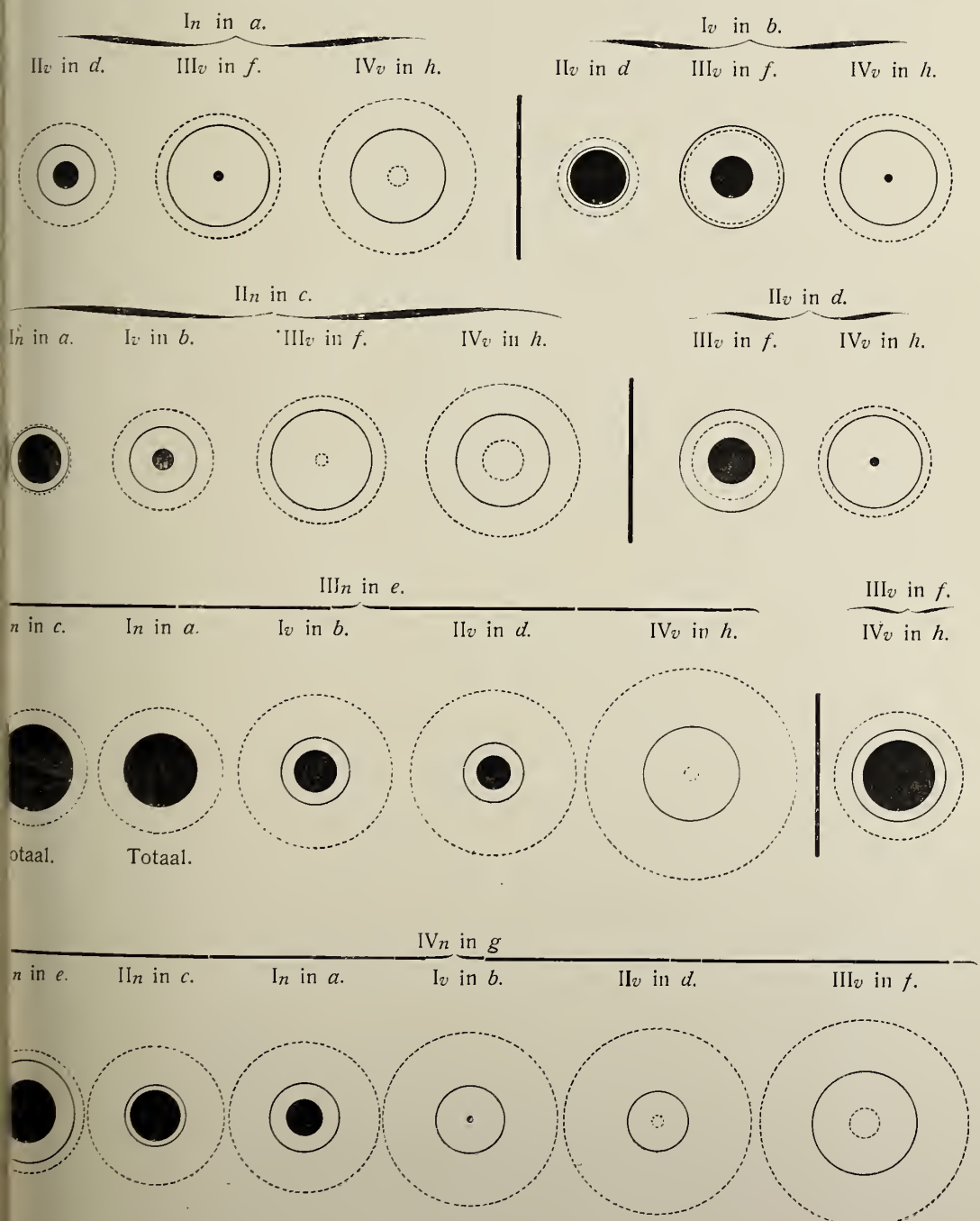
Ons resultaat is dus, dat voorloopig de Nautical Almanac, die met inachtneming van eenige als noodig erkende verbeteringen, naar de tafels van Damoiseau berekend is, — als men het geval van de eerste eklips van IV na een tijdvak van niet verduisterd worden uitzondert, — voor de voorbereiding tot de waarneming nog wel voldoende is,

Utrecht, 23 November 1906.

A. C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908." Tweede Afdeeling: Verduisteringen.

B. De doorgetrokken cirkels geven de omtrekken der wachters aan, de gestippelde cirkels de bijschaduwen.

Schaal 1 : 314 250 000. 12mm = 1″ heliocentrisch.



RESULTATEN.

Heliocentrische conjuncties der wachters onderling in April en Mei 1908.

N.B. A.A, = Ann Arbor; Fl. = Flagstaff; H.K. = Hong Kong; La Pl. = La Plata; P. = Perth; Tac. = Tacubaja; To = Tokio; We. = Wellington; Wi. = Windsor.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Geëklipseerde wachter	n = nabij, v = veraf: Eklipseerende wachter	$x=x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y-y'$	Waar zichtbaar
1	1 April 4u 8m	I_v	II_n	+5r 70	—0r 30	—0r 25^5	—0,04^5	Kas., Taschk, Madras, HK., Perth.
2	2 » 18 3	I_v	III_n	+3, 21	—0, 16	—0, 20	+0,04	Lick, Fl., Tac.. AA., Harvard.
3	3 » 4 15	II_v	III_n	—2, 49	+0, 08	+0, 10	—0,02	Kas., Taschk., Madr., HK., Perth, To.
4	3 » 9 51	II_v	I_n	+1, 50	—0, 10^5	—0, 09	—0,01^5	Grw., Pulk., Kas., Taschk., La Pl., Rio.
5	3 » 11 10	IV_v	III_n	—6, 19^5	+0, 40	+0, 32	+0,08	Grw,, Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
6	3 » 16 26	IV_v	I_n	—4, 03	+0, 30	+0, 19	+0,11	Lick, Fl., Tac,, AA., Harv., La Pl.
7	4 » 16 52	IV_v	II_n	+6, 03	—0. 20	—0, 27	+0,07	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
8	4 » 17 21	I_v	II_n	+5, 75	—0, 31	—0, 25	—0,06	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
9	5 » 19 56	III_v	II_n	—9, 24	+0, 54	+0, 30	+0,24	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
10	6 » 20 12	III_v	I_n	+3, 61	—0, 18^5	—0, 21	+0,02^5	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
11	6 » 22 58	II_v	I_n	+1, 37	—0, 10	—0, 09	—0,01	Perth, Tokio, Wi., We.
12	8 » 6 31	$I_{o.c.}$	II_n	+5, 82	—0, 31	—0, 25	—0,06	Bresl., Pulk., Kas., Taschk., Madras.
13	9 » 20 52	I_v	III_n	+3, 85^5	—0, 18	—0, 24	+0,06	Wi., We., Lick, Fl.
14	10 » 7 28	II_v	III_n	—2, 05^5	+0, 06	+0, 09^5	—0,03^5	Grw., Pulk., Kas., Taschk., Madras.
15	10 » 12 4	II_v	I_n	+1, 24	—0, 09	—0, 08	—0,01	Grw., Pulk., Kas., Harv., La Pl., Rio.
16	11 » / 11 » 15 42 kleinste afstand	II	IV	II +7, 87 / IV +7, 96	—0,^{5}36	—0, 48	+0,12	Lick, Fl., Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
17	11 » 19 43	$I_{o.c.}$	II_n	+5, 88	—0, 31^5	—0, 26	—0,05^5	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
18	11 » 20 24	$I_{o\,c.}$	IV_n	+5, 99	—0, 32	—0, 38	+0,06	Wi., We., Lick, Fl,
19	12 » 23 33	III_v	$II_{w.c.}$	—9, 41	+0, 54	+0, 45	+0,09	Perth, HK., Tokio, Wi., We.
20	13 » 3 57	III_v	IV_n	—7, 35	+0. 42	+0, 27	+0,15	Kasan, Taschk., Madr., HK.
21	13 » 23 22	III_v	I_n	+2, 64	—0, 16	—0, 19	+0,03	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
22	14 » 1 11	II_v	I_n	+1, 11	—0, 09	—0, 06	—0,03	HK., Perth, Tokio, Wi.
23	15 » 8 57	$I_{o.c.}$	II_n	+5, 93	—0, 32	—0, 26	—0,06	Grw., Pulk., Kas., Taschk., Rio.
24	16 » 23 44	I_v	III_n	+4, 45^5	—0, 23	—0. 26	+0,03	HK., Pe., To., Wi., We.
25	17 » 10 41	II_v	III_n	—1, 61	+0, 03	+0, 08	—0,05	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
26	17 » 14 17	II_v	I_n	+0, 98	—0, 09	—0, 06	—0,03	Grw., Fl., Tac., AA., Haw., La Pl., Rio.
27	18 » 22 11	$I_{o.c.}$	II_n	+5, 97	—0, 32	—0, 26	—0,06	Perth, To., Wi., We.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Geëklipseerde wachter	Eklipseerende wachter	$x=x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y-y'$	Waar zichtbaar
28	19 April 5u15m	IV_v	$III_{w.e.}$	— 15r28	+ 0r80	+ 0r85	— 0r05	Karan, Taschk., Madras.
29	19 » 22 57	IV_v	II_n	— 8,69	+ 0,48	+ 0,43	+ 0,05	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
30	20 » 3 14	III_v	II_n $w.e.$	— 9,54	+ 0,55	+ 0,45	+ 0,10	Taschk., Madras, HK., Perth, To.
31	21 » 1 45	III_v	I_n	+ 2,27	— 0,12	— 0,13	+ 0,01	Madras, HK., P., Tokio.
32	21 » 1 46	IV_v	I_n	+ 2,26	— 0,05	— 0,12	+ 0,07	Madras, HK., P., Tokio.
33	21 » 1 52	IV_v	III_v	+ 2,33	— 0,05	— 0,12	+ 0,07	Madras, HK., P., Tokio.
34	21 » 3 23	II_v	I_n	+ 0,845	—0,088	— 0,044	— 0,044	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
	12 19	IV_v	II_v	+ 6,62	— 0,39	- 0,44	+ 0,05	Grw., Pulk., Harv., La Pl., Rio.
35	22 » 15 13	id. gr.	afst.	8,01 en 7.84	— 0.32	— 0,40	+ 0,08	Lick, Fl., Tac., A.A., Harv., La Pl.
	17 56	»	»	+ 8,88	— 0,38	— 0,44	+ 0,06	We., Lick., Fl., Tac., A.A., Harv.
36	22 » 9 41	IV_v	$III_{(o.e.)}$	+ 14,84	— 0,66	— 0,83	+ 0,17	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
37	22 » 11 27	$I_{(o.e.)}$	II_n	+ 6,01	— 0,32	— 0,26	— 0,06	Grw., Pulk., (Kasan), La Pl., Rio.
38	24 » 2 41	I_v	III_n	+ 5,02	— 0,255	— 0,28	+ 0,025	Taschk., Madr., HK., P., To.
39	26 » 0 41	$I_{o.e.}$	II_n	+ 6,03	— 0,33	— 0,25	— 0,08	HK., P.. To., Wi.
40	27 » 7 5	III_v	II_v	— 9,62	+ 0,54	+ 0,45	+ 0,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk
41	28 » 4 28[5]	I_v	III_n	+ 1,57	— 0,08	— 0,09	+ 0,01	Kasan, Tuschk., Madr., HK.
42	28 » 5 36	II_v	I_n	+ 0,58	— 0,03	— 0,065	+ 0,035	Kasan, Taschk., Madras.
43	28 » 13 29	IV_v	III_n	+ 6,41	— 0,36	— 0,36	0,00	Grw., Tac.. AA., Harv., La Pl., Ric
43*	28 » 16 18	II	III	II + 7,31 III + 7,80	— 0,38	— 0,49	+ 0,06	

$x-x'$ wordt langzamerhand absoluut kleiner, en bereikt zijn minimum 0,49 op den aangegeven tijd, word daarna weer grooter. Er heeft dus geene eklips plaats.

44	29 » 3 45	I_v	IV_n	+ 0,27	— 0,02	— 0,08	+ 0,08	Taschk., Madr., HK.
45	29 » 13 57	$I_{o.e.}$	II_n	+ 6,05	— 0 33	— 0,26	— 0,07	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
46	1 Mei 17 5	II_v	III_n	— 0,74	— 0,01	— 0 62	+ 0,61	Lick, Fl , Tac., AA., Harv., La P
47	1 » 18 43	II_v	I_n	+ 0,44	— 0,07	— 0,02	— 0,05	Lick, Fl., Tac., AA.
48	3 » 3 16	I_{oe}	II_n	+ 6,06	— 0,32[5]	— 0,24	— 0,08[5]	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
49	4 » 11 7	III_v	$II_{w.e.}$	— 9,61	+ 0,54	+ 0,45	+ 0,09	Grw., Pulkowa.
50	5 » 7 48	II_v	I_n	+ 0,31	— 0,07	— 0,02	— 0,05	Grw., Pulk., Kasan, Taschk.
51	5 » 8 17	III_v	I_n	— 0,10	— 0,09	— 0,01	— 0,08	Grw., Pulk., Kasan, (Taschk.).
	5 » 14 2	III_v	II_v	+ 4,63	— 0,26	— 0,26	0,00	Tac., A.A., Harv., La Pl., Rio.
52	5 » 17 57	grootste	afstand	+ 6,64 + 6,85	— 0 38	— 0,36	+ 0,02	We., Lick, Fl., Tac., AA
	5 » 21 39	III_v	II_v	+ 8,43	— 0,42	— 0,49	+ 0,07	To., Wi., We., Lick.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Geëklipseerde wachter	n = nabij, v = veraf: Eklipseerende wachter	$x = x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y-y'$	Waar zichtbaar
53	6 » 16u38m	$I_{o.e.}$	II_n	+ 6r03	− 0r215	− 0r24	+ 0r025	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
54	7 » 6 27	IV_n	I_n	− 3,27	+ 0,20	+ 0,18	+ 0,02	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
55	7 Mei 6 37 5	IV_v	II_n	− 3,18	+ 0,19	+ 0,20	− 0,01	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
56	8 » 7 4	IV_v	III_n	+ 6,90	− 0,38	− 0,29	− 0,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
57	8 » 20 54	II_v	I_n	+ 0,18	− 0,06	− 0,00	− 0,06	Wi., Wellington.
58	8 » 23 25	I_n	HI_n	− 2,04	+ 0,12	+ 0,13	− 0,01	Perth, Tokio, Windsor.
59	9 » 5 29	$I_{w.e.}$	III_n	− 5,36	+ 0,32	+ 0,34	− 0,02	Kasan, Taschk., Madras.
60	10 » 6 0	I_n $(o.e.)$	II_n	+ 5,99	− 0 32	− 0,38	+ 0,06	Kasan, Taschk., Madras.
61	10 » 16 41	I_n	II_n	− 0,97	+ 0,05	+ 0,10	− 0,05	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
62	11 » 0 13	I_n	II_n	− 5,80	+ 0,32	+ 0 32	0,00	HK., P., Tokio.
63	11 » 15 26	III_v	$II_{w.e.}$	− 9,46	+ 0,25	+ 0,43	− 0,18	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
64	12 » 9 54	III_v	I_n	+ 0,14	− 0,03	+ 0,01	− 0,04	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
65	12 » 10 0	II_v	I_n	+ 0,04	− 0,38	+ 0,12	− 0,50	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
66	12 » 10 41	III_v	II_v	+ 0,58	− 0,10	− 0,13	+ 0,03	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
67	13 » 3 38	III_v	II_v	+ 9,32	− 0,55	− 0,45	− 0,10	Taschk., Madr., HK.
68	13 » 19 31	I_n	II_n	+ 5,89	− 0,33	− 0,25	− 0,08	We., Lick., Fl.
69	14 » 4 29	I_n	II_n	+ 0,10	− 0,05	+ 0,02	− 0,07	Taschk., Madras.
70	14 » 8 57	III_n $(o.e.)$	IV_n	+ 15,17	− 0,87	− 0,75	− 0 12	Grw., Pulk., Rio.
71	14 » 13 46	$I_{(w.e.)}$	II_n	− 5,93	+ 0,32	+ 0,33	− 0 01	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
72	15 » 9 48	I_v	IV_n	+ 5 59	− 0,32	− 0,29	− 0,03	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio
73	15 » 22 59	II_v	IV_v	− 0 18	− 0,06	− 0,02	− 0,04	Perth, To., Wi.
74	15 » 23 7	II_v	I_n	− 0,09	− 0,06	+ 0,02	− 0,08	Perth, To., Wi.
75	16 » 11 59	I_v	IV_n	− 5,69	+ 0,30	+ 0,24	− 0,54	Grw., La Pl., Rio.
76	17 » 9 4	I_n	II_n	+ 5,75	− 0,31	− 0 23	− 0,08	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
77	17 » 11 22	III_n $(w.e.)$	IV_n	− 14,82	+ 0,80	+ 0,70	+ 0,10	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
78	17 » 16 9	I_n	II_n	+ 1,22	− 0,085	− 0,02	− 0,065	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
79	18 » 3 12	$I_{(w.e.)}$	II_n	− 6,00	+ 0,32	+ 0,32	0,00	Taschk., Madras, HK.
80	18 » 20 36	III_v	II_v	− 8,935	+ 0,51	+ 0,41	+ 0,10	Wi., Wellington.
81	20 » 8 8	III_v	II_v	+ 9,57	− 0,56	− 0,45	− 0,11	Grw., Pulk., Kasan.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling n°. 96 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS XI. *Een gas, dat in eene vloeistof zinkt.*

Heeft men een ideaal gas en een onsamendrukbare vloeistof zonder dampspanning. waarin het gas niet oplost, zoo zal, onder de werking der zwaartekracht, bij genoegzaam lagen druk het gas zich boven de vloeistof verzamelen, bij hoog genoeg opgedreven druk daarentegen het samengeperste gas in de vloeistof zinken.

Een tot dit denkbeeldige geval naderend verschijnsel heb ik waargenomen bij eene proef, die ruw weg hierop neer kwam, dat helium gas boven vloeibare waterstof sterker en sterker werd samengeperst totdat het in de vloeibare waterstof zonk. Ruw weg, want een zoo eenvoudig geval als vooropgesteld werd laat zich niet verwezenlijken. Iedere proef, waarbij men een gas boven eene vloeistof samendrukt, wordt in werkelijkheid een toepassing van de theorie der binaire mengsels van VAN DER WAALS. Men zal bij zulk een proef de samendrukbaarheid der vloeistofphase en de wederzijdsche oplosbaarheid van gas en vloeistof niet mogen verwaarloozen, daar men gewoonlijk den druk zelfs vrij hoog zal moeten opvoeren voor de dichtheid der gasphase vergelijkbaar wordt met die der vloeistofphase.

Past men de theorie van VAN DER WAALS op proefnemingen van de bedoelde soort toe, dan ligt de vraag voor de hand of niet in de nabijheid der plooipuntsverschijnselen, waar gas en vloeistofphase zoozeer tot elkaar naderen, dat zij van den gewonen gas- en vloeistoftoestand nog slechts den naam hebben overgehouden, allicht de phase, die de gasphase genoemd moet worden, door een hooger gehalte aan de stof met grooter moleculair gewicht, specifiek zwaarder kan worden dan de phase, die de vloeistofphase genoemd moet worden [1]). Bij nader onderzoek blijkt het echter aan betrekkingen tusschen de physische eigenschappen en de samenstelling (dus ook het moleculair gewicht) der stoffen te wijten, dat het drijven van een vloeistofphase op een gasphase ook in dit gunstig gebied niet is waargenomen.

Des te meer trof mij eene onregelmatigheid, die zich bij eene bewerking met helium en waterstof in een gesloten metalen vat voordeed. Ik meende haar te kunnen verklaren door het bovengenoemde, nog niet waargenomen verschijnsel, en zoo vestigde zich bij mij de overtuiging, dat bij — 253° en 60 atmosfeeren druk de

[1]) Het grensgeval is, dat in het met de gewichtseenheid geconstrueerde ψ-vlak de projectie der connode koorde op het xv-vlak evenwijdig aan de tijn $v = 0$ loopt.

gasvormige, hoofdzakelijk uit helium bestaande phase in de vloeibare, hoofdzakelijk uit waterstof bestaande zinkt.

Ten einde mij hiervan te overtuigen drukte ik met behulp van den in Meded. N°. 54 beschreven kwikcompressor een mengsel van ongeveer 1 deel helium en 6 deelen waterstof samen in een glazen buisje, hetgeen boven een capillaire toevoerbuis en beneden een capillaire afvoerbuis had en dat in vloeibaar waterstof gedompeld was.

Tot 49 atmosfeeren zag men de vloeibare waterstof zich uit het gasmengsel afzetten en met een duidelijken hollen meniscus begrensd tegen het helium. Bij 49 atmosfeeren daalde op eens het helium, meer nauwkeurig de voornamelijk uit helium bestaande gasphase, als water door olie naar beneden en bleef als een groote droppel op den bodem liggen. Bij verdere samendrukking tot 60 atmosfeeren en nieuwe ontspanning tot 32 atmosfeeren bleek het volume van de bel de verandering van den druk als dat van een gas te volgen. Bij 32 atmosfeeren druk steeg de bel weder naar boven. Door drukverandering kon men de bel willekeurig laten stijgen en dalen.

Het nauwkeuriger onderzoek dezer verschijnselen in verband met de reeds sedert geruimen tijd ter hand genomen isothermen van het helium en de ψ-vlakken van H_2 en He is een omvangrijk werk, zoodat het zeker wel geoorloofd is in afwachting der waarschijnlijk eerst veel later af te sluiten uitkomsten, mij thans tot deze schetsmatige mededeeling te bepalen.

Eene opmerking moge hierbij echter nog eene plaats vinden. Het blijkt wel, dat de b van helium klein moet zijn, waaruit dan weder daar de kritische temperatuur, zoo zij bestaat, zeer laag moet liggen, een uiterst kleine waarde van a volgt. Hierop wijst ook een enkele plooipuntsbepaling van een mengsel van helium en waterstof, die ik reeds verrichtte. Of a werkelijk eene positieve waarde heeft, nul, of wat toch ook denkbaar ware negatief is zal de bepaling der isothermen van helium moeten uitmaken.

Physiologie. — Ter plaatsing in de Werken wordt aangeboden door den Heer WINKLER eene verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: *„On congenital ataxia in a cat."*

De Voorzitter verzoekt de Heeren WINKLER en PLACE hierover verslag uit te brengen in de volgende vergadering.

Voor de Boekerij worden aangeboden door den heer VAN ROMBURGH 1°. de dissertatie van den Heer N. H. COHEN: *„Over Lupeol. Eene bijdrage tot de kennis der cholesterineachtige lichamen"* en 2°. van den Heer A. J. ULTEE: *„Bijdrage tot de kennis der Cyaanhydrinen."*

De vergadering wordt gesloten.

(5 December, 1906).

ERRATA.

p. 203, r. 3 v. o.: staat π_{IV}, lees Π.

„ 204, r. 8 v. b.: „ perihelielengte, lees perijovium-lengte.

„ „ r. 10 v. b.: „ π, lees Π.

„ „ r. 16 v. b.: „ 2°,64, lees 2°,62.

„ „ r. 17 v. b.: „ (hangt) van de middelbare anomalie van Jupiter af; lees; (hangt) af van de middelbare lengte des wachters, verminderd met die van den klimmenden knoop van Jupiter's equator.

„ „ r. 18 v. b.: staat $u_0 - \pi_0$, lees $u_{IV} - \Pi$.

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 29 DECEMBER 1906
-:- TOT 26 APRIL 1907 -:-

DEEL XV
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:=====: JUNI 1907 :=====:

INHOUD.

		Blz
Verslag Vergadering	29 December 1906	457
„ „	26 Januari 1907	565
„ „	23 Februari „	679
„ „	30 Maart „	765
„ „	26 April „	863

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 29 December 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 458.

In Memoriam Prof. J. A. C. OUDEMANS, p. 459.

Verslag van de Heeren P. ZEEMAN en L. BOLK over eene missive van Prof. E. C. VAN LEERSUM, p. 465.

Verslag van den Heer A. PULLE over de onderzoekingen gedurende zijn verblijf aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg verricht, p. 467.

Naschrift bij de mededeeling van den Heer J. A. C. OUDEMANS in het Verslag van 24 Nov. jl., uit een schrijven aan den Voorzitter, p. 468.

W. J. H. MOLL: „Onderzoek van eenige ultra-roode metaalspeetra". (Medegedeeld door den Heer W. H. JULIUS), p. 469.

F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeensehappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeensehappelijke koorden der krommen van drie bundels. 2e gedeelte, Toepassing op bundels van kegelsneden". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 474.

F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier oppervlakkenbundels". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 481.

W. A. WIJTHOFF: „De regel van NEPER in de ruimte van vier afmetingen". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 492.

O. POSTMA: „Nog iets over de grootheid H en de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en J. D. VAN DER WAALS), p. 498.

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS: XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels", p. 507. (Met 1 plaat).

W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ vlak van VAN DER WAALS: XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels". (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. D. VAN DER WAALS), p. 514.

H. KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS: XIV. Grafisehe afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule", p. 517.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusseheu — 104° en — 217°", p. 517. (Met 2 platen).

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer op de absolute sehaal", p. 540.

J. D. VAN DER WAALS: „Eene opmerking over de theorie van het ψ-vlak voor binaire mengsels", p. 540.

A. F. HOLLEMAN en G. L. VOERMAN: „Over het α- en het β thiopheenzuur", p. 545.

H. ZWAARDEMAKER: „Over de quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en hartswerking", naar aanleiding van onderzoekingen van den Heer P. WOLTERSON, p. 555.

M. W. BEIJERINCK: Aanbieding van de dissertatie van den Heer N. L. SÖHNGEN: „Het ontstaan en verdwijnen van waterstof en methaan onder den invloed van het organisehe leven", p. 564.

Aanbieding van een boekgesehenk, p. 564.

Errata, p. 564.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren Mac Gillavry, Lorentz, Bolk, Wind en Molengraaff dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Brief van den Minister van Waterstaat dd. 21 December 1906 waarbij bericht wordt dat na aanneming der begrooting, de subsidie ten behoeve van de geologische commissie voortaan zal luiden: „bijdrage aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam in de kosten van geologische onderzoekingen." Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Schrijven van de Kais. Akademie der Wissenschaften in Weenen, waarbij bericht wordt dat de eerstvolgende Algemeene Vergadering der Internationale Associatie der Akademiën zal plaats hebben op 29 Mei 1907.

4°. Voorstel van de Kon. Akademien van Wetenschappen te Berlijn en te Kopenhagen over de uitgave van een Corpus medicorum antiquorem.

Over beide stukken zal een besluit worden genomen in een volgende vergadering.

Naar aanleiding van eene circulaire van de Akademie van Wetenschappen te Berlijn stelt de Voorzitter in overeenstemming met den Heer W. H. Julius voor, dat de Akademie in de vergadering van de Associatie der Akademiën in 1907 te Weenen te houden zal stemmen tegen het voorstel der Royal Society om één der drie leden voor het Bestuur der Vereeniging voor Zononderzoek door de Associatie der Akademiën te doen benoemen.

Aldus wordt besloten.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van

Prof. J. A. C. OUDEMANS,

rustend lid der Akademie.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende :

Mijne Heeren!

Slechts enkele maanden na zijn ouderen broeder is Jean Abraham Chrétien Oudemans ons ontvallen, de laatste van dat onvermoeid werkzaam drietal dat in de laatste halve eeuw in onze Afdeeling en daarbuiten zooveel heeft bijgedragen tot de ontwikkeling der wetenschap.

Op bijna 79-jarigen leeftijd is hij van ons gegaan, niet als een oud afgeleefd man, wiens arbeidsdag geëindigd was, maar als een nog altijd werkzaam geleerde, vol belangstelling in al wat de sterrekunde betrof en steeds bezig met verschillende onderzoekingen, die hij op de hem eigen nauwgezette wijze de eene na de andere voltooide, niet om daarna te rusten, maar om een nieuwen arbeid aan te vangen waarvoor hij de plannen reeds had gevormd.

Die drang tot nauwgezet onderzoek en onverpoosden wetenschappelijken arbeid, dien we allen tot het laatst toe in Oudemans bewonderden, openbaart zich in zijn geheel wetenschappelijk leven.

Den 16^{den} December 1827 te Amsterdam geboren, werd hij reeds op 16-jarigen leeftijd student aan Leiden's hoogeschool en wijdde zich daar aan de sterrekunde onder de leiding van Kaiser die, toen in zijn volle kracht, tal van jonge mannen in en buiten de philosophische faculteit met warme liefde voor de wetenschap en de sterrekunde wist te bezielen.

Van die allen stond Oudemans hem het naaste, en gaarne had Kaiser hem als observator meer blijvend aan de sterrewacht

verbonden, doch aanvankelijk kon hij er niet in slagen, en OUDEMANS nam in 1846 de betrekking aan van leeraar in de wiskunde aan het gymnasium in Leiden. Hij vervulde die 7 jaren, doch tevens hield hij zich ijverig met zijne waarnemingen bezig en nadat hij als vrucht daarvan in 1852 eene dissertatie had geschreven, die thans nog hare waarde heeft behouden, volgde in 1853 zijne benoeming tot observator.

In deze betrekking hield hij zich voornamelijk bezig met waarnemingen en berekeningen van kleine planeten en veranderlijke sterren en de uitkomsten er van gaf hij in tal van grootere en kleinere verhandelingen in het licht.

In het bijzonder vermeld ik daarvan zijne bepaling van de loopbaan en de storingen van de planeet Proserpina, zijne in de verhandelingen der Akademie opgenomen onderzoekingen over de komeet van d'Arrest en over de veranderlijke sterren en zijn arbeid over de planeet Mars naar aanleiding van de heliometermetingen van BESSEL.

Hoe hoog KAISER hem stelde blijkt uit hetgeen deze schrijft in de inleiding tot het 1ste deel van de Annalen der Sternwarte in Leiden. „Es ist mir ein Bedürfniss die Lust und Eifer zu erwähnen womit er Alles angriff und meisterhaft ausführte was ich ihm vorgeschlagen hatte und sich überdiess anderen wichtigen Arbeiten widmete. Mit tiefer Wehmuth und innigem Dankgefühl gedenke ich des dreijährigen Zeitraums, während welches Herr OUDEMANS mein Mitarbeiter war, und seine Liebe für die Wissenschaft, sowie seine theuere Freundschaft mich ungemein beglückte."

In 1856 verliet OUDEMANS Leiden ten gevolge van zijne benoeming tot buitengewoon hoogleeraar te Utrecht, waar hij al dadelijk eene vernuftige methode bedacht en toepaste om de kromming van lensoppervlakken te bepalen. Zijn wetenschappelijk werk aldaar werd echter spoedig afgebroken, daar hij reeds in 1857 tot eene andere belangrijke betrekking werd geroepen.

Het Ministerie van Kolonien had namelijk in 1849 besloten eene zending uit te rusten, die ten doel zou hebben aan de topographie van den Indischen Archipel door de sterrekundige plaatsbepaling van verschillende hoofdpunten eenen grondslag te geven, die zij tot nog toe had gemist.

KAISER had, op verzoek der regeering, de voorbereiding dezer zending op zich genomen, en zijne denkbeelden omtrent de wijze, waarop zij hare taak zou moeten vervullen, neergelegd in een geschrift door hem in 1851 in het licht gegeven. Als eerste gevolg van zijn advies werd de Heer de LANGE, die zich gedurende een jaar op de sterrenwacht te Leiden had geoefend, in 1850 als geographisch ingenieur naar Indië gezonden; hij stierf echter reeds in 1855 en in 1857 werd OUDEMANS als hoofdingenieur tot Chef van den geografischen dienst in Indië benoemd.

Aanvankelijk was hij alleen belast met de astronomische plaatsbepalingen en met de voortzetting der triangulatie van Java voor zoover deze voor de topographische opneming noodig was, doch al spoedig deed hij het voorstel de metingen zoodanig in te richten, dat zij zouden kunnen dienen voor eene graadmeting. Dit plan werd door de regeering overwogen en nadat ook van de zijde dezer Akademie op het groot wetenschappelijk belang van dit werk was gewezen, verkreeg OUDEMANS opdracht zijn plan uit te voeren.

Met eene korte tusschenpoos, de laatste maanden van 1874 en het begin van 1875, was OUDEMANS 18 jaar onafgebroken in Indië werkzaam, en toen hij in Augustus 1875 Batavia verliet, om na den dood van HOEK ten tweeden male als hoogleeraar in de sterrekunde te Utrecht op te treden, had hij de hem opgedragen taak, met uitzondering van een klein aantal hoekmetingen, geheel voltooid.

Van al die waarnemingen waren alleen die bewerkt en ten deele uitgegeven welke betrekking hadden op de basismeting. Gelukkig echter werd OUDEMANS, toen alle metingen in Indië waren afgesloten, door de regeering uitgenoodigd om zich met de geheele bewerking van de triangulatie van Java te belasten. Met behulp van verschillende personen, die ten deele ook aan de waarnemingen hadden deelgenomen, vatte hij die taak op en bracht haar in 1900 tot een goed einde. In 6 folianten zijn de uitkomsten van de geheele primaire en secundaire triangulatie neergelegd.

Zijn wellicht de metingen, ook in verband met de waargenomen groot lokale afwijkingen, een gevolg van de aantrekking

der gebergten in Midden-Java, minder geschikt om eene belangrijke bijdrage tot onze kennis van den vorm van de aarde te leveren, zoo geven zij toch een uitstekenden en onmisbaren grondslag voor onze topographische kennis van Java, en de wijze, waarop OUDEMANS zich van zijn taak heeft gekweten, wettigt ten volle de eervolle onderscheiding van Correspondent der Fransche Akademie hem kort daarna verleend.

Zijne groote werkzaamheid op geodetisch gebied in Indië moest natuurlijk afbreuk doen aan zijne sterrekundige onderzoekingen; toch vond hij daarvoor nog gelegenheid. Zoo bepaalde hij door maanswaarnemingen, door sterbedekkingen en later met behulp van de telegraaf de lengte van Batavia, volbracht hij in 1868 en 1871 waarnemingen van de totale zonsverduisteringen en nam hij op verzoek onzer Afdeeling de leiding op zich van de Nederlandsche expeditie, die zich voor de waarneming van den Venusovergang in December 1874 naar het eiland Réunion zou begeven.

Met den terugkeer naar Europa trad zijn sterrekundige werkzaamheid echter meer op den voorgrond, en niettegenstaande OUDEMANS een zeer groot deel van zijn beschikbaren tijd aan de berekening en de uitgave zijner triangulatie van Java moest wijden, gaf hij toch in tal van geschriften de uitkomsten van zijne astronomische onderzoekingen.

Verschillende hadden betrekking op de theorie en constructie van instrumenten, waarmede hij zich in navolging van zijn leermeester KAISER bij voorkeur bezighield. In andere geschriften vinden wij de uitkomsten van eigen waarnemingen, terwijl hij ons elders meedeelt wat hij uit historische onderzoekingen heeft afgeleid. Afzonderlijk vermeld ik nog zijne kritische samenstelling van sterparallaxen, uitgegeven bij gelegenheid van het halve eeuwfeest der sterrewacht te Pulkowa, en het nog pas verschenen onderzoek omtrent de onderlinge verduisteringen en bedekkingen van de Jupiterssatellieten.

Naast eigen onderzoek nam in zijn wetenschappelijk leven het onderwijs eene groote plaats in; zijne uitgebreide kennis en zijne gave, van moeielijke onderwerpen eene heldere voorstelling te geven, kwamen zijne leerlingen zeer ten goede, en vaak kon men van hen vernemen hoe hoog zij zijne lessen

en zijne nimmer te vergeefs ingeroepen hulpvaardigheid stelden.

In een paar door hem uitgegeven werken leeren wij ook zijne talenten als docent kennen. Het eerste, ten dienste van het inlandsch onderwijs in Indië geschreven, de Ilmoe Alam of wereldbeschrijving, het tweede de door hem bewerkte vierde uitgaaf van KAISER's sterrenhemel, waarin met de uiterste nauwgezetheid alles werd opgenomen wat als belangrijk voor den lezer uit sterrekundige waarnemingen en berekeningen kon worden saamgegaard.

Het is duidelijk dat men er hoogen prijs op stelde een man als OUDEMANS aan wetenschappelijke commissies te verbinden. De vergelijkingen van den basistoestel van REPSOLD met de verschillende lengtestandaarden in Indië door OUDEMANS verricht wezen hem als van zelf aan tot lid der regeeringscommissie voor de bepaling van de internationale lengte-eenheid. Spoedig na zijn terugkeer in Europa werd hij dan ook in die commissie benoemd, en zoowel in de geschriften van BOSSCHA als ook in OUDEMANS' werk over de triangulatie van Java kan men zien welk een werkzaam aandeel hij heeft gehad in de talrijke vergelijkingen van de voor ons land bestemde standaarden met den internationalen meter en met den mètre des archives.

Hij was tevens lid van de commissie voor de uitgave van HUYGENS werken, en gedurende vele jaren lid van het bestuur der Astronomische Gesellschaft, hij hielp mede aan de voorbereiding van de waarneming der totale zoneclipsen in Sumatra en in Spanje en nam vooral een ijverig deel in de werkzaamheden van de Nederlandsche Rijkscommissie voor graadmeting en waterpassing, waarvan hij van den aanvang af gedurende 27 jaren een hooggewaardeerd lid was. Hem was de leiding opgedragen van de breedte- en azimutbepalingen in een aantal onzer geodetische stations, en eene uitmuntende bewerking van de daarvoor verrichte waarnemingen van zijne hand werd enkele jaren geleden door de Rijkscommissie uitgegeven.

Bij dit korte overzicht van hetgeen OUDEMANS heeft verricht staat men verbaasd over zijn eerbiedafdwingende werkzaamheid, en wanneer men zijn geschriften leest, bewondert men de nauwgezetheid met welke hij alles heeft verzameld wat

op het onderwerp betrekking heeft, en de volkomen betrouwbaarheid van wat hij mededeelt.

Die eigenschappen van zijne geschriften zijn de weerkaatsing van zijne eigenschappen als mensch. Door en door gezond en oprecht, zocht hij alleen de waarheid; geen moeite is hem daarbij te veel en hij tracht gemeenlijk haar te bereiken, niet door min of meer gewaagde vernuftige beschouwingen, maar door eene groote mate van gezond verstand en door op strenge stelselmatige wijze op zijn doel af te gaan.

Tot kort voor zijn dood bleef hij als een jong mensch tot laat in den nacht werkzaam; zijne laatste voor onze afdeeling bestemde verhandeling voltooide hij nog in den nacht voor onze Novembervergadering.

Met zijn dood, hij was ruim 51 jaar lid onzer afdeeling, is een belangrijke periode van wetenschappelijk streven afgesloten en een groot stuk van de levende historie der wetenschap van ons weggenomen.

Oudemans, tot het laatste toe alles kalm overdenkende, had den wensch geuit dat aan zijn graf niet zou worden gesproken; die wensch is geeerbiedigd, maar hier mogen en moeten we het uitspreken hoe diep we getroffen zijn door den dood van den man dien we alle hoogachten en lief hadden en hoe zijne vrienden hem betreuren, op wien zij steeds als een oprecht vriend konden bouwen.

De Heer ZEEMAN brengt ook namens den Heer BOLK het volgende verslag uit over eene missive van den Heer E. C. VAN LEERSUM.

Door den Voorzitter der Afdeeling is in onze handen gesteld eene Missive van Prof. E. C. VAN LEERSUM te Leiden betreffende eene tentoonstelling van voorwerpen, welke op de Geschiedenis der Natuur- en Geneeskundige Wetenschappen betrekking hebben, met verzoek daarover Rapport uit te brengen.

Genoemde tentoonstelling zal ter gelegenheid van het elfde Natuur- en Geneeskundig Congres te Leiden worden gehouden. Prof. VAN LEERSUM verzoekt voorwerpen, portretten en handschriften welke in het bezit der Koninklijke Akademie van Wetenschappen zich bevinden en daarvoor geschikt zijn, gedurende den tijd dat het Congres te Leiden bijeenkomt voor zijn doel af te staan.

Wij hebben naar aanleiding van dit schrijven de verzameling van instrumenten, modellen enz., die in het bezit der Akademie zijn, bezien en wij hebben bevonden dat waarschijnlijk meerdere daarvan voor genoemde tentoonstelling van belang zullen zijn.

Wij veroorloven ons hier enkele dier voorwerpen te noemen:

Een Diagraaf in mahoniehouten kist aangekocht voor de 1ste klasse van het Kon. Ned. Instituut in 1841.

Een Bathometer om diepten op zee te peilen, aan het Instituut ter beoordeeling gezonden door den Minister van Binnenlandsche Zaken in Augustus 1814.

Een groote enkelvoudige staande luchtpomp door CANZIUS „onder de Wijngaard" vervaardigd, aangekocht door Koning Lodewijk uit den boedel van Dr. DEIMAN, geschenk van de Fransche regeering (zie bijlage).

Een toestel tot het vervaardigen van houten meters en onderdeelen.

Een guillotine.

Verscheidene houten inhoudsmaten bij verschillende steden in gebruik tijdens het Bestuur van Koning Lodewijk. Naar Amsterdam gebracht in 1813.

Twee bekleede kastjes inhoudende een stel gedraaide koperen inhoudsmaten met dekglazen, afkomstig van Prof. J. H. VAN SWINDEN.

Eenige stalen en glazen meters gediend hebbende bij het vergelijken van Meters door Prof. STAMHART.

Verder een aantal modellen o. a.:

Een model ijsbreker bij missive van 18 Maart 1822 van den Minister van Onderwijs, nationale Nijverheid en Koloniën namens Z. M. den Koning aan het Instituut ten geschenke gegeven.

Een model der kielkade aan 's Landswerf te Medemblik in 1798.

Ook onder de Portretten in het bezit der Akademie komen er voor die van historische beteekenis geacht kunnen worden.

Wat de handschriften betreft is uwe commissie van meening dat voor eene tentoonstelling van korten duur de bezwaren aan het uitleenen van Manuscripten verbonden het nut dat ervan verwacht kan worden verre overtreffen. Wij meenen dus te moeten ontraden Manuscripten in het bezit der Akademie in te zenden.

Uwe commissie heeft derhalve de eer aan de Afdeeling voor te stellen het verzoek van Prof. VAN LEERSUM voor zoover het instrumenten, modellen en portretten betreft, in te willigen, en haar te machtigen, met den verzoeker nader in overleg te treden, om over eene geschikte keuze der bedoelde voorwerpen te kunnen beslissen en inzending van duplikaten te voorkomen.

Amsterdam, December 1906.

P. ZEEMAN.
L. BOLK.

BIJLAGE.

In de notulen van 24 September 1853 wordt het volgende gevonden:

„De Secretaris herinnert dat in het Proces Verbaal der Buitengewone Algemeene Vergadering van het Koninklijk Nederl. Instituut gehouden den 15 December 1851 het feit vermeld wordt dat indertijd door koning Lodewijk uit den Boedel van wijlen Dr DEIMAN aangekocht zijn eene electriseer machine [nog aanwezig, maar niet geheel intact, December 1906] en luchtpomp met daarbij behoorende toestellen, met het doel om deze te schenken aan het door Zijne Majesteit pas opgerigte Instituut. De algemeen bekende gebeurtenissen hebben dien Vorst belet aan dit voornemen gevolg te geven. Hierdoor zijn deze beide toestellen, na gedurende eenen geruimen tijd eerst elders en daarna bij den Heer G. VROLIK, toen Secretaris der Eerste klasse in bewaring te zijn geweest, overgebragt in de verzameling der modellen van de Eerste klasse, alwaar zij eigenlijk slechts zijn nedergezet geworden, zonder het eigendom des Instituuts te kunnen heeten . . . De Secretaris werd, door den Consul-Generaal van Frankrijk later in de gelegenheid gesteld, deze bijzonderheid onder de aandacht der Regeering van Frankrijk te brengen, en is door een mondeling berigt van den Consul voornoemd geregtigd in het Proces Verbaal dezer zitting te doen aanteekenen, dat van dezen oogenblik af beide voorwerpen kunnen beschouwd worden het eigendom te zijn der Akademie."

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Plantkunde. — Verslag van de onderzoekingen van den Heer A. Pulle, gedurende zijn verblijf aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg verricht.

Aan den Heer Secretaris van de Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam.

Bij deze heb ik de eer aan de Koninklijke Academie van Wetenschappen een beknopt verslag aan te bieden van mijne onderzoekingen te Buitenzorg.

Gedurende mijn verblijf aldaar van 15 Maart 1906 tot 31 Juli 1906 heb ik mij in de allereerste plaats bezig gehouden met het vermeerderen van mijne vormenkennis. Wegens de richting, die mijne studie in de laatste jaren genomen heeft, heb ik gemeend, mijn tijd niet hoofdzakelijk te moeten besteden aan onderzoekingen in het laboratorium, doch heb ik er de voorkeur aan gegeven in de $4^1/_2$ maand, die ik op Java doorbracht, mij een zoo volledig mogelijk beeld van de flora te vormen.

Dientengevolge heb ik steeds een groot deel van mijn tijd in den botanischen tuin doorgebracht, zonder aan bepaalde plantenfamilies meer speciaal mijn aandacht te wijden.

Ik meende tevens een deel van mijn tijd te moeten besteden door een collectie van gedroogde planten en een spiritus verzameling bijeen te brengen.

Het spreekt vanzelf dat ik mijn onderzoek moest uitstrekken over een grooter deel van Java. Zoo werd door mij van 2—4 April een tocht ondernomen naar Tandjong-Priok en Antjol ter bestudeering van de mangrove-vegetatie aldaar.

Van 23 tot 27 April maakte ik met een gouvernementsstoomer een reis in de Soendastraat en bezocht eenige van de koraaleilanden en van de vulkanische eilanden. Bij die gelegenheid was ik in staat mij een goed denkbeeld te vormen van de Javaansche strandvegetatie. Meer speciaal was het eiland Krakatau het doel van de reis, welk eiland in 1886 door Prof. Treub en in 1896 door Prof. Penzig werd onderzocht en waarvan thans voor de derde maal de vermeerdering der flora kon nagegaan worden. Het bleek dat het aantal soorten in de afgeloopen tien jaar weer belangrijk was toe genomen.

Van 12 tot 26 Mei maakte ik een reis over Java tot in den oosthoek en was speciaal in de gelegenheid de vegetatie van den Wilis te beschouwen.

Van 1 tot 15 Juni hield ik verblijf in den bergtuin te Tjibodas,

van waarnit tochten ondernomen werden op den Gedeh en den Pangerango en waar ik gelegenheid had met de West-Javaansche bergflora kennis te maken.

Het tijdverloop van 15 Juni tot 1 Juli werd op de hoogvlakte van Pengalengan doorgebracht, waar ik weer met een ander type van het Javaansche oerbosch in aanraking kwam.

Op al deze reizen stelde ik mij steeds zooveel mogelijk op de hoogte van de verschillende cultures.

Van 1 Juli tot 31 Juli hield ik weer verblijf te Buitenzorg om mijne collecties te rangschikken en nog eenig onderzoekingsmateriaal te verzamelen. Daarbij lette ik speciaal op de gevallen van parthenogenesis (of apogamie) in het plantenrijk waarvan er in den laatsten tijd steeds meer bekend worden. Ik verzamelde om die reden materiaal van Elatostemma sessile, Elatostemma sinuatum, Trema orientalis, Villebrunnea rubescens, Diospyros cauliflora, waarvan er eenigen door vruchtzetting en tevens geheele afwezigheid van stuifmeel de aandacht trokken, terwijl bij anderen verschillende redenen eene abnormale embryovorming deden vermoeden. Verder maakte ik een begin met het onderzoek naar de embryoontwikkeling van eenige palmen en van Pistia Stratiotes.

Deze onderzoekingen zijn thans nog niet in een stadium, om er eenige verdere mededeelingen over te kunnen doen.

Utrecht, December 1906. A. Pulle.

Sterrekunde. — Naschrift bij de mededeeling van den Heer J. A. C. Oudemans in het verslag van 24 November 1906 uit een schrijven van den Heer Oudemans d.d. 24 November aan den Voorzitter.

Ik had nog gemeend er een tweede aanhangsel aan toe te voegen, dat wel niet strikt met het genoemde onderwerp samenhangt, maar waartoe de berekeningen voor het 1ste aanhangsel, (nu het eenige), mij geleid hadden, handelende namelijk over de herleiding tot ééne zelfde norm van de soms zeer uiteenloopende, met kijkers van verschillende openingen en onder verschillende omstandigheden waargenomene oogenblikken van het verdwijnen der wachters in, en van hun wederverschijnen uit Jupiter's schaduw.

Reeds had ik hiervoor eene theorie ontworpen en berekeningen uitgevoerd, toen ik gewaar werd, dat ik op dit terrein voorgangers gehad had, namelijk Bailly, die in 1771 in de Histoire de l'Académie des Sciences de zaak zeer uitvoerig behandelde, en den Petersburger

hoogleeraar DE GLASENAPP, die in 1874 op BAILLY's voetspoor voortging, en zijne handelwijze in praktijk bracht door bijna 400 waarnemingen van eklipsen van den eersten wachter, waargenomen in het tijdvak 1848—1873, te herleiden.

Zijne verhandeling is helaas afzonderlijk in het Russisch uitgegeven, doch in het 12de deel van het tijdschrift „the Observatory" heeft de Heer DOWNING, thans Superintendent van den Nautical Almanac, er een uittreksel van gegeven; het blijkt daaruit, dat de schrijver het onderwerp grondig behandeld heeft.

Slechts op één punt zou zijne wijze van berekening mijns inziens nog verbeterd kunnen worden, als namelijk gelet werd op de vermindering van het licht, van het middelpunt der zon af tot aan den rand.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling namens den Heer W. J. H. MOLL, getiteld: *„Onderzoek van eenige ultra-roode metaalspectra."*

Van de spectra der verschillende elementen leenen die der alcaliën, door hun betrekkelijk eenvoudige structuur, zich bij uitstek tot een onderzoek in het ultra-rood. Vele waarnemers hebben dan ook naar emissielijnen dier metalen in dit gebied gezocht.

Voor het eerste deel van het ultra-roode spectrum is de photographische plaat te sensibiliseeren; vooral door LEHMANN [1]) zijn op deze wijze verschillende lijnen uitgemeten, met golflengten tot bijna 1 μ. SNOW [2]) wist, met behulp van den bolometer, tot golflengten van 1.5 μ door te dringen. Voor het verdere gebied was echter omtrent deze spectra niets bekend. Wel is COBLENTZ [3]), na een reeks waarnemingen dienaangaande, tot het resultaat gekomen, dat de alcaliën voorbij 1.5 μ geen specifieke emissie vertoonen, maar ik had redenen aan de gegrondheid van zijn uitspraak te twijfelen.

In het volgende zal kortelijks de methode worden meegedeeld, volgens welke eenige ultra-roode lijnenspectra ook voor de langere golven onderzocht werden, en welke lijnen daarbij gevonden zijn. In een dissertatie, die binnenkort zal verschijnen, zullen nadere bijzonderheden vermeld worden.

Voor het onderzoek der alcaliën werden de metaalzouten op de

---

[1]) H LEHMANN. D.'s Ann. **5**, 633, 1901.

[2]) B. W. SNOW. W.'s Ann. **47**, 208, 1892.

[3]) W. W. COBLENTZ. Investigations of Infra red Spectra. Carnegie Inst. Washington. 1905.

gebruikelijke wijze in den lichtboog vervluchtigd. Het zeer samengestelde banden-spectrum, door den lichtboog bij afwezigheid van metaaldampen uitgezonden, strekt zich ver in het ultra-rood uit. Dit bemoeilijkt echter in geenen deele het onderzoek van de metalen. Het treedt namelijk, bij voldoenden metaal-rijkdom van den boog, geheel op den achtergrond. Wel maakt het continue spectrum, door de gloeiende deeltjes in den boog uitgezonden, de waarneming van enkele zwakkere lijnen min of meer bezwaarlijk, en blijft de emissie van koolzuur, het verbrandings-product der kolen, met een maximum bij 4.44 μ, bijna onverzwakt bestaan.

Het beeld van den boog wordt door een hollen spiegel geworpen op de spleet van een spiegelspectrometer; de stralen worden door een steenzout-prisma ontleed, en een deel van het zoo gevormde spectrum treft een lineaire thermozuil. Deze is, naar het voorbeeld van RUBENS, uit ijzer en constantaan opgebouwd; daarbij zijn alle afmetingen kleiner gekozen dan bij het model, en is een zeer groote gevoeligheid bereikt. Zoowel de emitteerende spleet als de thermozuil zijn vast opgesteld; om op deze laatste achtereenvolgens verschillende deelen van het spectrum te doen invallen, kan het prisma kleine hoeken gedraaid worden. Een Wadworthsche combinatie van prisma en vlakken spiegel handhaaft bij de draaiing de deviatio minima.

Bij de keuze en den bouw der instrumenten is te rade gegaan met de wenschelijkheid, het uiterst inspannende aflezen van den galvanometer, en het gelijktijdig noteeren van den bijbehoorenden stand van het prisma, door automatisch registreeren te vervangen. Daarbij had ik de grootsche opstelling voor oogen, waarmede LANGLEY sedert jaren de intensiteits-kromme van het ultra-roode zonnespectrum op een photographische plaat vastlegde. Dat deze methode om warmtespectra te registreeren geen navolging heeft gevonden, in plaats van de tijdroovende visueele waarneming, moet daaraan worden toegeschreven, dat vooreerst een zeer ingewikkeld mechanisme noodig is, om volkomen overeenstemming te verzekeren tusschen de lineaire verschuiving van de photographische plaat en de draaiing van den spectrometer, en dat er bovendien bijzondere eischen gesteld moeten worden aan de gelijkmatigheid van de temperatuur der omgeving gedurende de waarneming.

Met zeer eenvoudige hulpmiddelen heb ik een methode van registreeren ingericht, die de beide moeilijkheden ontgaat, terwijl zij toch de zekerheid der „correspondentie" geheel verwezenlijkt, en ook juiste uitkomsten levert wanneer temperatuurs-veranderingen der omgeving onvermijdelijk zijn. Daartoe is vooreerst de geleidelijke

registreering vervangen door het opschrijven van een reeks stippen, en voor de continue draaiing van den spectrometer, een intermitteerende in de plaats gesteld. Zoo kan voor elke geregistreerde stralings-intensiteit de daarbijbehoorende stand van het prisma worden gevonden, niet door het *meten* van abscissen, maar door het *tellen* van stippen.

Doordat bovendien niet slechts de uitslagen van den galvanometer, maar telkens ook de nulstanden werden opgeteekend, zal op de spectrogrammen de stralings-intensiteit ook dan kunnen worden afgelezen, wanneer gedurende de waarneming de temperatuur der omgeving, en tengevolge daarvan de nulstand, veranderlijk was.

De voornaamste voordeelen van deze methode van waarneming boven de gebruikelijke zijn:

1°. De absolute betrouwbaarheid der waarnemingen.

2°. De zeer korte tijd, waarin een waarnemingsreeks geschiedt.

3°. De zekerheid, waarmee bij verloopenden nulstand kan worden geïnterpoleerd.

4°. Het niet bestaan van storingen, door de nabijheid van den waarnemer veroorzaakt.

5°. De volkomen vergelijkbaarheid der verschillende waarnemingen.

6°. De mogelijkheid, om uit den vorm der nul-lijn de waarschijnlijke fout te beoordeelen.

De korte tijd, waarin een waarnemingsreeks geschiedt, is o.a. van beteekenis bij het onderzoek van warmtebronnen, die, zooals de lichtboog, langzame veranderingen der stralings-intensiteit vertoonen. Een spectrum van 0.7 μ tot 6 μ werd, met 200 verzettingen van den spectrometer, in 2 uur geregistreerd.

Op de spectrogrammen wordt een spectraallijn door 5 à 6 stippen vertegenwoordigd. Bij een verzetting van den spectrometer ondergaat de lijn namelijk een lineaire verplaatsing, die $^2/_5$ bedraagt van de breedte van het spleetbeeld en van de daaraan gelijke breedte der thermozuil. Gedurende 5 achtereenvolgende verzettingen zal dus eenzelfde stralensoort de thermozuil kunnen treffen. Uit de onderlinge ligging dier stippen kan de plaats van maximale stralings-intensiteit met nauwkeurigheid worden afgelezen. Om hieruit te besluiten tot

de plaats, door de lijn in het spectrum ingenomen, is de kennis van één vast punt in het spectrum voldoende. Dit vaste punt werd gewoonlijk aan een vergelijkings-spectrum ontleend, en hiervoor werd de koolzuur-emissie van de Bunsensche vlam gekozen, waarvan het maximum volgens zeer nauwkeurige metingen van PASCHEN bij 4.403 μ ligt. Een deel van het vlam-spectrum werd daartoe tegelijk met het te onderzoeken spectrum geregistreerd.

Een eenvoudige berekening geeft dan den brekingsindex voor de onbekende stralensoort. Om hieruit de golflengte van de lijn te kunnen afleiden, moet gebruik worden gemaakt van een dispersieformule. Het is me gebleken, dat de bekende dispersie-krommen van LANGLEY en van RUBENS aanmerkelijke onderlinge afwijkingen vertoonen, en ofschoon bij eerste beschouwing de bepalingen van LANGLEY verre de voorkeur schijnen te verdienen, ontstaat bij nader inzicht, vooral wat de langere golven betreft, twijfel aan hare voortreffelijkheid. Het verkiezen van de eene dispersie-kromme boven de andere schijnt me vooralsnog willekeurig. In de tabellen vermeld ik daarom naast de waargenomen brekingsindices, de golflengten, zooals ze daaruit zijn berekend volgens de formule van LANGLEY zoowel als volgens die van RUBENS. De opgegeven brekingsindices gelden voor een temperatuur van 20°; voor hunne bepaling is uitgegaan van den index 1.54429 voor de *D*-lijn, welke waarde uit zeer nauwkeurige waarnemingen van LANGLEY is afgeleid.

Hieronder volgen de tabellen met de lijnen van Na, K, Rb en Cs (het is me niet gelukt, met Li in den boog betrouwbare resultaten te verkrijgen) en van Hg. De resultaten zijn afgeleid uit een groot aantal spectrogrammen (10 à 12 voor ieder metaal). Voor het onderzoek van het kwik-spectrum werd een kwik-booglamp geconstrueerd, die voorzien was van een venster van steenzout. Terwijl het kwikspectrum meermalen tot 10μ onderzocht is, werd voorbij 1.7μ geen meetbare emissie meer waargenomen.

In de tabellen geeft de eerste kolom den brekingsindex n van steenzout, de tweede en derde de golflengte μ der lijn volgens de formule van LANGLEY en die van RUBENS, en de vierde kolom de globale waarde I van de intensiteit.

Voor de lijnen, waarvan de plaatsbepaling bezwaarlijk was, is de brekingsindex in slechts vier decimalen vermeld.

NATRIUM.

n	μ(Langley)	μ (Rubens)	I
1.53529	0.819	0.816	240
.53062	1.14	1.13	180
.52961	1.27	1.25	15
.5286	1.44	1.42	5
.5281	1.57	1.54	5
.52711	1.85	1.80	25
.52613	2.21	2.16	45
.52589	2.31	2.25	35
.52455	2.90	2.84	20
.5234	3.42	3.36	5
1.52178	4.06	4.00	10

KALIUM.

n	μ(Langley)	μ (Rubens)	I
1.53654	0.771	0.768	620
.5325	0.97	0.96	10
.5310	1.11	1.10	20
.53030	1.18	1.17	320
.52972	1.25	1.24	200
.52823	1.53	1.50	95
.5261	2.24	2.18	5
.52486	2.76	2.70	20
.52401	3.14	3.08	20
.52263	3.73	3.67	15
1.52184	4.04	3.98	10

RUBIDIUM.

n	μ(Langley)	μ (Rubens)	I
1.53733	0.744	0.742	12
.53624	0.782	0.779	450
.5359	0.795	0.792	300
.5332	0.93	0.92	10
.53202	1.01	1.00	35
.5309	1.11	1.10	10
.52912	1.35	1.33	200
.52830	1.49	1.51	180
.52597	2.28	2.22	20
.52477	2.80	2.73	25
1.52186	4.03	3.97	10

CAESIUM.

n	μ(Langley)	μ (Rubens)	I
1.53566	0.803	0.801	40
.53451	0.855	0.851	250
.53375	0.895	0.891	200
.5333	0.920	0.914	75
.53202	1.01	1.00	90
.52902	1.37	1.35	70
.52846	1.48	1.45	80
.5275	1.74	1.70	5
.5264	2.08	2.03	5
.5257	2.41	2.35	5
.52433	3.00	2.93	50
.52315	3 .51	3.45	30
1.52203	3 97	3.91	10

KWIK.

n	μ(Langley)	μ (Rubens)	I*
1.53198	1.01	1.00	28
.53076	1.13	1.11	8
.52907	1.36	1.34	11
.52828	1.52	1.49	5
1.52759	1.70	1.66	5

* De intensiteit van de groene en gele kwiklijnen = 10 gesteld.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt namens den Heer F. SCHUH eene mededeeling aan: *„Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels"*. 2e gedeelte: *Toepassing op bundels van kegelsneden.*

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

9. Zijn de krommenbundels kegelsneebundels ($r = s = t = 2$), dan is als er geen gemeenschappelijke basispunten zijn de meetkundige plaats van den 15^{den} graad en de omhullende van de 6de klasse. In het volgende willen we het geval, dat een der bundels met ieder der beide andere twee basispunten gemeen heeft, wat nader beschouwen, waarbij we langs anderen weg resultaten zullen verkrijgen, die met de algemeene in overeenstemming blijken en deze hier en daar aanvullen.

Zijn $ABCD$, $ABEF$ en $CDGH$ de drie kegelsneebundels. Op een kegelsnede van den bundel $ABCD$ worden door de beide andere bundels twee kwadratische involuties ingesneden, waarvan de verbindingslijnen der puntenparen door een punt K van EF resp. een punt L van GH gaan. Het gemeenschappelijke puntenpaar PP' van deze beide involuties wordt dus door de rechte KL ingesneden. Doorloopt de kegelsnede $ABCD$ den geheelen bundel, dan beschrijven K en L op EF en GH projectieve puntenreeksen. Immers neemt men K op EF aan, dan is de kegelsnede $ABCD$ daardoor bepaald, daar die gaan moet door het tweede snijpunt van CK met de kegelsnede $ABEFC$ (als ook door het tweede snijpunt van DK met de kegelsnede $ABEFD$); met de kegelsnede $ABCD$ is dan ook het punt L ondubbelzinnig bepaald. Omgekeerd komt nu ook met een

punt L van GH één punt K overeen. De projectieve puntenreeksen zijn echter in het algemeen niet perspectief, *zoodat de rechten KL of PP' een kegelsnede N omhullen, die aan EF en GH raakt.*

Van die kegelsnede laten zich nog drie andere raaklijnen gemakkelijk construeeren, door nl. voor de kegelsnede $ABCD$ achtereenvolgens ieder der drie degeneraties te kiezen. Is die kegelsnede $AB \,.\, CD$, dan liggen de beweeglijke snijpunten met kegelsneden van den bundel $ABEF$ op CD, zoodat K op CD valt, dus in het snijpunt K_1 van CD en EF; evenzoo valt L in het snijpunt L_1 van AB en GH. De rechte K_1L_1 is dus raaklijn van N. Iets minder eenvoudig wordt de constructie als we een der beide andere degeneraties kiezen, bv. $AC \,.\, BD$. Door deze te snijden door de gedegenereerde kegelsnede $AE \,.\, BF$ van den bundel $ABEF$ blijkt, dat K dan valt in het snijpunt van EF met de verbindingslijn van het snijpunt van AE en BD met het snijpunt van BF en AC; op overeenkomstige wijze vindt men L.

Tot de eigenlijke meetkundige plaats M der punten P en P' behoort de snijkromme (meetkundige plaats der snijpunten) van de kegelsneden van den bundel $ABCD$ met de projectief verwante raaklijnen KL der kegelsnede N. Deze snijkromme is (zooals uit de snijpunten met een willekeurige rechte of met een willekeurige kegelsnede van den bundel $ABCD$ gemakkelijk blijkt) van den 5^{den} graad met dubbelpunten in A, B, C en D; verder gaat ze door E, F, G en H, daar het punt K in E komt als de kegelsnede $ABCD$ door E gaat, enz. Kiest men voor de kegelsnede van den bundel $ABCD$ de degeneratie $AB \,.\, CD$, dan gaat KL in K_1L_1 over, welke rechte de kegelsnede $AB \,.\, CD$ in de punten K_1 en L_1 snijdt, die dus eveneens op de snijkromme liggen. Door de beide andere degeneraties te kiezen vindt men nog 4 andere punten der C_5. In het geheel zijn dit 10 enkelvoudige en 4 dubbelpunten, waardoor de C_5 bepaald is.

Kiest men de degeneratie $AB \,.\, CD$, dan doet zich de bijzonderheid voor, dat het puntenpaar der involutie ingesneden door den bundel $ABEF$ onbepaald kan worden op AB, als nl. de kegelsnede $ABEF$ degenereert in $AB \,.\, EF$. Daardoor zal de geheele rechte AB (en natuurlijk evenzoo de rechte CD) tot de eigenlijke meetkundige plaats van P en P' behooren [1]). Tot het eigenlijke deel van de omhullende der rechten PP' dragen de op AB en CD gelegen puntenparen PP' niets anders bij dan de rechten AB en CD (die ook tot het oneigenlijke deel der omhullende, de punten A, B, C en D, behooren), hetgeen geen verhooging der klasse geeft.

[1]) Algemeener: liggen twee basispunten van een bundel met twee basispunten van een anderen bundel op één rechte, dan behoort die rechte tot de eigenlijke meetkundige plaats.

De eigenlijke meetkundige plaats van P en P' bestaat dus uit de rechten AB en CD en de kromme C_5 en is dus in overeenstemming met de algemeene resultaten van den 7^{den} graad. De rechte AB (CD) snijdt de C_5 in de dubbeltellende punten A en B (C en D) en in L_1 (K_1). *De C_7 heeft dus buiten de basispunten* (waarvan E, F, G en H enkelvoudige en A, B, C en D drievoudige punten der C_7 zijn) *dubbelpunten in K_1, L_1 en het snijpunt T van AB en CD.* Deze vormen een drietal bij elkaar behoorende dubbelpunten, waarvan we in § 5 gesproken hebben. De kegelsneden der drie bundels, die door een dier dubbelpunten gaan, gaan ook door de drie andere; deze kegelsneden zijn $AB \,.\, CD$, $AB \,.\, EF$ en $CD \,.\, GH$. Met de door T gaande takken TK_1 en TL_1 van C_7 correspondeeren resp. de door K_1 en L_1 gaande takken K_1T en L_1T, terwijl de door K_1 en L_1 gaande takken van C_5 onderling correspondeeren.

Resumeerend hebben we dus gevonden:

Bij de drie kegelsneebundels $ABCD$, $ABEF$ en $CDGH$ bestaat de eigenlijke meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen PP' uit de rechten AB en CD en een kromme van den 5^{den} graad, die in A, B, C en D dubbelpunten en in E, F, G en H enkelvoudige punten bezit en verder gaat door het snijpunt K_1 van CD en EF en het snijpunt L_1 van AB en GH. De eigenlijke omhullende der rechten PP' is een kegelsnede, die aan de rechten EF, GH en K_1L_1 raakt.

10. *Liggen de punten A, B, C, D, E en F op één kegelsnede,* dan behoort die tot de meetkundige plaats, zoodat de C_5 in die kegelsnede en een C_3 gaande door A, B, C, D, G, H, K_1 en L_1 degenereert. Bij iedere kegelsnede van den bundel $ABCD$ behoort nu hetzelfde punt K, nl. K_1, zooals onmiddellijk blijkt door de kegelsnede van den bundel $ABEF$ door C en D te leggen. Neemt men voor de kegelsnede $ABCD$ echter $ABCDEF$, dan wordt K onbepaald op EF, terwijl het punt L ergens in L_2 op GH komt te liggen. De verwantschap tusschen de punten K en L is nu zoo, dat met een buiten L_2 gelegen punt L steeds hetzelfde punt K overeenkomt, nl. K_1, terwijl als L in L_2 valt het punt K willekeurig op EF is. *De kegelsnede N degenereert dus in de twee punten K_1 en L_2.* Het verband tusschen de kegelsneden van den bundel $ABCD$ en de raaklijnen KL of PP' van N is zoo, dat met de kegelsnede $ABCDEF$ iedere rechte door L_2 correspondeert en overigens tusschen de kegelsneden $ABCD$ en de rechten door K_1 een projectief verband bestaat, waarbij met de kegelsneden $ABCDEF$, $ABCDG$, $ABCDH$ en de ontaarde kegelsnede $AB \,.\, CD$ resp. K_1L_2 , K_1G , K_1H en K_1L_1 overeenkomen. Ook hieruit blijkt, *dat de snijkromme C_5 degenereert in de kegelsnede*

ABCDEF en een C_3 gaande door A, B, C, D, G, H, K_1 en L_1, terwijl we verder nog vinden, *dat de C_3 door de snijpunten van K_1L_2 met de kegelsnede ABCDEF gaat.*

De buiten de basispunten gelegen dubbelpunten der $C_7 = AB \,.\, CD.$ *ABCDEF*. C_3 zijn K_1, L_1, T en de beide snijpunten van K_1L_2 met *ABCDEF*. De twee laatstgenoemde dubbelpunten geven geen puntentripel, waardoor kegelsneden der drie bundels gaan, maar twee samenvallende puntenparen (zie § 5); de takken door het eene dubbelpunt correspondeeren met de takken door het andere dubbelpunt en natuurlijk zoo, dat de tot de C_3 behoorende takken onderling correspondeeren en evenzoo de tot de kegelsnede *ABCDEF* behoorende takken.

11. *Liggen bovendien de punten A, B, C, D, G en H op één kegelsnede,* dan degenereert de C_3 in die kegelsnede en de rechte K_1L_1 (L_2 valt dan met L_1 samen), *zoodat de eigenlijke meetkundige plaats dan uit de kegelsneden ABCDEF en ABCDGH en de rechten AB, CD en K_1L_1 bestaat.* De rechte K_1L_1 wordt daardoor opgeleverd, dat als de kegelsnede *ABCD* niet door E en F gaat en ook niet door G en H het punt K in K_1 en L in L_1 valt, zoodat het op die kegelsnede gelegen puntenpaar PP' steeds door dezelfde rechte K_1L_1 wordt ingesneden. De C_7 heeft nu buiten de basispunten 7 dubbelpunten, en wel één drietal, K_1, L_1, T, en twee paren, de twee snijpunten van K_1L_1 met de kegelsnede *ABCDEF* en die met de kegelsnede *ABCDGH*.

Valt K_1 met L_1 en dus ook met T samen, m. a. w. *gaan de vier rechten AB, CD, EF en GH door één punt,* dan vallen op iedere kegelsnede van den bundel *ABCD* de beide involuties samen. *De eigenlijke meetkundige plaats wordt dan onbepaald. Legt men door een willekeurig punt P een kegelsnede van ieder der bundels, dan hebben die kegelsneden nog een tweede gemeenschappelijk punt, nl. het tweede snijpunt van de rechte TP met de kegelsnede ABCDP.* De eigenlijke omhullende is dan nog steeds bepaald en bestaat uit twee samenvallende punten T.

12. *Vallen de punten E en G samen,* dan valt, als de kegelsnede van den bundel *ABCD* door E gaat, zoowel K als L in E. De puntenreeksen K en L zijn dan perspectief; de rechten KL gaan alle door een zelfde punt U.

De kegelsnede N degenereert in de twee punten E en U. Daar E tot het oneigenlijke deel der omhullende behoort, *bestaat nu de eigenlijke omhullende alleen uit het punt U.* Door voor de kegelsnede

$ABCD$ de degeneratie $AB \,.\, CD$ te kiezen blijkt, *dat U op de rechte K_1L_1 ligt.* Nog een tweede rechte KL, en daarmede het punt U zelf, laat zich op de in § 9 aangegeven wijze construeeren door de kegelsnede $ABCD$ in $AC \,.\, BD$ of $AD \,.\, BC$ te laten degenereeren.

Tusschen de door U gaande rechten KL of PP' en de kegelsneden van den bundel $ABCD$ bestaat een projectief verband, waarbij met de kegelsneden $ABCDE$, $ABCDF$, $ABCDH$ en $AB \,.\, CD$ resp. de rechten UE, UF, UH en K_1L_1 correspondeeren. *De meetkundige plaats der snijpunten is een kubische kromme gaande door de punten $A, B, C, D, U, E, F, H, K_1$ en L_1,* die door deze 10 punten bepaald is; ook de derde snijpunten dier kromme met AC, AD, BC en BD zijn gemakkelijk te construeeren.

Op de kegelsnede $ABCDE$ vallen de beide involuties samen, zoodat die kegelsnede zich van de C_5 van § 9 heeft afgesplitst en oneigenlijk geworden is.

De eigenlijke meetkundige plaats bestaat nu uit de rechten AB en CD en de bovengenoemde C_3 en is dus van den 5^{den} graad. Deze C_5 heeft buiten de basispunten drie dubbelpunten, K_1, L_1 en T (het snijpunt van AB en CD), die een tripel vormen.

Liggen bovendien de punten A, B, C, D, E en F op één kegelsnede, dan doet zich geen andere bijzonderheid voor dan *dat het punt U in K_1 valt.* Van de drie snijpunten K_1, L_1 en U van K_1L_1 met de C_3 vallen nu K_1 en U samen, *zoodat de C_3 in K_1 aan de lijn K_1L_1 raakt.* In vergelijking met § 10 is de bijzonderheid, die zich voordoet, dat het punt L_2 in E valt, terwijl de stralenbundel L_2 tot het oneigenlijke deel der omhullende en de kegelsnede $ABCDEF$ tot het oneigenlijke deel der meetkundige plaats is overgegaan.

13. Het in de vorige paragraaf behandelde geval is natuurlijk niet het eenige, waarin de puntenreeksen K en L perspectief zijn, daar de voorwaarde dier perspectiviteit enkelvoudig, de voorwaarde van het samenvallen van E en G dubbel is. De voorwaarde voor de perspectiviteit kan gevonden worden uit de voorwaarde, dat het snijpunt V van EF en GH (als punt K) met zich zelf (als punt L) overeenkomt. Nu gaat de bij V als punt K behoorende kegelsnede van den bundel $ABCD$ door het tweede snijpunt W van CV met de kegelsnede $ABEFC$, terwijl C, W een puntenpaar der involutie is op de kegelsnede $ABCDW$ door den bundel $ABEF$ ingesneden. Behoort dit puntenpaar ook tot de involutie op diezelfde kegelsnede door den bundel $CDGH$ ingesneden, dan valt blijkbaar ook het punt L in V. Dit is dus het geval *als de kegelsnede van den bundel $CDGH$, die in C aan de kegelsnede $ABCDW$ raakt, door W gaat.*

Aan deze voorwaarde voor de perspectiviteit der puntenreeksen K en L (waarin natuurlijk C met D moet kunnen worden verwisseld, evenals AB en EF met CD resp. GH) is ten duidelijkste voldaan als E en G samenvallen.

Is U het centrum der perspectiviteit, dan bestaat tusschen de stralen van den bundel U en de kegelsneden van den bundel $ABCD$ een projectief verband, waarbij met de kegelsneden $ABCDE$, $ABCDF$, $ABCDG$, $ABCDH$, $ABCDW$ en $AB.CD$ resp. de stralen UE, UF, UG, UH, UV en $K_1 L_1$ correspondeeren, terwijl bovendien met de kegelsnede $ABCDW$ alle stralen van den bundel V correspondeeren. De C_5 van § 9 degenereert dus in de kegelsnede $ABCDW$, die nog steeds tot het eigenlijke deel der meetkundige plaats behoort, en een C_3 gaande door de punten $A, B, C, D, U, E, F, G, H, K_1$ en L_1, die de kegelsnede in A, B, C en D en de beide snijpunten van UV met die kegelsnede snijdt.

De eigenlijke meetkundige plaats is dus een C_7 bestaande uit de rechten AB en CD, de kegelsnede $ABCDW$ en genoemde C_3. Buiten de basispunten heeft deze C_7 vijf dubbelpunten, nl. het tripel K_1, L_1, T en het paar gevormd door de snijpunten van UV met de kegelsnede $ABCDW$.

De C_3 is door de 10 punten $A, B, C, D, E, F, G, H, K_1$ en L_1 bepaald. Deze 10 punten zullen dus, als aan de genoemde voorwaarde voor de perspectiviteit voldaan is, op één C_3 moeten liggen, en omgekeerd kan gemakkelijk bewezen worden, dat als die 10 punten op een C_3 liggen de puntenreeksen perspectief zijn. Onderstellen we nl. dat de puntenreeksen niet perspectief waren, dan zou men met behoud der punten A, B, C, D, E, F en G op de lijn GH (en dus met behoud der punten K_1, L_1, V en W) met behulp van de genoemde voorwaarde voor de perspectiviteit een punt H' zoo kunnen construeeren, dat de puntenreeksen K en L wel perspectief zijn; H' is dan het tweede snijpunt van VG met de kegelsnede door C, D, G en W, die de kegelsnede $ABCDW$ in C aanraakt. Nu zullen dus de 10 punten $A, B, C, D, E, F, G, K_1, L_1$ en H' op een C_3 liggen, die echter reeds door de 9 eerstgenoemde punten bepaald is [1]) en dus dezelfde is als de C_3 door de 10 punten $A, B, C, D, E, F, G, K_1, L_1$ en H. De lijn VG zou dan echter vier punten G, L_1, H en H' met deze C_3 gemeen hebben.

---

[1]) De C_3 is alleen dan door deze 9 punten niet bepaald als twee dier punten zoo samenvallen, dat hun verbindingslijn onbepaald is (b. v. G met E of L_1 met K_1). De 10 punten liggen dan op een C_3, terwijl men zich gemakkelijk overtuigt, dat de verwantschap tusschen K en L perspectief is.

We krijgen dus het volgende eenvoudige resultaat:

Liggen de tien punten $A, B, C, D, E, F, G, H, K_1$ en L_1 op een zelfde kubische kromme, dan zijn de puntenreeksen K en L perspectief, terwijl het centrum der perspectiviteit in het derde snijpunt U van K_1L_1 met de C_3 valt. De eigenlijke omhullende degenereert in het punt U en het snijpunt V van EF en GH. De eigenlijke meetkundige plaats bestaat uit de rechten AB en CD, de genoemde kubische kromme en de kegelsnede door A, B, C, D en de beide punten, waarin de rechte UV de C_3 buiten U nog snijdt.

Vallen E en G samen, dan ziet men weer onmiddellijk, dat aan de voorwaarde voldaan is. Het punt V komt dan in E te liggen, zoodat een der buiten U gelegen snijpunten van UV met de C_3 het punt E wordt; de genoemde kegelsnede is dan dus de kegelsnede $ABCDE$, die nu echter tot het oneigenlijke deel der meetkundige plaats behoort.

14. *Valt G met E en H met F samen,* dan zijn de puntenreeksen K en L collocaal met dubbelpunten in E en F. Het puntenpaar PP' op een willekeurige kegelsnede van den bundel $ABCD$ wordt nu steeds door dezelfde rechte EF ingesneden, die dus tot de eigenlijke meetkundige plaats behoort. Gaat de kegelsnede door E of F, dan vallen de beide involuties samen, zoodat de kegelsneden $ABCDE$ en $ABCDF$ tot de meetkundige plaats behooren maar tot het oneigenlijke deel. Verder behooren nog de rechten AB en CD tot de eigenlijke meetkundige plaats, *zoodat die uit de drie rechten AB, CD en EF bestaat.* Een eigenlijke omhullende is er nu niet meer, daar, als P en P' buiten de basispunten liggen, de verbindingslijn PP' langs AB, CD of EF valt.

In vergelijking met § 12 doet zich nu de bijzonderheid voor, dat U in F valt, de stralenbundel U tot het oneigenlijke deel der omhullende is overgegaan en de C_3 degenereert in de kegelsnede $ABCDF$, die oneigenlijk wordt, en de rechte EF.

Het geval van de kegelsneebundels $ABCD$, $ABEF$ en $CDEF$ kan met voordeel gebruikt worden om met behulp van het beginsel van het behoud van het aantal den graad der meetkundige plaats van P en P' en de klasse der omhullende van PP' voor het geval van willekeurig ten opzichte van elkaar gelegen kegelsneebundels te bepalen. Met dit eenvoudigste geval beginnend laat zich nl. gemakkelijk beredeneeren, dat PP' langs AB, CD of EF valt en dus de eigenlijke meetkundige plaats uit deze drie rechten bestaat en de eigenlijke omhullende ontbreekt. Het oneigenlijke deel der meetkundige plaats bestaat echter uit de zes kegelsneden $ABCDE$, $ABCDF$,

ABEFC, *ABEFD*, *CDEFA* en *CDEFB*, het oneigenlijke deel der omhullende uit de zes punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*. De totale meetkundige plaats is dus van den 15^{den} graad, de totale omhullende van de 6de klasse, zoodat bij willekeurige ligging der kegelsneebundels ditzelfde voor de eigenlijke meetkundige plaats en de eigenlijke omhullende geldt.

Sneek, 6 November 1906.

Wiskunde. — De Heer Schoute biedt namens den Heer F. Schuh eene mededeeling aan: „*Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier oppervlakkenbundels.*"

(Mede aangeboden door den Heer D. J. Korteweg).

1. Gegeven zijn vier oppervlakkenbundels (F_r), (F_s), (F_t) en (F_u) resp. van de graden r, s, t en u. De basiskrommen dier bundels kunnen gemeenschappelijke punten hebben of gedeeltelijk samenvallen, tengevolge waarvan het aantal buiten de basiskrommen gelegen snijpunten van drie willekeurige oppervlakken der bundels (F_s), (F_t) en (F_u) minder dan $s\,t\,u$ kan bedragen; dit aantal noemen we a, terwijl we het b noemen voor de bundels (F_r), (F_t) en (F_u), c voor de bundels (F_r), (F_s) en (F_u) en d voor de bundels (F_r), (F_s) en (F_t). We stellen ons nu de vraag:

Wat is de graad van het oppervlak gevormd door de puntenparen P en P', waardoor een oppervlak van ieder der vier bundels mogelijk is?

Liggen de punten P en P' buiten de vier basiskrommen, dan noemen we de door die punten gevormde meetkundige plaats de *eigenlijke meetkundige plaats M*, waarop natuurlijk nog wel krommen van punten P kunnen liggen, waarvoor het correspondeerende punt P' op een der basiskrommen ligt. Levert minstens één drietal bundels eenige snijpunten op, die voor alle oppervlakken dier bundels op een basiskromme gelegen zijn, dan is er een oppervlak, dat wel aan de vraag voldoet, maar zoodanig, dat als we P willekeurig op dit oppervlak aannemen het bijbehoorende punt P' op een der basiskrommen komt te liggen; dit oppervlak noemen we het *oneigenlijke deel* der meetkundige plaats, terwijl we beide oppervlakken te zamen de *totale meetkundige plaats* noemen.

2. Om den graad n der eigenlijke meetkundige plaats M te bepalen zoeken we de snijpunten met een willekeurige rechte l. Op l nemen we een willekeurig punt Q_{stu} aan en leggen door dat punt

oppervlakken F_s, F_t en F_u van de bundels (F_s), (F_t) en (F_u). Door ieder der $a-1$ buiten Q_{stu} en de basiskrommen gelegen snijpunten dier oppervlakken leggen we een F_r. Deze $a-1$ oppervlakken F_r snijden de rechte l te zamen in $(a-1)r$ punten Q_r, die we met het punt Q_{stu} laten correspondeeren. De coincidenties dezer correspondentie zijn: 1°. de punten Q_{rstu}, die vier oppervlakken bepalen die elkaar nog eens buiten de basiskrommen snijden, dus de n snijpunten met het oppervlak M, 2°. de snijpunten met het bij de bundels (F_s), (F_t) en (F_u) behoorende oppervlak R_{stu}, de meetkundige plaats der punten S, die drie oppervlakken bepalen, wier raakvlakken in S door één lijn gaan.

Om het aantal coincidenties te vinden, hebben we het aantal punten Q_{stu} te bepalen, die met een willekeurig gekozen punt Q_r van l correspondeeren. Daartoe nemen we op l een punt Q_{tu} willekeurig aan en leggen daardoor een F_t en een F_u. Door ieder der b buiten de basiskrommen gelegen snijpunten van deze oppervlakken met het door Q_r gaande oppervlak F_r leggen we een F_s, welke b oppervlakken F_s te zamen de lijn l in bs punten Q_s snijden, die we met Q_{tu} laten correspondeeren. Om het aantal punten Q_{tu} te vinden, die met een willekeurig punt Q_s van l correspondeeren, nemen we Q_u willekeurig op l aan, leggen door Q_s een F_s en door Q_u een F_u en door ieder der c snijpunten dier oppervlakken met F_r een F_t, waardoor we c oppervlakken F_t krijgen, die l in ct punten Q_t snijden; omgekeerd behooren bij Q_t du punten Q_u, zoodat we tusschen de punten Q_u en Q_t een (ct, du)-correspondentie krijgen, waarvan de $ct+du$ coincidenties de bij het punt Q_s behoorende punten Q_{tu} opleveren. Tusschen de punten Q_{tu} en Q_s bestaat dus een $(bs, ct+du)$-correspondentie. De coincidenties daarvan zijn de r snijpunten van l met het door Q_r gaande oppervlak F_r en de met Q_r correspondeerende punten Q_{stu}, waarvan het aantal dus $bs+ct+du-r$ bedraagt.

Tusschen de punten Q_{stu} en Q_r bestaat dus een $(ar-r, bs+ct+du-r)$-correspondentie met $ar+bs+ct+du-2r$ coincidenties. Om daaruit het aantal punten Q_{rstu} te vinden moet eerst de graad van het oppervlak R_{stu} bepaald worden.

Dit oppervlak kan beschouwd worden als het aanrakingsoppervlak van de oppervlakken van den bundel (F_s) met de beweeglijke snijkrommen C_{tu} van de oppervlakken der bundels (F_t) en (F_u) [1]. De vraag is dus:

---

[1]) We zullen dit oppervlak het aanrakingsoppervlak der drie bundels noemen. In een punt van dit aanrakingsoppervlak raken de oppervlakken der bundels elkaar wel niet aan, maar hebben daar toch een gemeenschappelijke raaklijn.

3. *Den graad van het aanrakingsoppervlak te bepalen van een tweevoudig oneindig stelsel van ruimtekrommen en een enkelvoudig oneindig stelsel van oppervlakken.*

Hierbij zullen we de beide stelsels eerst willekeurig onderstellen.

Om den graad van het aanrakingsoppervlak te bepalen zoeken we zijn snijpunten met een willekeurige rechte l. Daartoe beschouwen we de omhullende O_1 der ∞^2 raakvlakken van de krommen van het stelsel in hare snijpunten met l en de omhullende O_2 der ∞^1 raakvlakken van de oppervlakken van het stelsel in hunne snijpunten met l. De niet door l gaande gemeenschappelijke raakvlakken van beide omhullenden wijzen dan door hunne snijpunten met l de snijpunten van l met het aanrakingsoppervlak aan.

Om de klasse der omhullende O_1 (gevormd door de raakvlakken van een regelvlak met l als richtlijn) te bepalen, zoeken we de klasse van den kegel omhuld door de raakvlakken, die door een willekeurig punt Q van l gaan. Is nu het krommenstelsel van dien aard, dat er φ krommen door een willekeurig punt gaan en ψ een gegeven vlak in een punt van een gegeven rechte aanraken, dan omhullen de door Q gaande raakvlakken van O_1 de φ raaklijnen in Q der door Q gaande krommen van het stelsel en de ψ-maal tellende rechte l; immers ieder vlak door l is ψ-maal als raakvlak te beschouwen, daar er ψ krommen van het stelsel zijn, die l snijden en een in dit vlak gelegen raaklijn hebben. *De omhullende O_1 is dus van de klasse $\varphi + \psi$ en heeft l als ψ-voudige lijn* [1]).

Om de klasse der omhullende O_2 te bepalen, zoeken we het aantal harer raakvlakken door een willekeurig punt Q van l. Heeft nu het stelsel μ oppervlakken door een gegeven punt en ν oppervlakken, die een gegeven rechte aanraken, dan zijn de door Q gaande raakvlakken der omhullende de raakvlakken in Q aan de μ door Q gaande oppervlakken en de raakvlakken der ν oppervlakken, die l aanraken. *De omhullende O_2 is dus van de klasse $\mu + \nu$ met ν door l gaande raakvlakken.*

Beide omhullenden hebben derhalve $(\varphi+\psi)(\mu+\nu)$ gemeenschappelijke raakvlakken. Ieder der ν door l gaande raakvlakken van O_2 is echter een ψ-voudig raakvlak van O_1 en telt dus voor ψ gemeenschappelijke raakvlakken. Voor het aantal niet door l gaande gemeenschappelijke raakvlakken, dus het aantal snijpunten van l met het aanrakingsoppervlak, vindt men dus:

$$(\varphi + \psi)(\mu + \nu) - \psi\nu = \varphi\nu + \psi\mu + \varphi\mu ,$$

derhalve:

---

[1]) Het regelvlak als meetkundige plaats van punten heeft echter de lijn l als τ-voudige lijn.

Het aanrakingsoppervlak van een stelsel (φ, ψ) *van* ∞^2 *ruimtekrommen* [1]) *en een stelsel* (μ, ν) *van* ∞^1 *oppervlakken* [2]) *is van den graad* $\varphi\nu + \psi\mu + \varphi\mu$ [3]).

4. Om den graad van het aanrakingsoppervlak [4]) der stelsels (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) en (μ_3, ν_3) ieder van ∞^1 oppervlakken te bepalen, beschouwen we het stelsel (φ, ψ) der snijkrommen van de stelsels (μ_1, ν_1) en (μ_2, ν_2). Van deze snijkrommen gaan er $\mu_1\mu_2$ door een gegeven punt, dus $\varphi = \mu_1\mu_2$. De ψ punten, waar de snijkrommen een gegeven vlak in een punt van een gegeven rechte aanraken, zijn de snijpunten dier gegeven rechte met de aanrakingskromme der stelsels (μ_1, ν_1) [5]) en (μ_2, ν_2) van vlakke krommen, volgens welke het gegeven vlak de oppervlakkenstelsels (μ_1, ν_1) en (μ_2, ν_2) snijdt. Deze aanrakingskromme is van den graad $\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2$, dus:

$$\psi = \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2.$$

Het gezochte aanrakingsoppervlak is dus het aanrakingsoppervlak van een stelsel $(\mu_1\mu_2, \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2)$ van ∞^2 ruimtekrommen en een stelsel (μ_3, ν_3) van ∞^1 oppervlakken, zoodat we vinden:

Het aanrakingsoppervlak [4]) *van drie stelsels* (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) *en* (μ_3, ν_3) *van* ∞^1 *oppervlakken is van den graad*

$$\mu_2\mu_3\nu_1 + \mu_3\mu_1\nu_2 + \mu_1\mu_2\nu_3 + 2\mu_1\mu_2\mu_3.$$

Zijn nu de drie stelsels de bundels (F_s), (F_t) en (F_u), dan is:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1,$$

$$\nu_1 = 2(s-1) \quad , \quad \nu_2 = 2(t-1) \quad , \quad \nu_3 = 2(u-1).$$

Men heeft dus:

Het aanrakingsoppervlak F_{stu} *der drie oppervlakkenbundels* (F_s),

---

[1]) Stelsel met φ krommen door een gegeven punt en ψ krommen, die een gegeven lijn snijden en in het snijpunt een gegeven vlak door die lijn aanraken.

[2]) Stelsel met μ oppervlakken door een gegeven punt en ν oppervlakken, die een gegeven rechte aanraken.

[3]) Deze uitkomst is ook onmiddellijk af te leiden uit de SCHUBERT'sche formule

$$xp^2 = p'^3 \,.\, G + p'g'_e \,.\, p^2g_e + p'^3 \,.\, p^2g_e$$

(Kalkül der abzählenden Geometrie, formule 13 p. 292) voor het aantal gemeenschappelijke elementen met op een gegeven lijn gelegen punt van een stelsel Σ' van ∞^3 en een stelsel Σ van ∞^4 rechten met een punt er op. Nemen we voor Σ' de raaklijnen met raakpunt van het krommenstelsel (φ, ψ) en voor Σ de raaklijnen met raakpunt van het oppervlakkenstelsel (μ, ν), dan is

$$p'^3 = \varphi \quad , \quad p'g'_e = \psi \quad , \quad G = \nu \quad , \quad p^2g_e = \mu,$$

terwijl xp^2 de graad van het aanrakingsoppervlak is.

[4]) Meetkundige plaats der punten, waar de oppervlakken der drie stelsels een gemeenschappelijke raaklijn hebben.

[5]) Stelsel van ∞^1 krommen, waarvan er μ_1 door een gegeven punt gaan en ν_1 een gegeven rechte aanraken.

(F_t) en (F_u) *is van den graad*

$$2(s + t + u - 2).$$

5. Om nu tot de vraag terug te keeren, die tot de voorgaande beschouwingen aanleiding gaf, vinden we voor het aantal punten Q_{rstu} op de willekeurige rechte l, dit zijn de snijpunten van l met de eigenlijke meetkundige plaats M:

$$ar + bs + ct + du - 2r - 2(s + t + u - 2) =$$
$$= ar + bs + ct + du - 2(r + s + t + u) + 4.$$

We vinden dus:

De meetkundige plaats M der uit twee buiten de basiskrommen beweegbare punten bestaande paren, die op een oppervlak uit ieder der bundels (F_r), (F_s), (F_t) en (F_u) van de graden r, s, t en u gelegen zijn, is een oppervlak van den graad

$$ar + bs + ct + du - 2(r + s + t + u) + 4.$$

Hierin is a het aantal niet noodzakelijk op de basiskrommen gelegen snijpunten der bundels (F_s), (F_t) en (F_u), b het overeenkomstige aantal voor de bundels (F_r), (F_t) en (F_u), enz.

6. Hebben de bundels een willekeurige ligging ten opzichte van elkaar, dan is $a = stu$, enz., zoodat dan de graad der meetkundige plaats

$$4(rstu + 1) - 2(r + s + t + u)$$

wordt. Die graad wordt verlaagd als drie der basiskrommen een gemeenschappelijk punt of twee der basiskrommen een gemeenschappelijk gedeelte hebben, welke graadverlaging zich door afsplitsing verklaren laat zoolang de totale meetkundige plaats bepaald is, d.i. zoolang de vier basiskrommen geen gemeenschappelijk punt en geen drietal basiskrommen een gemeenschappelijk gedeelte hebben. Immers is A_{rstu} een gemeenschappelijk punt der vier basiskrommen, dan hebben de door een geheel willekeurig punt P gaande oppervlakken der vier bundels nog een tweede punt gemeen, nl. A_{rstu}; is B_{stu} een kromme, die deel uitmaakt van de basiskrommen B_s, B_t en B_u der bundels (F_s), (F_t) en (F_u), dan hebben de door een willekeurig punt P gaande oppervlakken der bundels bovendien nog de snijpunten van B_{stu} met het door P gaande oppervlak F_r gemeen; in beide gevallen behoort dus het willekeurige punt P tot de totale meetkundige plaats.

Hebben de basiskrommen B_s, B_t en B_u een gemeenschappelijk punt A_{stu}, dan wordt door dat punt a met 1 verminderd, terwijl het geen invloed op b, c en d heeft. De graad van M wordt er dus met

r door verlaagd, hetgeen zich onmiddellijk daardoor verklaart, *dat het door* A_{stu} *gaande oppervlak* F_r *zich van de meetkundige plaats afsplitst.*

Hebben de basiskrommen B_t en B_u een kromme B_{tu} gemeen, waarvan we eenvoudigheidshalve onderstellen, dat ze de basiskrommen B_r en B_s niet snijdt, dan heeft deze B_{tu} geen invloed op c en d, terwijl a met sm en b met rm verlaagd wordt, waarin m den graad der kromme B_{tu} voorstelt; immers bij drie willekeurige oppervlakken F_s, F_t en F_u liggen steeds sm snijpunten op B_{tu}. De graad van M wordt dus door B_{tu} met $2rsm$ verlaagd. Dit is te verklaren doordat *de meetkundige plaats der snijkrommen* C_{rs} *van oppervlakken* F_r *en* F_s, *die door een zelfde punt van* B_{tu} *gaan*[1]), *zich van de meetkundige plaats van* P *en* P' *afsplitst.* Dat de meetkundige plaats dier snijkrommen werkelijk van den graad $2rsm$ is, blijkt gemakkelijk uit de snijpunten met een willekeurige rechte l. Door een willekeurig punt Q_r van l kan men een F_r brengen, die B_{tu} in rm punten snijdt; door ieder dier snijpunten brengen we een F_s, welke rm oppervlakken F_s de rechte l in rsm punten Q_s snijden. Met Q_r correspondeeren dus rsm punten Q_s en omgekeerd. De $2rsm$ coincidenties zijn de snijpunten van l met de meetkundige plaats der snijkrommen C_{rs}.

7. De basiskrommen B_r, B_s, B en B_u der bundels zijn meervoudige krommen van het oppervlak M. Is A_r een punt van B_r, maar geen punt der overige basiskrommen, dan is A_r een $(a-1)$-voudig punt van M. Immers de door A_r gaande oppervlakken F_s, F_t en F_u snijden elkaar buiten de basiskrommen in $a-1$ punten, waarvan ieder te zamen met A_r een puntenpaar oplevert, dat aan de vraag voldoet. Ieder punt van B_r is dus $(a-1)$-voudig punt, m. a. w. B_r *is een* $(a-1)$*-voudige kromme van het oppervlak* M.

Zij A_{rs} een snijpunt der basiskrommen B_r en B_s, maar geen punt van B_t en B_u. Een willekeurig punt P der snijkromme C_{tu} van de door A_{rs} gaande oppervlakken F_t en F_u levert nu te zamen met A_{rs} een puntenpaar PP', dat op eigenlijke wijze aan de vraag voldoet, daar A_{rs} voor ieder drietal bundels een buiten de basiskrommen beweegbaar snijpunt is. Laat men P de kromme C_{tu} doorloopen, dan beschrijft de raaklijn l_{rs} in A_{rs} aan de snijkromme der door P gaande oppervlakken F_r en F_s den raakkegel van M in het kegelpunt A_{rs}. De raaklijnen m_r en m_s in A_{rs} aan B_r en B_s zijn $(a-1)$- resp. $(b-1)$-voudige rechten van den raakkegel. Deze kegel wordt

[1]) Snijdt B_{tu} de kromme B_s in een punt A_{stu}, dan scheidt het door A_{stu} gaande oppervlak F_r zich van de meetkundige plaats der snijkrommen C_{rs} af.

door het vlak door m_r en m_s alleen volgens de $(a-1)$-maal tellende lijn m_r en de $(b-1)$-maal tellende lijn m_s gesneden, daar een andere in dit vlak gelegen lijn l_{rs} twee elkaar in A_{rs} rakende oppervlakken F_r en F_s zou bepalen, wier snijkromme de kromme C_{tu} niet snijdt. *De raakkegel van M in A_{rs} is dus van den graad* $a+b-2$ [1]).

Zij $A_{rs}^{(1)}$ een punt van een gemeenschappelijk gedeelte B_{rs} der basiskrommen B_r en B_s, maar geen punt van B_t en B_u. Men krijgt een puntenpaar PP' met in $A_{rs}^{(1)}$ vallend punt P', als de oppervlakken F_r en F_s in $A_{rs}^{(1)}$ een gemeenschappelijk raakvlak V_{rs} hebben en door een zelfde punt P van de snijkromme C_{tu} der door $A_{rs}^{(1)}$ gaande oppervlakken F_t en F_u gaan. Laat men P de kromme C_{tu} doorloopen, dan wordt daardoor tusschen de vlakken V_r en V_s, die in $A_{rs}^{(1)}$ aan de door P gaande oppervlakken F_r en F_s raken, een correspondentie vastgelegd, waarbij met V_r $b-1$ vlakken V_s en met V_s $a-1$ vlakken V_r overeenkomen. Een der $a+b-2$ coincidentievlakken is het vlak door de raaklijnen in $A_{rs}^{(1)}$ aan B_{rs} en C_{tu}; dit vlak levert geen vlak V_{rs}. De overige $a+b-3$ coincidentievlakken zijn vlakken V_{rs} en wijzen de raakvlakken in $A_{rs}^{(1)}$ aan het oppervlak M aan. *B_{rs} is dus een $(a+b-3)$-voudige kromme van M.*

8. Beschouwen we vervolgens een gemeenschappelijk punt A_{rst} der basiskrommen B_r, B_s en B_t. Men krijgt een puntenpaar PP' met in A_{rst} vallend punt P', als de raakvlakken in A_{rst} aan F_r, F_s en F_t door één lijn l_{rst} gaan en deze oppervlakken elkaar nog eens in een punt P van het door A_{rst} gaande oppervlak F_u snijden. Er zijn ∞^1 zulke lijnen l_{rst}, die den raakkegel van M in het punt A_{rst} vormen. De raaklijnen m_r, m_s en m_t in A_{rst} aan B_r, B_s en B_t zijn $(a-1)$-, $(b-1)$- en $(c-1)$-voudige rechten van dien kegel. Het vlak door m_r en m_s geeft dus $a+b-2$ in m_r en m_s vallende snijlijnen met den kegel. Bovendien liggen er nog $c-2$ andere lijnen l_{rst} in dit vlak. Immers de aan dit vlak rakende oppervlakken F_r en F_s snijden F_u buiten de basiskrommen in $c-2$ punten; de door die punten gaande oppervlakken F_t snijden het vlak door m_r en m_s

[1]) De graad van dezen kegel kan ook gevonden worden uit het aantal snijlijnen met een willekeurig door A_{rs} gaand vlak ε. Zijn l_r en l_s de snijlijnen van ε met de raakvlakken in A_{rs} aan de door P gaande oppervlakken F_r en F_s, dan correspondeeren met l_r $b-1$ rechten l_s en met l_s $a-1$ rechten l_r, zoodat in het vlak ε $a+b-2$ rechten l_{rs} liggen.

volgens krommen, wier raaklijnen in A_{rst} de bedoelde lijnen l_{rst} zijn. *De raakkegel van M in A_{rst} is dus van den graad $a+b+c-4$* [1]).

Een snijpunt $A^{(1)}_{rst}$ van B_r met een gemeenschappelijk gedeelte B_{st} der basiskrommen B en B_t is een kegelpunt van M, waarvan de raakkegel evenals in het vorige geval door ∞^1 lijnen l_{rst} gevormd wordt. De raaklijnen m_r en m_{st} in $A^{(1)}_{rst}$ aan B_r en B_{st} zijn $(a-1)$- en $(b+c-3)$-voudige lijnen van dien kegel. Daar in het vlak door m_r en m_{st} geen andere lijnen l_{rst} gelegen zijn, zoo blijkt, *dat de raakkegel van M in $A^{(1)}_{rst}$ eveneens van den graad $a+b+c-4$ is* [1]).

Zij $A^{(2)}_{rst}$ een punt van een gemeenschappelijk gedeelte B_{rst} der basiskrommen B_r, B_s en B_t. Het punt P' van het puntenpaar PP' valt in $A^{(2)}_{rst}$, als de oppervlakken F_r, F_s en F_t in $A^{(2)}_{rst}$ hetzelfde raakvlak V_{rst} hebben en elkaar in nog een punt P var het door $A^{(2)}_{rst}$ gaande oppervlak F_u snijden. Brengen we nu een F en een F_s aan, die in $A^{(2)}_{rst}$ hetzelfde raakvlak V_{rs} hebben, en door ieder der $c-1$ buiten de basiskrommen gelegen snijpunten van F_r, F_s en F_u een F_t, waarvan we het raakvlak in $A^{(2)}_{rst}$ V_t noemen, dan correspondeeren met V_{rs} $c-1$ vlakken V_t en met V_t $a+b-1$ vlakken V_{rs} (daar bij gegeven V_t tusschen V_r en V een (b, a)-correspondentie bestaat, waarvan V_t een der coincidentievlakken is). Onder de $a+b+c-2$ coincidentievlakken V_{rs} V_t zijn er echter *drie*, die geen vlak V_{rst} leveren, nl. de vlakken V_{rs}, waarvoor de bijbehoorende oppervlakken F_r en F_s met F_u drie in $A^{(2)}_{rst}$ samenvallende snijpunten opleveren. Daarvoor is noodig, dat F_u in $A^{(2)}_{rst}$ aan de beweeglijke doorsnede van F_r en F_s raakt. Nu vormen de raaklijnen dier doorsneden voor alle elkaar in $A^{(2)}_{rst}$ rakende oppervlakken F_r en F_s een kubischen kegel, die de raaklijn m_{rst} aan B_{rst} in het punt $A^{(2)}_{rst}$ tot dubbellijn heeft [2]). Deze kegel wordt door het raakvlak

---

[1]) Deze graad kan ook bepaald worden uit het aantal lijnen l_{rst} in een willekeurig door A_{rst} gaand vlak ε. In dit vlak krijgt men een $(c-1, a+b-2)$-correspondentie tusschen lijnen l_{rs} en lijnen l_t, waarvan echter de snijlijn van ε met het raakvlak in A_{rst} aan F_u coincidentiestraal, maar geen lijn l_{rst} is.

[2]) Dit blijkt direct als men voor (F_r) een vlakkenbundel neemt en voor (F_s) een bundel kwadratische oppervlakken, alle gaande door den drager B_r van den vlakkenbundel. De beschouwde kegel wordt dan de kegel der door een gegeven punt van B_r gaande beschrijvende lijnen van de kwadratische oppervlakken. Men overtuigt zich verder gemakkelijk, dat hetzelfde resultaat ook voor willekeurige oppervlakkenbundels geldt.

in $A^{(2)}_{rst}$ aan F_u volgens drie lijnen gesneden, die met m_{rst} verbonden vlakken V_{rs} opleveren, die wel coincidentievlakken $V_{rs}\,V_t$, maar geen vlakken V_{rst} zijn. Er zijn dus $a+b+c-5$ vlakken V_{rst}, die de raakvlakken van M in het punt $A^{(2)}_{rst}$ zijn, m. a. w. B_{rst} *is een* $(a+b+c-5)$*-voudige kromme van het oppervlak* M.

9. Vervolgens beschouwen we een gemeenschappelijk punt A_{rstu} der vier basiskrommen. Men krijgt een puntenpaar PP' met in A_{rstu} vallend punt P', als F_r, F_s, F_t en F_u in A_{rstu} een gemeenschappelijke raaklijn l_{rstu} hebben en nog eens alle door een zelfde punt P gaan. De ∞^1 lijnen l_{rstu} vormen den raakkegel van M in A_{rstu}. Om het aantal lijnen l_{rstu} in een willekeurig door A_{rstu} gaand vlak ε te bepalen, nemen we in dit vlak een willekeurige lijn l_{rst} door A_{rstu} en brengen door de $d-1$ buiten de basiskrommen gelegen snijpunten der aan l_{rst} rakende oppervlakken F_r, F_s en F_t oppervlakken F_u aan, wier raakvlakken in A_{rstu} het vlak ε volgens lijnen snijden, die we l_u noemen. Met l_{rst} correspondeeren nu $d-1$ lijnen l_u en met l_u $a+b+c-2$ lijnen l_{rst}, daar bij gegeven l_u tusschen l_{rs} en l een $(c, a+b)$-correspondentie bestaat, waarvan l_u en de snijlijn van ε met het vlak door de raaklijnen in A_{rstu} aan B_r en B_s coincidentiestralen maar geen lijnen l_{rst} zijn. Er zijn dus $a+b+c+d-3$ coincidentiestralen $l_{rst}\,l_u$, waarvan er echter *drie* geen lijnen l_{rstu} zijn. De gemeenschappelijke raaklijnen in A_{rstu} der oppervlakken F_r, F_s en F_t, die drie in A_{rstu} vallende snijpunten bezitten en waarbij dus de snijkromme van twee dier oppervlakken aan het derde een aanraking van de 2de orde vertoont, vormen nl. een kubischen kegel [1]), waarvan de snijlijnen met ε coincidentiestralen maar geen lijnen l_{rstu} zijn. In ε liggen dus $a+b+c+d-6$ lijnen l_{rstu}, m. a. w. *de raakkegel van* M *in* A_{rstu} *is van den graad* $a+b+c+d-6$ [2]).

[1]) Dit blijkt weer door voor (F_r) en (F_s) vlakkenbundels met snijdende dragers B_r en B_s te nemen en voor (F_t) een bundel kwadratische oppervlakken gaande door een lijn, die het snijpunt S van B_r en B_s bevat. De snijlijn der vlakken F_r en F_s vertoont alleen dan aan F_t een aanraking van de 2de orde als die snijlijn geheel op F_t ligt, zoodat de beschouwde kegel weer de kegel der door S gaande beschrijvende lijnen van de kwadratische oppervlakken wordt.

[2]) Die graad kan ook gevonden worden uit de snijlijnen met het vlak V_{rs} door de raaklijnen m_r en m_s in A_{rstu} aan B_r en B_s. Die snijlijnen zijn: de $(a-1)$-maal lijn m_r, de $(b-1)$-maal tellende lijn m_s en $c+d-4$ andere lijnen. Dit laatste aantal vindt men door in het vlak V_{rs} door A_{rstu} een willekeurige lijn l_t te trekken. Het aan l_t rakende oppervlak F_t snijdt de aan V_{rs} rakende oppervlakken F_r en F_s buiten de basiskrommen in $d-1$ punten, waardoor we oppervlakken F_u aanbrengen, wier raakvlakken in A_{rstu} het vlak V_{rs} volgens lijnen snijden, die we

De voorgaande beschouwingen gaan onveranderd door voor een punt $A^{(1)}_{rstu}$, dat op de basiskrommen B_r en B_s en het gemeenschappelijke gedeelte B_{tu} der basiskrommen B_t en B_u ligt [3]).

In een snijpunt $A^{(2)}_{rstu}$ van B_{rs} en B_{tu} is de raakkegel eveneens van den graad $a+b+c+d-6$, daar die kegel de raaklijnen m_{rs} en m_{tu} aan B_{rs} en B_{tu} tot $(a+b-3)$- en $(c+d-3)$-voudige rechten heeft, terwijl er in het vlak door m_{rs} en m_{tu} geen andere rechten l_{rstu} liggen.

Ook een snijpunt $A^{(3)}_{rstu}$ van B_r en B_{stu} is een $(a+b+c+d-6)$-voudig punt van M, daar m_r en m_{stu} $(a-1)$- en $(b+c+d-5)$-voudige lijnen van den raakkegel zijn en de eenige snijlijnen van dien kegel met het vlak door m_r en m_{stu}.

Is ten slotte $A^{(4)}_{rstu}$ een punt van een gemeenschappelijk deel B_{rstu} der vier basiskrommen, dan valt het punt P' van het puntenpaar PP' in $A^{(4)}_{rstu}$ als de oppervlakken F_r, F_s, F_t en F_u in $A^{(4)}_{rstu}$ hetzelfde raakvlak V_{rstu} hebben en alle door een zelfde punt P gaan. Nemen we nu een willekeurig vlak V_{rst} aan, gaande door de raaklijn m_{rstu} in $A^{(4)}_{rstu}$ aan B_{rstu}. De aan dit vlak in $A^{(4)}_{rstu}$ rakende oppervlakken F_r, F_s en F_t snijden elkaar in $d-1$ punten P, waardoor we oppervlakken F_u aanbrengen, wier raakvlakken in $A^{(4)}_{rstu}$ we V_u noemen. Zoo krijgt men een correspondentie, waarbij met V_{rst} $d-1$ vlakken V_u en omgekeerd met V_u $a+b+c-1$ vlakken V_{rst} correspondeeren; immers bij gegeven V_u heeft men tusschen V_{rs} en V_t een $(c\,,\,a+b)$-correspondentie, waarvan V_u coincidentievlak, maar geen vlak V_{rst} is. Er zijn dus $a+b+c+d-2$ coincidentievlakken $V_{rst}V_u$, waarvan er echter *vijf* geen vlakken V_{rstu} zijn. Dit zijn nl. de raakvlakken der oppervlakken F_r, F_s en F_t, waarvan nog een

---

l_u noemen. Tusschen de lijnen l_t en l_u heeft men nu een $(d-1,\ c-1)$-correspondentie, waarvan de dubbelpuntsraaklijnen in A_{rstu} der doorsnede van de aan V_{rs} rakende oppervlakken F_r en F_s coincidentiestralen zijn. De overige $c+d-4$ coincidentiestralen zijn lijnen l_{rstu}.

[3]) Dat de raakkegel in $A^{(1)}_{rstu}$ van den graad $a+b+c+d-6$ is, blijkt ook gemakkelijk uit de snijlijnen met het vlak V_{stu} door de raaklijnen m_s en m_{tu} aan B_s en B_{tu}. De lijn m_s telt voor $b-1$, de lijn m_{tu} voor $c+d-3$ snijlijnen. Verder snijden de aan V_{stu} rakende oppervlakken F_s, F_t en F_u elkaar buiten de basiskrommen in $a-2$ punten; door die punten brengen we oppervlakken F_r, wier raakvlakken in $A^{(1)}_{rstu}$ het vlak V_{stu} volgens lijnen snijden, die op den raakkegel gelegen zijn.

snijpunt meer in $A^{(4)}_{rstu}$ valt, hetgeen vijfmaal gebeurt [1]). Er blijven dus $a+b+c+d-7$ vlakken V_{rstu} over, die de raakvlakken van M in het punt $A^{(4)}_{rstu}$ zijn, *zoodat* B_{rstu} *een* $(a+b+c+d-7)$*-voudige kromme van* M *is.*

10. We vinden dus:

Van de eigenlijke meetkundige plaats M *der puntenparen* P *en* P' *is de basiskromme* B_r *van den bundel* (F_r) *een* $(a-1)$*-voudige, het gemeenschappelijke stuk* B_{rs} *der basiskrommen* B_r *en* B_s *een* $(a+b-3)$*-voudige, het gemeenschappelijke stuk* B_{rst} *der basiskrommen* B_r, B_s *en* B_t *een* $(a+b+c-5)$*-voudige en het gemeenschappelijke stuk* B_{rstu} *der vier basiskrommen een* $(a+b+c+d-7)$*-voudige kromme. De snijpunten der basiskrommen zijn kegelpunten van* M *en wel is een snijpunt van* B_r *en* B_s *een* $(a+b-2)$*-voudig punt, een snijpunt van* B_r, B_s *en* B_t *of van* B_r *en* B_{st} *een* $(a+b+c-4)$*-voudig punt en een snijpunt van* B_r, B_s, B_t *en* B_u *of van* B_r, B_s *en* B_{tu} *of van* B_{rs} *en* B_{tu} *of van* B_r *en* B_{stu} *een* $(a+b+c+d-6)$*-voudig punt* [2]).

11. De basiskrommen der bundels zijn niet de eenige bijzondere krommen van het oppervlak M. Er zijn nl. ∞^1 puntentripels, die op een oppervlak van ieder der bundels liggen. Deze puntentripels vormen een dubbelkromme van M. Is P, P', P' zulk een tripel en zijn $P1$ en $P2$ de door P gaande bladen van het oppervlak, dan correspondeeren daarmede de bladen $P'1$ en $P''2$. Door P' gaat dan nog een blad $P'3$ en door P'' een blad $P''3$, welke bladen onderling correspondeeren. Buiten de basiskrommen is het puntenpaar verschuifbaar over de bladen $P1$, $P'1$, over de bladen $P2$, $P''2$

[1]) Dit aantal *vijf* vindt men aldus. De raaklijnen der beweeglijke doorsneden van elkaar in $A^{(4)}_{rstu}$ rakende oppervlakken F_s en F_t vormen een kubischen kegel, die de raaklijn m_{rstu} aan B_{rstu} tot dubbellijn heeft. Zulk een doorsnede vertoont aan een oppervlak F_r een aanraking van de 2de orde als ze aan de beweeglijke doorsnede van F_r en F_t raakt, dus als haar raaklijn in $A^{(4)}_{rstu}$ ligt op den kubischen kegel behoorend bij de bundels (F_r) en (F_t). Daar deze laatste kegel eveneens m_{rtu} tot dubbellijn heeft, hebben beide kegels $9-4=5$ van m_{rstu} verschillende snijlijnen, die met m_{rstu} verbonden de bedoelde vijf vlakken opleveren.

[2]) Is de totale meetkundige plaats niet onbepaald, d. w. z. is er geen aan drie basiskrommen gemeenschappelijk stuk en geen aan de vier basiskrommen gemeenschappelijk punt, dan is B_r van die totale meetkundige plaats een $(stu-1)$-voudige en B_{rs} een $(stu+rtu-2)$-voudige kromme, terwijl een snijpunt van B_r en B_s een $(stu+rtu-2)$-voudig en een snijpunt van B_r, B_s en B_t of van B_r en B_{st} een $(stu+rtu+rsu-3)$-voudig punt is.

en over de bladen $P'3$, $P''3$; op de basiskromme voegt zich dan aan het paar nog een derde punt toe.

Verder is er nog een eindig aantal puntquadrupels, waardoor een oppervlak uit ieder der bundels gaat. Door de punten P, P', P'' en P''' van zulk een quadrupel gaan drie bladen van het oppervlak M en drie takken der dubbelkromme. De 12 door die 4 punten gaande takken der dubbelkromme kunnen we noemen $P1$, $P2$, $P3$, $P'1$, $P'2$ $P'4$, $P''1$, $P''3$, $P''4$, $P'''2$, $P'''3$, $P'''4$, zoodanig, dat het puntentripel verschuifbaar is langs de takken $P1$, $P'1$, $P''1$, langs $P2$, $P'2$, $P'''2$, langs $P3$, $P''3$, $P'''3$ en langs $P'4$, $P''4$, $P'''4$. Noemen we het blad van M, dat door $P1$ en $P2$ gaat, $P12$ enz., dan zijn correspondeerende bladen (d. w. z. bladen, waarlangs het puntenpaar buiten de dubbelkromme verschuifbaar is) $P12$ en $P'12$, $P13$ en $P''13$, enz.

Wiskunde. — De Heer Schoute biedt eene mededeeling aan van den Heer W. A. Wythoff: „*De regel van Neper in de ruimte van vier afmetingen.*"

(Mede aangeboden door den Heer D. J. Korteweg).

1. De bekende „regel van Neper" kan in beginsel als volgt worden geformuleerd:

Beschouwt men als „elementen" van een boldriehoek $A_1 A_2 A_3$, rechthoekig in A_2, de hypotenusa a_2, de beide scheeve hoeken A_1 en A_3 en de complementen der rechthoekszijden $\frac{1}{2}\pi - a_1$ en $\frac{1}{2}\pi - a_3$ [1]), zoo kan op elke voor den rechthoekigen boldriehoek in het algemeen geldende formule de cyclische verwisseling

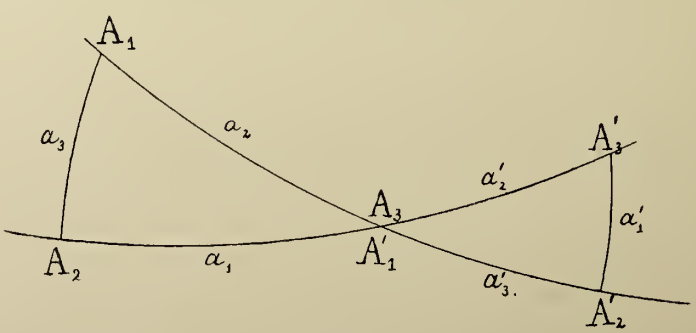


Fig. 1.

[1]) Dit zijn de complementen van wat Neper zelf de „quinque circulares partes" van den rechthoekigen boldriehoek noemt. Zie N. L. W. A. Gravelaar, John Napier's werken, Verh. K. A. v. W., Eerste sectie, deel VI, N°. 6, bl. 40.

$$(A_3, \quad \tfrac{1}{2}\pi - a_3, \quad a_2, \quad \tfrac{1}{2}\pi - a_1, \quad A_1)$$

worden toegepast zonder dat zij ophoudt geldig te zijn.

Wij bewijzen dezen regel door de zijden $A_1 A_3$ en $A_2 A_3$, die wij ons (Fig. 1) gemakshalve $< \frac{1}{2}\pi$ kunnen denken, door het hoekpunt $A_3 = A'_1$ te verlengen met stukken $A'_1 A'_2$ en $A'_1 A'_3$ zoo dat $A_1 A'_2 = A_2 A'_3 = \frac{1}{2}\pi$. De boldriehoek $A'_1 A'_2 A'_3$ blijkt dan weder rechthoekig, en wel in A'_2, terwijl voorts tusschen de elementen van beide boldriehoeken de volgende betrekkingen blijken te bestaan:

$$A'_3 = \tfrac{1}{2}\pi - a_3 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\pi - a'_3 = a_2 \quad ; \quad a'_2 = \tfrac{1}{2}\pi - a_1 ;$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - a'_1 = A_1 \quad ; \quad A'_1 = A_3 .$$

Hieruit blijkt, dat op de elementen van elken rechthoekigen boldriehoek de genoemde cyclische verwisseling kan worden toegepast, zonder dat zij ophouden de elementen van een mogelijken rechthoekigen boldriehoek te zijn, waaruit verder de regel van NEPER onmiddellijk volgt.

Den hier gevolgden gedachtengang zal men in het hier volgende geheel terugvinden.

2. Een hypersphaerisch viervlak zal ik *dubbelrechthoekig* noemen, indien twee overstaande ribben er van elk loodrecht op een der zijvlakken staan.

De letters A_1, A_2, A_3 en A_4 denk ik mij zoo bij de hoekpunten van het viervlak geplaatst, dat $A_1 A_2$ loodrecht op het zijvlak $A_2 A_3 A_4$ en $A_3 A_4$ loodrecht op het zijvlak $A_1 A_2 A_3$ staat.

Tot het dubbelrechthoekig zijn van het viervlak blijkt dan noodig en voldoende, dat de standhoeken aan de ribben $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ en $A_2 A_3$ recht zijn: [1])

$$\alpha_{24} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \tfrac{1}{2}\pi ;$$

waaruit dan verder volgt:

$$A_{23} = A_{24} = A_{32} = A_{31} = \tfrac{1}{2}\pi ,$$
$$A_{21} = \alpha_{34} ,$$
$$A_{34} = \alpha_{12} .$$

Tellen wij de rechte elementen niet mede, en rekenen wij de aan

---

[1]) De hier gebruikte teekens ontleen ik aan Prof. Dr. P. H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie, Eerste deel, bl. 267, Sammlung SCHUBERT XXXV, Leipzig, G. J. GÖSCHEN, 1902.

Ik versta dus onder

a_{12} de ribbe $A_1 A_2$;

α_{12} den standhoek gevormd door de zijvlakken tegenover de hoekpunten A_1 en A_2 gelegen, of wel den standhoek aan de ribbe $A_3 A_4$;

A_{12} den zijvlakshoek die A_1 tot hoekpunt heeft en in het zijvlak tegenover A_2 ligt, of wel den hoek $A_3 A_1 A_4$.

elkaar gelijke elk slechts éénmaal, dan heeft het dubbelrechthoekige hypersphaerische viervlak 15 elementen, nl. a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, α_{12}, α_{23}, α_{34}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{41}, A_{42}, A_{43}.

3. Wij vormen nu, uitgaande van een dubbelrechthoekig hypersphaerisch viervlak $A_1A_2A_3A_4$, waarvan wij ons de ribben alle $<\frac{1}{2}\pi$ denken, een tweede hypersphaerisch viervlak (Fig. 2) door de in $A_4 = A'_1$ uitkomende ribben door dit hoekpunt heen te verlengen en wel A_1A_4 met een stuk $A'_1A'_2$, A_2A_4 met $A'_1A'_3$ en A_3A_4 met $A'_1A'_4$, zoo dat $A_1A'_2 = A_2A'_3 = A_3A'_4 = \frac{1}{2}\pi$.

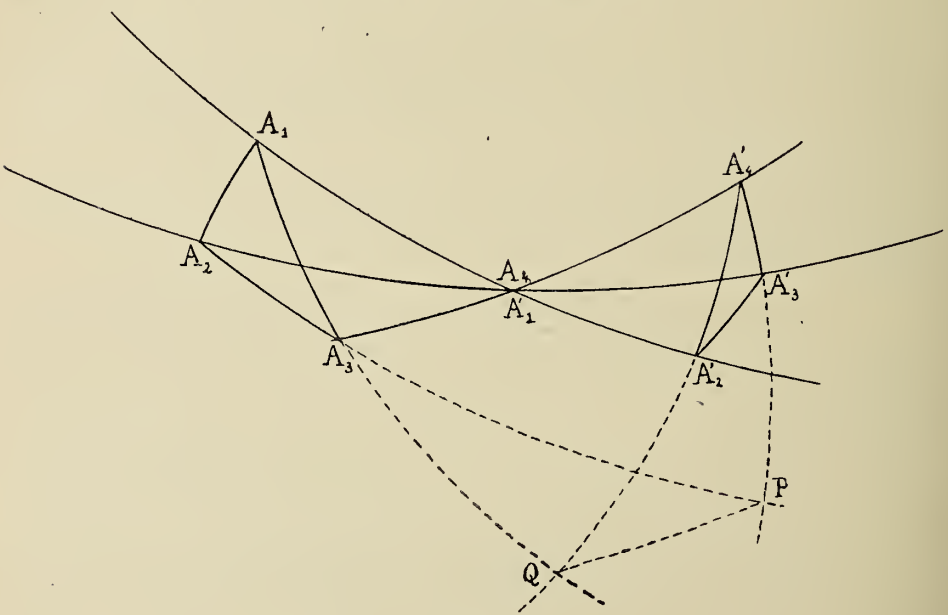


Fig. 2.

Door zeer eenvoudige meetkundige beschouwingen vinden wij, dat het viervlak $A'_1A'_2A'_3A'_4$ weder dubbelrechthoekig is, dat nl. $A'_1A'_2$ loodrecht op $A'_2A'_3A'_4$ en $A'_3A'_4$ loodrecht op $A'_1A'_2A'_3$ staat, en blijken verder de volgende betrekkingen te bestaan tusschen de elementen der beide viervlakken:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\pi - a'_{12} &= a_{14}\ , \\
a'_{14} &= \tfrac{1}{2}\pi - a_{34}\ , \\
\tfrac{1}{2}\pi - a'_{34} &= \alpha_{34}\ , \\
\alpha'_{34} &= \alpha_{23}\ , \\
\alpha'_{23} &= \alpha_{12}\ , \\
\alpha'_{12} &= \tfrac{1}{2}\pi - a_{12}\ ;
\end{aligned}$$

$$A'_{14} = A_{43} \text{ , of wel } (\tfrac{1}{2}\pi - A'_{14}) + A_{43} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ,}$$
$$A'_{43} + a_{13} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ,}$$
$$a'_{13} + a_{24} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ,}$$
$$a'_{24} + A_{12} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ,}$$
$$A'_{12} = A_{41} \text{ , of wel } A'_{12} + (\tfrac{1}{2}\pi - A_{41}) = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ,}$$
$$A'_{41} + A_{14} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ [1]), of wel } (\tfrac{1}{2}\pi - A'_{41}) + (\tfrac{1}{2}\pi - A_{14}) = \tfrac{1}{2}\pi \text{ ;}$$

$$A'_{42} = \tfrac{1}{2}\pi - a_{23} \text{ ,}$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - a'_{23} = A_{13} \text{ ,}$$
$$A'_{13} = A_{42} \text{ .}$$

4. Beschouwen wij dus in plaats van a_{12} , a_{34} , A_{14} , A_{41} en a_{23} hun complementen als elementen van het viervlak, zoo zijn de elementen van het dubbelrechthoekige hypersphaerische viervlak te splitsen in drie cycli, twee van 6 en een van 3 elementen, nl.:

1^0. $(\tfrac{1}{2}\pi - a_{12}$, a_{14} , $\tfrac{1}{2}\pi - a_{34}$, a_{34} , a_{23} , $a_{12})$,
2^0. $(\tfrac{1}{2}\pi - A_{14}$, A_{43} , a_{13} , a_{24} , A_{12} , $\tfrac{1}{2}\pi - A_{41})$,
3^0. $(A_{42}$, $\tfrac{1}{2}\pi - a_{23}$, $A_{13})$,

zoo dat het mogelijk is de elementen van elken cyclus alle gelijktijdig een cyclische verwisseling te doen ondergaan, mits daarna die van den tweeden cyclus elk door zijn complement vervangende [2]), zonder dat deze elementen ophouden de elementen van een mogelijk dubbelrechthoekig hypersphaerisch viervlak te zijn.

Deze zelfde gelijktijdige veranderingen mogen dus worden toegepast op elke voor de elementen van het dubbelrechthoekige hypersphaerische viervlak in het algemeen geldende formule.

5. Passen wij de in § 1 beschreven constructie op den nieuwgevormden boldriehoek weder toe, enz., dan vinden wij een gesloten reeks van vijf boldriehoeken, waarvan de hypotenusae een bolvijfhoek vormen.

De zijden van deze vijf boldriehoeken zijn deelen van vijf groote cirkels op den bol, nl. de cirkels waarvan de drie zijden van den oorspronkelijken boldriehoek deel uitmaken, en de beide poolcirkels

---

[1]) Bij het bewijs hiervan bedenke men, dat $A'_4 A'_3$ en $A_2 A_3$ op een bol liggen en dus elkaar in een punt P, en evenzoo $A'_4 A'_2$ en $A_1 A_3$ elkaar in een punt Q snijden.

[2]) Schrijft men den tweeden cyclus

$$(\tfrac{1}{2}\pi - A_{14}\text{ , }\tfrac{1}{2}\pi - A_{43}\text{ , }a_{13}\text{ , }\tfrac{1}{2}\pi - a_{24}\text{ , }A_{12}\text{, }A_{41})$$

of wel

$$(A_{14}\text{ , }A_{43}\text{ , }\tfrac{1}{2}\pi - a_{13}\text{ , }a_{24}\text{ , }\tfrac{1}{2}\pi - A_{12}\text{ , }\tfrac{1}{2}\pi - A_{41})\text{,}$$

zoo is geen vervanging der elementen door hun complementen noodig, doch heeft de cyclus zijn symmetrie ten opzichte van het viervlak verloren.

van de hoekpunten zijner scheeve hoeken. Deze vijf groote cirkels vormen echter nog een tweede dergelijke reeks van vijf boldriehoeken, nl. die der tegendriehoeken van de eerstgenoemde reeks.

6. Evenzoo kunnen wij langs den in § 3 aangegeven weg uit een dubbelrechthoekig hypersphaerisch viervlak een reeks van zulke viervlakken afleiden, waarvan de zijvlakken alle tot zes bollen behooren, nl. de bollen waarvan de zijvlakken van het oorspronkelijke viervlak deel uitmaken, en de poolbollen der punten A_1 en A_4.

Noemen wij B_1 den poolbol van A_1, B_2 dien van A_4, B_3 den bol $A_1 A_2 A_3$, B_4 den bol $A_4 A_1 A_2$, B_5 den bol $A_3 A_4 A_1$ en B_6 den bol $A_2 A_3 A_4$.

Elk dezer bollen verdeelt de hyperspheer in twee helften, waarvan ik die waartoe het oorspronkelijke viervlak behoort met +, de andere met — zal aanwijzen. Het volgende lijstje geeft dan aan, aan welke zijde van elk der zes bollen de opeenvolgende viervlakken I, II, enz. gelegen zijn, en door welke zij begrensd worden. Voor de niet begrenzende bollen is het teeken tusschen haakjes geplaatst.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
I	(+)	(+)	+	+	+	+
II	+	(+)	(+)	—	—	—
III	—	+	(+)	(—)	+	+
IV	+	—	+	(—)	(+)	—
V	—	+	—	—	(+)	(—)
VI	(—)	—	+	+	+	(—)
VII	(—)	(—)	—	—	—	—
VIII	—	(—)	(—)	+	+	+
IX	+	—	(—)	(+)	—	—
X	—	+	—	(+)	(—)	+
XI	+	—	+	+	(—)	(+)
XII	(+)	+	—	—	—	(+)
I	(+)	(+)	+	+	+	+

Het is duidelijk, dat de viervlakken I en VII elkaars tegenviervlakken zijn, en evenzoo II en VIII, III en IX enz., terwijl op het viervlak XII weder het viervlak I volgt.

De geheele reeks bestaat dus uit 12 viervlakken die twee aan twee elkaars tegenviervlakken zijn, in tegenstelling met hetgeen wij in de ruimte van drie afmetingen vonden, waarin *twee* reeksen van boldriehoeken gevormd werden, waarvan de eene de tegendriehoeken van de andere bevatte.

7. Tusschen de inhouden van elk tweetal viervlakken tot de reeks behoorende bestaat een eenvoudig verband.

Noemen wij I_I den inhoud van het eerste viervlak, dan geldt voor elke verandering van het viervlak waarbij het dubbelrechthoekig blijft (en dus a_{13}, a_{24} en a_{14} niet veranderen) de betrekking:

$$dI_I = \tfrac{1}{2}\, a_{12}\, da_{34} + \tfrac{1}{2}\, a_{14}\, da_{23} + \tfrac{1}{2}\, a_{34}\, da_{12}.$$

Evenzoo is:

$$dI_{II} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{14})\, da_{23} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{34})\, da_{12} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{34})\, da_{12}$$

en dus:

$$I_I + I_{II} = \tfrac{1}{4}\pi\, a_{23} + \tfrac{1}{4}\pi\, a_{12} - \tfrac{1}{2}\, a_{12}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{34}) + \text{constante}.$$

De constante wordt gevonden door $a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_{12} = \frac{1}{2}\pi$ te stellen, in welk geval I_I het zestiende gedeelte van de geheele hyperspheer inneemt en dus $\frac{1}{8}\pi^2$ is, terwijl $I_{II} = 0$ wordt. De constante blijkt dan $-\frac{1}{8}\pi^2$ te zijn, en dus:

$$I_I + I_{II} = -\tfrac{1}{8}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi\, a_{12} + \tfrac{1}{4}\pi\, a_{23} - \tfrac{1}{2}\, a_{12}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{34}).$$

Evenzoo is:

$$I_{II} + I_{III} = -\tfrac{1}{8}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - a_{12}) + \tfrac{1}{4}\pi\, a_{12} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{14})(\tfrac{1}{2}\pi - a_{23}),$$
$$I_{III} + I_{IV} = -\tfrac{1}{8}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi\, a_{14} + \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - a_{12}) - \tfrac{1}{2}\, a_{34}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{12}), \text{ enz.}$$

Telkens kan de som van de inhouden van twee opeenvolgende viervlakken worden uitgedrukt door middel van vier opeenvolgende elementen van den in § 4 genoemden eersten cyclus.

Wij leiden hieruit gemakkelijk af:

$$I_I - I_{III} = \tfrac{1}{2}\, a_{12} a_{34} - \tfrac{1}{2} a_{14}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{23}),$$

terwijl wij evenzoo $I_{II} - I_{IV}$, $I_{III} - I_V$, enz. kunnen vinden. Verder vinden wij

$$I_I + I_{IV} = \tfrac{1}{2} a_{14} a_{23} - \tfrac{1}{2} a_{34}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{12}) - \tfrac{1}{2} a_{12}(\tfrac{1}{2}\pi - a_{34})$$

en evenzoo $I_{II} + I_V$, enz.

Bedenken wij, dat de viervlakken I en VII wat hun elementen en inhouden betreft gelijk zijn, en evenzoo II en VII enz., en dat wij dus wat de inhouden betreft slechts met een gesloten reeks van 6 termen te doen hebben, dan zien wij dat van elk willekeurig tweetal altijd òf de som òf het verschil der inhouden op eenvoudige wijze kan worden uitgedrukt.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer O. POSTMA: *„Nog iets over de grootheid H en de* MAXWELL*'sche snelheidsverdeeling.*

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 1. In het verslag der Gewone Verg. der Wis- en Nat. Afd. van de Kon. Ak. v. Wet. van 27 Jan. 1906 komen enkele opmerkingen voor van schrijver dezes onder den titel „Iets over de grootheid *H* in BOLTZMANN's Vorlesungen über Gastheorie".

Mijn bedoeling is thans die opmerkingen nog eenigszins aan te vullen vooral naar aanleiding van het boek van GIBBS over Statistische Mechanica [1]) en een artikel van Dr. C. H. Wind: „Zur Gastheorie" [2]).

In mijn bovenvermeld artikel werd vooral critiek geoefend op de bewijzen, door BOLTZMANN en JEANS gegeven, dat de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling in een gas den waarschijnlijksten toestand zou aangeven en aangetoond, dat door dezen ten onrechte een gelijkheid der kansen à priori wordt aangenomen dat het snelheidspunt van een willekeurig molecuul in een willekeurig elementje der ruimte zou vallen.

Nu kan evenwel de vraag gesteld worden of het niet mogelijk zou zijn de door BOLTZMANN en JEANS gegeven analyse eenigszins anders te interpreteeren, zoodat met vermijding van de onjuiste grondaanname toch de uitkomst behouden bleef. En dan blijkt dit inderdaad het geval te zijn. Wanneer uit het ensemble van even mogelijke snelheidscombinaties met gelijke totale energie de waarschijnlijkste snelheidsverdeeling gezocht wordt, wordt er toch alleen gebruik van gemaakt dat de verschillende snelheidscombinaties even mogelijk *zijn*, hoe ze dit zijn *geworden* doet er eigelijk niet toe. Of wel, het was niet noodig geweest tot de afzonderlijke snelheden van de moleculen op te klimmen en daaromtrent eene aanname te maken.

Deze beschouwingswijze is geheel van denzelfden aard als de door GIBBS in zijn bovenvermeld werk voortdurend gevolgde. GIBBS behandelt in zijn boek steeds in plaats van een bepaald systeem een ensemble van systemen van denzelfden aard en meestal bepaald door hetzelfde aantal algemeene coördinaten en momenten ($p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$), die hij in hun algemeen beloop volgt. Zulk een ensemble zal het beste het gedrag van een systeem (b. v. een gasmassa) in beeld brengen, waarvan maar enkele gegevens bekend zijn en de andere allerlei

[1]) J. WILLARD GIBBS „Elementary Principles in Statistical Mechanics", New-York, 1902.

[2]) WIEN. Sitzungsber. Bd. 106, p. 21, Jan. 1897.

waarden kunnen aannemen. Hij noemt nu zulk een ensemble *microcanonisch* als alle systemen, die er toe behooren, een energie hebben inliggende tusschen E en $E + dE$ en overigens de systemen uniform over alle mogelijkheden van phasecombinatie verdeeld zijn of gelijkmatig verspreid over de geheele *phase-extensie*, waarvan de energie tusschen E en $E + dE$ ligt. Als de energie van een gasmassa (natuurlijk altijd tot op zekeren graad van nauwkeurigheid) gegeven is, zou men volgens GIBBS reden hebben het microcanonisch ensemble door deze energie bepaald te bestudeeren en de gasmassa te beschouwen als willekeurig uit zulk een ensemble gegrepen. De bedoelde phase-extensie wordt bepaald gedacht door $\int dp_1 \ldots dq_n$ maar in het geval van een gasmassa met enkelvoudige gelijke moleculen is dit evenredig met $\int dx_1\, dy_1\, dz_1 \ldots dx_n\, dy_n\, dz_n, d\dot{x}_1\, d\dot{y}_1\, d\dot{z}_1 \ldots d\dot{x}_n\, d\dot{y}_n\, d\dot{z}_n$, zoodat we kunnen zeggen dat in het ensemble iedere snelheid- en plaats-combinatie even dikwijls voorkomt.

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat, als de energie zuiver kinetisch is, in zulk een ensemble, *wat de snelheidsverdeeling betreft*, dezelfde gevallen voorkomen die bij de beschouwingswijze van BOLTZMANN en JEANS als even mogelijke gevallen werden opgevat. Het verschil in de behandelingswijze van GIBBS aan den eenen en BOLTZMANN en JEANS aan den anderen kant bestaat behalve in het reeds genoemde al of niet opklimmen tot de afzonderlijke snelheden, hierin dat GIBBS tegelijk de plaatsing en snelheidsverdeeling behandelt (beide behooren tot het begrip phase), terwijl JEANS deze afzonderlijk beschouwt en BOLTZMANN in dit verband zich met de plaatsing niet bezighoudt.

Iedere phase van BOLTZMANN (snelheids-combinatie) komt dus met zooveel phasen van GIBBS (snelheids- en plaats-combinatie) overeen als men bij die bepaalde snelheidscombinatie de moleculen op verschillende wijzen plaatsen kan. Daar dit aantal volgens de uit de grondaanname volgende onafhankelijkheid van snelheids- en plaatsverdeeling voor elke snelheidscombinatie gelijk is, zal het er bij de onderlinge vergelijking der verschillende snelheidscombinaties niet toe doen of we de plaatsing der moleculen er ook bij in rekening brengen of niet. Wij moeten dus als we de waarschijnlijkste snelheidsverdeeling (die, waarbij de meeste snelheidscombinaties samenvallen) zoeken, bij GIBBS en BOLTZMANN hetzelfde resultaat krijgen.

Het is duidelijk, dat de hier bedoelde phasen van het microcanonisch ensemble zijn wat GIBBS de specifieke phasen noemt. GIBBS maakt nl. onderscheid tusschen specifieke en generieke phasen: bij de eerste beschouwt men het als verschillende gevallen als men op dezelfde

plaats en met dezelfde snelheid andere, zij het geheel gelijke, moleculen heeft, bij de tweede niet. Men kan ook zeggen: bij de eerste komt het ook op de nummers, bij de tweede alleen op de aantallen der moleculen aan. Men kan nu dus zeggen, dat in zulk een microcanonisch ensemble de waarschijnlijkste snelheidsverdeeling en die ook in de groote meerderheid der gevallen ongeveer zal voorkomen (vergelijk de in het eerste artikel besproken analyse van JEANS) de MAXWELL'sche zal zijn. Wanneer men dus eene willekeurige, in stationairen toestand verkeerende, gasmassa mag beschouwen als willekeurig uit zulk een microcanonisch ensemble gegrepen, zal er ook hoogstwaarschijnlijk de MAXWELL'sche of een veel daarop gelijkende snelheidsverdeeling in voorkomen. Op deze wijze heeft men een afleiding van de wet gekregen, waarop de oorspronkelijke aanmerking niet meer te maken is, hoewel natuurlijk een zekere willekeur blijft bestaan in de aanname van het microcanonisch ensemble [1]).

Ten slotte zou men nog de vraag kunnen stellen, als men nu toch tot de afzonderlijke snelheden wil opklimmen, kan men dan ook door een andere onderstelling à priori omtrent de kansen op elke waarde voor de snelheid dan de door BOLTZMANN en JEANS aangeduide tot de besproken even mogelijke combinaties komen? De onderstelling moet natuurlijk zóó zijn, dat de kans onafhankelijk van de richting der snelheid is, zoodat de kans op een snelheid c, waarbij het snelheidspunt in zeker volueelementje $d\xi d\eta d\zeta$ valt, kan worden voorgesteld door $f(c)d\xi d\eta d\zeta$. Wanneer we nu nog aannemen dat de kansen voor de verschillende moleculen onafhankelijk van elkaar zijn, is de kans op zekere snelheidscombinatie evenredig met $f(c_1)f(c_2)\ldots f(c_n)$ en dit moet gelijk blijven als de kinetische energie L of, omdat de moleculen gelijk ondersteld worden, Σc^2 gelijk blijft. Voor elke verandering van c_k en c_l in c'_k en c'_l, zoodat $c^2{}_k + c^2{}_l = c'^2{}_k + c'^2{}_l$, moet dus: $f(c_k).f(c_l) = f(c'_k).f(c'_l)$. Dit is een in de gastheorie meermalen voorkomende betrekking, waaruit volgt: $f(c) = ae^{bc^2}$. Als bijzonder geval volgt hieruit: $f(c) = a$, dat is de aanname van BOLTZMANN en JEANS, dat de kans à priori gelijk zou zijn op elke waarde van de snelheid.

§ 2. In de tweede plaats wensch ik eenige opmerkingen te maken naar aanleiding van het bewijs, dat BOLTZMANN in zijn Gastheorie geeft, dat bij een *ongeordend* gas bij eenvoudige onderstellingen omtrent den aard der moleculen in den stationairen toestand de

[1]) Bij de algemeener aanname van een *canonisch* ensemble wordt de MAXWELL'sche wet afgeleid door LORENTZ: „Abhandlungen über Theoretische Physik", Lpzg. 1906 I, p. 295.

MAXWELL'sche snelheidsverdeeling bestaat. In zijn bovengenoemd artikel toont dr. C. H. WIND aan, dat BOLTZMANN daarbij een fout maakt in het berekenen van het aantal botsingen van tegengestelde soort. BOLTZMANN neemt nl. aan, dat als er moleculen, waarvan de snelheidspunten liggen in een volumeelementje $d\omega$, botsen met andere, waarvan de snelheidspunten liggen in $d\omega_1$, zoodat de eerste punten na de botsing in $d\omega'$ en de tweede in $d\omega_1'$ komen, nu de volumeelementjes $d\omega$ en $d\omega'$, $d\omega_1$ en $d\omega_1'$ gelijk zouden zijn, zoodat steeds $d\omega' . d\omega'_1 = d\omega\, d\omega_1$. Verder neemt hij aan, dat nu ook, als er moleculen botsen, waarvan de snelheidspunten in $d\omega'$ en $d\omega_1'$ liggen, deze na de botsing in $d\omega$ en $d\omega_1$ terecht zullen komen. Deze laatste botsingen noemt hij botsingen van tegengestelde soort. WIND toont nu aan dat deze aanname onjuist zijn; $d\omega$ is niet $= d\omega'$, $d\omega_1$ niet $= d\omega'_1$, zelfs niet $d\omega d\omega_1 = d\omega' d\omega_1'$, behalve als de massa's der beide botsende moleculen gelijk zijn [1]).

Verder komen snelheidspunten van botsende moleculen, die in $d\omega'$ en $d\omega_1'$ lagen, na botsing niet altijd in $d\omega$ en $d\omega_1$, zoodat een andere definitie noodig is voor botsingen van tegengestelde soort, n.l. zulke, waarbij na de botsing de snelheidspunten in $d\omega$ en $d\omega_1$ komen. Verder bewijst WIND, dat nu toch het aantal botsingen van tegengestelde soort wordt voorgesteld door de uitdrukking, die BOLTZMANN er voor gevonden had.

Men kan dan, wat WIND niet meer doet, vrij gemakkelijk het in § 5 van zijn Gastheorie door BOLTZMANN gegeven bewijs, dat de Maxwellsche snelheidsverdeeling de eenig mogelijke is, zoo veranderen dat het geheel in orde is. De bedoelde fout echter werkt overal in het boek van BOLTZMANN na. Bij het bewijs van het H-theorema in meer analytischen vorm in een noot bij § 5 gegeven kost het reeds eenige moeite de fout er uit te werken.

Dezelfde zaak keert terug, als in rekening wordt gebracht dat de moleculen krachtcentra zijn en als samengestelde moleculen worden behandeld. Bij het verschijnen van het tweede deel van het werk heeft BOLTZMANN kennis genomen van de beschouwingen van WIND, maar de onjuiste definitie voor botsingen van tegengestelde soort is gebleven [2]).

Met de bedoelde fout, door BOLTZMANN bij een meetkundige behandeling van de botsingsverschijnselen gemaakt, hangt een andere van meer analytischen aard samen, zoodat ook bij JEANS, die de zaak

[1]) Ik merk hierbij op dat het zelfs dan nog niet algemeen waar is, maar alleen als men de volumeelementjes $d\omega$ en $d\omega_1$ den vorm geeft van rechte prisma's of cylinders, waarvan de ribbe of de as de richting van de botsingsnormaal heeft.

[2]) Zie § 78, 2e alinea.

meer analytisch behandelt, de afleiding m. i. niet geheel in orde is. Deze wijze van behandelen roert BOLTZMANN, hoewel hij de meetkundige verkiest, herhaaldelijk aan [1]). De methode zou dan hierin bestaan, dat de componenten van de snelheden na de botsing $\xi'\eta'\zeta'\xi'_1\eta'_1\zeta'_1$ worden uitgedrukt als $f(\xi\eta\zeta\xi_1\eta_1\zeta_1)$ en daarna met behulp van de functionaal determinant van JACOBI $d\xi' d\eta' d\zeta' d\xi'_1 d\eta'_1 d\zeta'_1$ wordt uitgedrukt in $d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$. We vinden dan dat deze determinant hier $= 1$ en dus

$$d\xi' d\eta' d\zeta' d\xi'_1 d\eta'_1 d\zeta'_1 = d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \text{ of } d\omega' d\omega'_1 = d\omega d\omega_1 .$$

Het aantal botsingen van tegengestelde soort, volgens BOLTZMANN $= f'F'_1 d\omega' d\omega'_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\vartheta d\lambda dt$ is dus ook $= f'F'_1 d\omega d\omega_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\vartheta d\lambda dt$. Hierbij is echter de fout gemaakt, dat $d\xi' d\eta' d\zeta' d\xi'_1 d\eta'_1 d\zeta'_1$, het volumetje in de ruimte van 6 dimensies, dat zou correspondeeren met het volumetje $d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$ vóór de botsing, begrensd is gedacht door vlakken $\xi' = c$ en dergelijke, wat niet het geval is. Ook JEANS stelt de producten der differentialen aan elkaar gelijk, waarbij dan volgens hem, wanneer $d\xi' \ldots d\zeta'_1$ willekeurig zijn, de $d\xi \ldots d\zeta$ zoo moeten gekozen worden, dat de waarden van $\xi' \ldots \zeta'_1$ met behulp van de functies $\xi' = f(\xi \ldots \zeta_1)$ enz. berekend binnen de grenzen bepaald door $d\xi'$ enz. vallen [2]). Dit is echter onmogelijk.

Hierbij is dunkt mij het juiste beginsel, dat de berekening der extensie ingenomen door de combinaties der snelheidspunten na de botsing als die vóór de botsing bekend is en omgekeerd overeen zou komen met een overgaan naar andere variablen bij een integratie, op niet geheel juiste wijze toegepast. De bedoelde eigenschap zegt dat men in een integraal bij overgang van de variablen $\xi'\eta'\zeta'\xi'_1\eta'_1\zeta'_1$ naar $\xi\eta\zeta\xi_1\eta_1\zeta_1$ het product der differentialen $d\xi' d\eta' d\zeta' d\xi'_1 d\eta'_1 d\zeta'_1$ mag vervangen door $\left|\frac{d(\xi'\eta'\zeta'\xi'_1\eta'_1\zeta'_1)}{d(\xi\eta\zeta\xi_1\eta_1\zeta_1)}\right| d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$, telkens integreerende over de overeenkomstige gebieden, *maar daarom zijn deze uitdrukkingen nog niet gelijk.* Men kan zeggen, dat de eerste uitdrukking voorstelt het elementair volumetje in de ruimte van 6 dimensies begrensd naar $\xi' \ldots \zeta'_1$, de tweede het elementair volumetje begrensd naar $\xi \ldots \zeta_1$ [3]).

Een eenvoudig voorbeeld heeft men, als men in de ruimte van 3 dimensies $\int p dx dy dz$, dat b.v. het gewicht van een lichaam voorstelt,

---

[1]) Zie o. a. deel I, p. 25 en 27.

[2]) Zie „The dynamical Theory of Gases" p. 18.

[3]) Vergelijk LORENTZ, l. c. Abhandlung VII.

vervangt door $\int pr^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$, wat hetzelfde voorstelt, zonder dat daarom $dx\,dy\,dz$ gelijk behoeft te zijn aan $r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$.

We hebben dus hier

$$\int d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi'_1\, d\eta'_1\, d\zeta'_1 = \int \left| \frac{d(\xi' - \zeta'_1)}{d(\xi - \zeta_1)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1,$$

welke beide uitdrukkingen de „extensie" in de ruimte van 6 dimensies na de botsing voorstellen. Die vóór de botsing is $\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$, zoodat dus, als de determinant $= 1$, de extensie onveranderd blijft bij de botsing. Dit blijkt, zooals JEANS aantoont, werkelijk het geval te zijn. Men kan echter ook deze eigenschap als een bijzonder geval van het theorema van LIOUVILLE beschouwen en daaruit afleiden. [1]) Dit theorema zegt, dat bij een ensemble van identieke, van elkaar onafhankelijke, mechanische systemen, waarvoor de bewegingsvergelijkingen van HAMILTON gelden, $\int dp_1 \ldots dq_n = \int dP_1 \ldots dQ_n$, als $p_1 \ldots q_n$ de coördinaten en momenten der systemen op een willekeurig tijdstip, $P_1 \ldots Q_n$ aan het begin voorstellen. GIBBS noemt deze regel de wet van behoud van phase-extensie, welke extensie we ons nu moeten uitgebreid denken over een ruimte van $2n$ dimensies. Wanneer men nu de twee botsende moleculen als een systeem beschouwt, dat geen invloed van andere systemen ondervindt en aanneemt, dat gedurende de botsing krachten werken, die slechts van de plaats der deeltjes en niet van de snelheden afhangen, kan men op een ensemble van zulke molecuulparen de formule $\int dp'_1 \ldots dq'_n = \int dp_1 \ldots dq_n$ toepassen, waarbij het eerste de phaseextensie na, het tweede die vóór de botsing voorstelt. In het door BOLTZMANN beschouwde geval zijn dit moleculen met massa's m en m_1 zoodat we krijgen:

$$\int dx'\, dy'\, dz'\, m^3\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, dx'_1\, dy'_1\, dz'_1\, m_1^3\, d\xi'_1\, d\eta'_1\, d\zeta'_1 =$$

$$= \int dx\, dy\, dz\, m^3\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx'\, dy'\, dz'\, m_1^3\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'.$$

Daar we de coordinaten gedurende de botsing als onveranderlijk mogen beschouwen, volgt hieruit

$$\int d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi'_1\, d\eta'_1\, d\zeta'_1 = \int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta.$$

§ 3. Men kan echter, zooals boven reeds is aangeduid, zonder

[1]) Zooals BOLTZMANN terloops opmerkt: deel II p. 225.

iets over het mechanisme van de botsing aan te nemen, de eigenschap bewijzen met behnlp van de formules voor de eindsnelheden bij veerkrachtige botsing, gebruik makende van den functionaal determinant. Een tweede methode wordt gevolgd door WIND in zijn bovengenoemd artikel (het tweede bewijs) en door BOLTZMANN (deel II p. 225 en 226); deze verschilt in zooverre van de vorige, dat het veranderen van variablen bij gedeelten plaats vindt (door middel van de snelheidscomponenten van het zwaartepunt) waardoor de berekening eenvoudiger wordt. [1]) Een derde meer meetkundige methode wordt door WIND gegeven in zijn eerste bewijs. Deze laatste methode schijnt mij het meest geschikt om ook een voorstelling te krijgen van de beteekenis der wet van behoud van phaseextensie in dit bepaalde geval. Ik zal mij echter veroorloven een wijziging aan te brengen, die mij een bekorting schijnt, door ook de functionaaldeterminant er bij te gebruiken. Men zou het dus nu ook een eenigszins gewijzigde eerste methode kunnen noemen.

In de eerste plaats wil ik opmerken, dat het bij deze botsingsverschijnselen noodig is, oneindig kleine volumes te vergelijken; wil men dus de formule

$$\int d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi'_1\, d\eta'_1\, d\zeta'_1 = \int \left| \frac{d(\xi' \ldots \zeta'_1)}{d(\xi \ldots \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$$

gebruiken, dan moet men voor deze differentialen oneindig kleinen van de 2e orde nemen. Men kan echter ook eenigszins anders te werk gaan. Hoe toch wordt bovenstaande formule afgeleid? Door er gebruik van te maken, dat met een volumetje $d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$ in het gebied der $\xi \ldots \zeta_1$ een volumetje

$$\left| \frac{d(\xi' \ldots \zeta'_1)}{d(\xi \ldots \zeta_1)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$$

in het gebied der $\xi' \ldots \zeta'_1$ correspondeert, of ook dat de eerstgenoemde extensie, ingenomen door de voorstellende punten in de ruimte van 6 dimensies vóór de botsing, aanleiding zal geven tot de tweede extensie na de botsing. Men kan dus zeer goed deze uitdrukkingen zelf, zonder integratie, met elkaar vergelijken, als men maar niet de tweede uitdrukking verwisselt met $d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi'_1\, d\eta'_1\, d\zeta'_1$, het elementairvolumetje dat men verkrijgt door de extensie na de botsing op een andere manier te verdeelen.

---

[1]) Het komt mij echter voor dat BOLTZMANN zich bij dit bewijs niet houdt aan wat hij vroeger (§ 27 en § 28, deel II) zelf heeft opgemerkt n.l. dat de gelijkheid der differentiaalproducten beteekent, dat ze elkaar in integralen mogen vervangen. Het begin van § 77 en het beschouwen van $du\, dv\, dw$, en $dU\, dV\, dW$, als reciproque volume-elementjes is hiermee, dunkt mij, in strijd.

We stellen ons nu voor, dat de snelheidspunten vóór de botsing zich bevinden in twee cylinders, waarvan de assen evenwijdig aan de botsingsnormaal zijn. De grondvlakken van de cylinders zijn dO dO_1 en de hoogten $d\sigma$ en $d\sigma_1$. De extensie ingenomen door de combinaties der snelheidspunten is blijkbaar gelijk aan het product van de inhouden der cylinders: $dOdO_1\, d\sigma d\sigma_1$. Bij de botsing blijven de componenten van de snelheden loodrecht op de normaal onveranderd, dus de snelheidspunten worden in de cylinders verschoven in de richting van de as, zoodat σ wordt σ' en σ_1 wordt σ'_1. Tusschen deze grootheden bestaan de betrekkingen: $\sigma' = \frac{m\sigma + m_1(2\sigma_1 - \sigma)}{m + m_1}$ en $\sigma'_1 = \frac{m_1\sigma_1 + m(2\sigma - \sigma_1)}{m + m_1}$ als m en m_1 de massa's van de botsende moleculen voorstellen (n.l. dezelfde betrekkingen als tusschen de normale begin- en eindsnelheden bij veerkrachtige botsing).

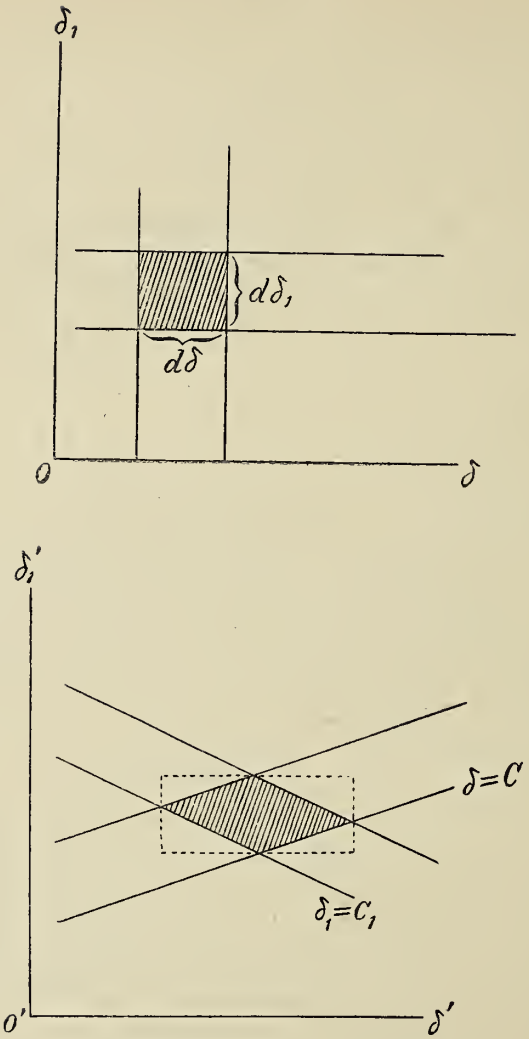
Als we nu de extensie na de botsing willen berekenen kunnen we er gebruik van maken dat aan dO en dO_1 niets verandert, zoodat we slechts behoeven na te gaan wat er wordt van $d\sigma d\sigma_1$ of welke extensie er op het gebied der $\sigma'\sigma'_1$ correspondeert met de extensie $d\sigma d\sigma_1$ op het gebied der $\sigma\sigma_1$.

Dit is volgens het bovenstaande: $\left|\frac{d(\sigma'\sigma'_1)}{d(\sigma\sigma_1)}\right| d\sigma d\sigma_1$, en daar uit de formules voor σ' en σ'_1 volgt dat de volstrekte waarde van de determinant $= 1$, zijn de extensies vóór en na de botsing gelijk.

De extensie na de botsing is echter niet gelijk aan het product van de cylinders, waarin zich na de botsing de snelheidspunten zullen bevinden. We zien dit gemakkelijk met behulp van de door Wind gegeven meetkundige voorstellingswijze. De extensie vóór de botsing kunnen we ons denken als het product van de extensie in de ruimte van 4 dimensies $dOdO_1 \times$ de extensie $d\sigma d\sigma_1$, die we ons kunnen voorstellen als een rechthoek in het veld der $\sigma\sigma_1$, als we deze als twee onderling loodrechte coördinaten in een plat vlak uitzetten.

Ieder punt in den rechthoek stelt dus een aantal combinaties van snelheden voor met gelijke σ en σ_1. De zijden van den rechthoek, met vergelijkingen $\sigma = c$ en $\sigma_1 = c_1$, correspondeeren in het veld der $\sigma'\sigma'_1$ met de rechte lijnen $m\sigma' + m_1(2\sigma'_1 - \sigma') = (m + m_1)c$ en $m_1\sigma'_1 + m(2\sigma' - \sigma'_1) = (m + m_1)c_1$, zoodat uit de combinaties voorgesteld door punten binnen den rechthoek na de botsing andere volgen voorgesteld door punten binnen een scheef parallelogram.

De formule $\left|\frac{d(\sigma'\sigma'_1)}{d(\sigma\sigma_1)}\right| = 1$ drukt uit, dat de beide figuren dezelfde



oppervlakte hebben. De extensie na de botsing is nu gelijk aan dit parallelogram $\times dOdO_1$ of het product van de twee cylinders, waarin zich vóór de botsing snelheidspunten bevonden. Het product van de cylinders, waarin zich ná de botsing snelheidspunten bevinden is gelijk aan het product van $dOdO_1$ en de oppervlakte van den rechthoek met zijden evenwijdig aan de assen $O'\delta'$ en $O'\delta'_1$ om het bovenbedoelde parallelogram beschreven. In dezen rechthoek liggen een aantal punten, die geen overeenkomstige punten in den eersten rechthoek hebben. Alleen als $m = m_1$ vallen rechthoek en parallelogram samen.

Botsingen van tegengestelde soort zijn nu dezulke, waarbij de snelheidscombinaties vóór de botsing worden voorgesteld door punten van het parallelogram in het vlak $\delta'O\delta'_1$ en na de botsing door punten van den rechthoek in het vlak $\delta O\delta_1$.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 96^b uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM: *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. *XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels.*

§ 1. *Inleiding.* In het volgende hebben wij het evenwicht van de gasphase met de vloeistofphase onder den invloed der zwaartekracht nagegaan voor binaire stelsels, waarbij zinken van de gasphase in de vloeistofphase kan voorkomen.

Het ligt voor de hand dit vraagstuk te behandelen met behulp van op de coordinaten v (specifiek volume der gewichtseenheid van het mengsel) en x (gewichtshoeveelheid van de tweede componente bevat in de gewichtseenheid van het mengsel) voor verschillende temperaturen geconstrueerde ψ (vrije energie)-vlakken voor de gewichtseenheid van het mengsel (VAN DER WAALS, Continuität II p. 27).

Zooals VAN DER WAALS (l. c.) reeds opgemerkt heeft, zijn de regels betreffende de stabiliteit en de coëxistentie der phasen dezelfde voor deze ψ-vlakken als voor de meer gebruikelijke ψ-vlakken voor de moleculaire hoeveelheid, in 't bijzonder worden ook de coëxisteerende phasen aangegeven door de raakpunten van het ψ-vlak met een plat vlak, dat met dubbele aanraking over de plooi in het ψ-vlak rolt. Wij hebben in het volgende voornamelijk de projecties der connode en der connodale raakkoorden op het xv-vlak te beschouwen.

Meer bijzondere gevallen als het optreden van minimum of maximum kritische temperatuur of minimum of maximum coëxistentiedruk zullen wij daarbij buiten beschouwing laten, verder zullen wij ons beperken tot het geval, dat retrograde condensatie van de eerste soort optreedt. Ook zullen wij ons bepalen tot temperaturen, waarbij het optreden der lengteplooi geen storing brengt. De componente met de hoogste kritische temperatuur (T_k) kiezen wij tot eerste componente, hare kritische temperatuur geven wij derhalve door T_{k_1} aan. Het bijzondere geval dat $T_{k_2} = 0$, is dat van een *aantrekkingsloos gas* met moleculen, die eene zekere uitgebreidheid hebben. Het onderzoek der ψ-vlakken wordt voor dit geval eenvoudiger. Voorloopig schijnt het ons waarschijnlijk, dat helinm nog eene zekere aantrekking bezit. Intusschen zal het geval van een aantrekkingsloos gas ter vergelijking met wat de waarnemingen betreffende mengsels van H_e opleveren, nader worden nagegaan.

§ 2. *Barotropische druk en barotropisch gehalte.* Wij zullen v en x van de gasphase v_g en x_g, van de vloeistofphase v_l en x_l noemen.

Bij eene temperatuur T een weinig beneden T_{k_1} zal dan steeds $v_g > v_l$ zijn. Immers de plooi (zie fig. 1) strekt zich dan nog slechts weinig op het ψ-vlak uit, het plooipunt bevindt zich dicht bij de naar $x = 1$ gekeerde top van de connode en de projecties der connodale raakkoorden wijken alle in richting weinig af van de v-as, de hoek met de v-as, $\theta_p = \text{arc tg } \frac{x_g - x_l}{v_g - v_l}$, groeit van $x = 0$ af langs de connode tot het plooipunt gaande geregeld aan, doch krijgt, zoolang $T_{k1} - T$ klein is slechts eene geringe waarde. Eerst wanneer men met T een bepaald bedrag beneden T_{k1} gaat zal de plooi zich genoeg op het ψ-vlak uitbreiden om te kunnen toelaten, dat $v_g = v_l$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ wordt.

Heeft men bij eene geschikte temperatuur T stoffen als in den aanvang genoemd, zooals helium en waterstof bij het kookpunt van waterstof, zoo zal men in de xv projectie van de gas-vloeistof-plooi op het ψ-vlak voor T de projectie eener connodale raakkoorde vinden, die het bedoelde evenwicht voorstelt; men zal om deze te bereiken van $x = 0$ langs de connode tot een zekere waarde van den coëxistentiedruk p moeten opklimmen vóór θ, die voor $x = 0$ zelf nul is, $\frac{\pi}{2}$ kan worden. Een coëxistentiedruk $p = p_b$, waaronder bij de temperatuur T, $v_g = v_l$ wordt, noemen wij *een barotropischen druk voor die temperatuur*, de bijbehoorende gehalten van vloeistof en gasphase het *barotropisch gehalte der vloeistof en der gasphase bij dien druk en die temperatuur*. Wanneer toch $v_g - v_l$ met aangroeienden coexistentiedruk p bij $p = p_b$ door nul gaat, dan vindt men in evenwichten bij coexistentie-drukkingen boven en beneden de waarde p_b de phasen onder den invloed der zwaartekracht van plaats verwisseld.

Om nu na te gaan, hoe een *barotropische raakkoorde* zich bij het dalen van T het eerst op de plooi vertoont, merken wij op dat bij het uitbreiden der plooi van T_{k_1} uit aanvankelijk $\frac{d\theta}{dx}$ over de geheele vloeistoftak van de connode positief blijft, zoodat de grootste waarde van θ aanvankelijk bij het plooipunt, waar wij hare waarde met θ_{pl} zullen aangeven, gezocht moet worden.

Wanneer echter de plooi zich over het ψ-vlak bij het dalen van T uitbreidt, behoeft dit niet meer het geval te blijven en kan men $\frac{d\theta}{dp}$ afwisselend positief en negatief vinden. Men ziet dit onmiddellijk in, wanneer men er op let, dat dit steeds het geval moet zijn geworden, wanneer de plooi over het geheele ψ-vlak heenreikt.

Groeit met het dalen van T de maximum waarde van θ geregeld aan en is men met T zoo laag gekomen, dat het maximum van θ ergens in de plooi juist tot $\frac{\pi}{2}$ geklommen is, zoo zal bij deze T juist voor de bijbehoorende raakkoorde en *alleen* voor deze raakkoorde aan de voorwaarde voor het barotropisch evenwicht $v_g = v$ voldaan worden. Men heeft dan de *bovenste barotropische grenstemperatuur* bereikt. Bij verdere daling van de temperatuur zal de barotropische raakkoorde zich in twee parallelle barotropische raakkoorden, de *hoogere* en *lagere* barotropische raakkoorde, splitsen, die zich aanvankelijk bij verder dalende temperatuur van elkander blijven verwijderen, zoodat zelfs de hoogere barotropische raakkoorde door een *barotropisch plooipunt* heen van de plooi kan verdwijnen, om bij eene lagere temperatuur weer door een barotropisch plooipunt te voorschijn te treden.

Bij nog lager temperatuur volgt uit de verbreeding van de plooi in de richting van de v-as, die bij genoegzaam lage temperatuur het optreden van een barotropische raakkoorde onmogelijk maakt, dat het maximum van θ weder daalt en de barotropische raakkoorden weder tot elkaar naderen. Bij $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ vallen de raakkoorden weder samen en is de *benedenste barotropische grenstemperatuur* bereikt. Bij lagere temperaturen is $v_g = v_l$ niet meer te verwezenlijken, en v_g altijd $> v_l$.

Fig. 2, 3 en 4 stellen de verschillende gevallen schematisch voor. In het ruimtediagram der ψ-vlakken voor verschillende temperaturen vormen de gezamenlijke barotropische raakkoorden aangevuld met de stukken der connoden tusschen de lagere en hoogere raakkoorden een gesloten vlak, dat het *barotropisch gebied* begrenst.

Blijft daarentegen $\theta_{max} = \theta_{pl}$, totdat deze de waarde $\frac{\pi}{2}$ bereikt en overschrijdt, en treedt niet op de plooi nog een tweede maximumwaarde voor $\theta > \frac{\pi}{2}$ op, dan zal bij de bovenste barotropische grenstemperatuur een barotropisch plooipunt optreden, terwijl bij lagere temperatuur *eene enkele* barotropische raakkoorde op de plooi het evenwicht met $v_g = v_l$ aangeven. Deze barotropische raakkoorde zal aanvankelijk bij dalende temperatuur van af het plooipunt de plooi op schuiven, doch bij lagere temperatuur weer terugkeeren en ten slotte (steeds afgezien van het optreden van eene lengteplooi) bij de benedenste barotropische grenstemperatuur door een barotropisch plooipunt van de plooi verdwijnen. In dit geval wordt het barotropische gebied aan de zijde waarheen zich de plooi uitbreidt be-

grensd door barotropische raakkoorden, aan de andere zijde door de afgesneden stukken der connoden.

Uit het boven medegedeelde volgt dat, wanneer het optreden van barotropische raakkoorden op de ψ-vlakken voor een bepaald stoffenpaar vergezeld gaat van het optreden van barotropische plooipunten; indien T_{bpls} (*bovenste barotropische plooipuntstemperatuur*) $> T >$ T_{bpli} (*benedenste barotropische plooipuntstemperatuur*), steeds tegelijkertijd eene hoogere en eene lagere barotropische raakkoorde; indien $T >$ T_{bpls} of $< T_{bpli}$ slechts eene enkele barotropische raakkoorde aanwezig is.

De aard van het barotropische verschijnsel bij *He* en H_2 kan dienen om tot eene schatting van de kritische temperatuur van *He* te geraken. Volgens het onderzoek van een van ons (K. Zie Med. No. 96 c.) is het waarschijnlijk, dat het optreden van *eene enkele* barotropische raakkoorde voor *He—*H_2 bij de temp. van kokende waterstof zou wijzen op $T_{kHe} <$ ongeveer 2°, terwijl daarentegen, indien T_{kHe} hooger is, eene hoogere en lagere barotropische raakkoorde te verwachten is. Verder, dat, gelijk reeds in Med. No. 96*a* (November '06) werd opgemerkt een barotropische raakkoorde in de gas-vloeistof plooi slechts kan optreden bij de vervulling van zeer ongewone betrekkingen tusschen de eigenschappen der gemengde stoffen, die voorshands wel alleen bij He en H_2 zal kunnen worden waargenomen.

Of het mogelijk is dat er meer dan een barotropisch gebied optreedt en of een of twee barotropische raakkoorden van af het plooipunt voorbij het kritisch raakpunt kunnen schuiven, zal nog moeten worden onderzocht. Zoo ook of het mogelijk is dat de benedenste barotropische grenstemperatuur lager dan T_{k_2} komt, zoodat fig. 5 verwezenlijkt zou kunnen worden. Practisch is het ook wat deze vragen betreft slechts van belang te weten in hoeverre de eigenschappen van He en H_2 die mogelijkheid scheppen.

§ 3. *Barotropische verschijnselen bij het samendrukken van een mengsel van bepaald gehalte.* Wat hierbij zal geschieden is gemakkelijk af te leiden uit het in het voorafgaande gegeven overzicht der verschillende evenwichten, die bij een zelfde temperatuur mogelijk zijn. Voor de verdere discussie heeft men de *isomignische* lijn ($x =$ const.) voor dit mengsel te trekken en de snijding met de connode, de achtereenvolgende koorden en ten slotte weder met de connode na te gaan.

We zullen ons bij de beschrijving der barotropische verschijnselen daarbij beperken tot het meer gecompliceerde geval, dat bij de beschouwde T zoowel eene hoogere als eene lagere barotropische raakkoorde voorkomt, waarna de verschijnselen, wanneer er slechts eene enkele barotropische raakkoorde optreedt, gemakkelijk zullen kunnen worden overzien,

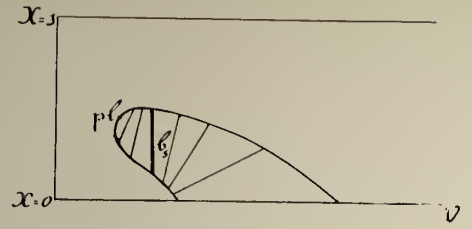


Fig. 2.

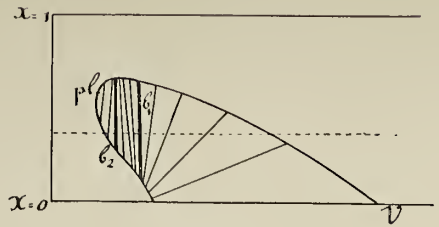


Fig. 3.

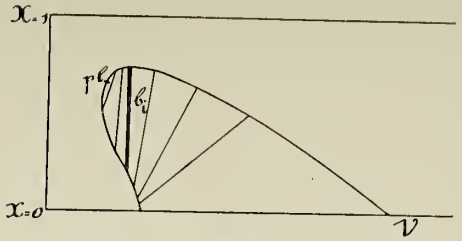


Fig. 4.

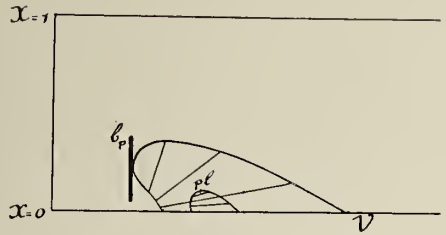


Fig. 1.

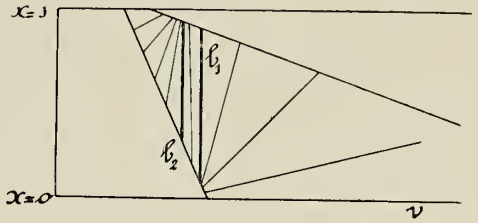


Fig. 5.

Men zal ter onderscheiding van verschillende gevallen de vloeistoftak van de connode bij T te verdeelen hebben in een *infra-* $x = 0$ tot $x = x_{lbiT}$, *lager barotropisch gehalte der vloeistofphase bij T*), *inter-* (x_{lbiT} tot x_{lbsT}) en een *supra-* ($x = x_{lbsT}$ tot $x = x_{pl}$)-*barotropisch* stuk, en de gastak in de drie overeenkomstige stukken vallende binnen en ter weerszijden van de strook tusschen de beide barotropische raakkoorden (de lagere b_{iT} en de hoogere b_{sT}) bij die temperatuur.

Of een samengaan van de verschijnselen der retrograde condensatie met die der barotropische phasenverwisseling niet of wel voorkomt hangt daarvan af of beide barotropische gehalten der gasphasen al of niet beneden het plooipunts-gehalte vallen.

Beperken wij ons bij de beschrijving tot het geval dat deze complicatie niet plaats vindt, of beschouwen we alleen mengsels, waarvoor $x < x_{pl}$ zal, terwijl bij samendrukking zich aanvankelijk vloeistof voor $x < x_{gbiT}$ en voor $x_R > x > x_{gbsT}$ beneden, voor $x_{gbsT} > x > x_{gbiT}$ boven verzamelt, door verdere samendrukking, zoo lang $x_{gbiT} > x_{lbsT}$, bij mengsels van het gehalte x zoodat $x_{gbsT} > x > x_{gbiT}$ of $x_{lbsT} > x > x_{lbiT}$ *eenmaal* phasenverwisseling plaats hebben, bij mengsels van het gehalte x zoodat $x_{ghiT} > x > x_{lbsT}$ *tweemaal* phasenverwisseling plaats grijpen, zoodat voor $x < x_{lbiT}$ en voor $x_{pl} > x > x_{lbsT}$ de laatste rest des gasphase boven, voor $x_{lbsT} > x > x_{lbiT}$ het laatste gas beneden verdwijnt. Is het mogelijk dat over een zeker temperatuurgebied de barotropische raakkoorden zoo ver uit elkander komen, dat $x_{lbsT} > x_{gbiT}$, dan zal voor deze temperaturen bij mengsels van het gehalte x zoodat $x_{gbsT} > x > x_{lbsT}$ of $x_{gbiT} > x > x_{lbiT}$ éénmaal phasenverwisseling optreden.

Deze beschrijving zal natuurlijk alleen dan op He en H_2 van toepassing zijn, wanneer de aangegeven onderstellingen hierbij vervuld blijken.

§ 4. *Storingen door capillaire werkingen.* In het vorige is, gelijk bij de toepassing van het ψ-vlak zonder vermelding van het tegendeel stilzwijgend ondersteld wordt de kromming van de scheidingsvlakken der phasen nul gesteld. Mag men de kromming niet verwaarloozen, bijv. bij de samendrukking van een mengsel in een nauwe buis, zoo zal bij overschrijding van den barotropischen druk de aldus zwaarder geworden phase eerst door de zich beneden bevindende lichtere phase zinken als het evenwicht met inachtneming van de oppervlakte-energie van de grenslaag labiel is geworden. Dit vereischt, dat θ_p grooter is geworden dan $\frac{\pi}{2}$, tot een bedrag $\Delta\theta_{cap}$, hetwelk zal afhangen van

de oppervlakte-energie van de grenslaag, en den diameter van de buis, waarin de proef genomen wordt. De capillariteit veroorzaakt aldus eene vertraging in het optreden van het barotropische verschijnsel: bij verhooging van druk zoowel als bij verlaging moet de barotropische raakkoorde door verhooging of verlaging van den druk tot een zeker bedrag overschreden worden, voordat het verwisselen van stand der beide phasen optreedt. Zoo is het in Med. N°. 96*a* (November '06, p. 455) genoemde drukverschil bij het zinken van de voornamelijk uit helium bestaande gasphase en het weder opstijgen bij de daarop volgende ontspanning (49 en 32 atm.) b.v. te verklaren met behulp van de volgende bij eene eerste schatting aannemelijke onderstellingen.

1°. dat He bij — 253° C. en 32, resp. 49 atm., zich in overeenstemmenden toestand bevindt met H_2 bij 150° C. en 160, resp. 245 atm., overkomstig de aannamen: $v_{kHe} = \frac{1}{4} v_{kH}$ volgens de verhouding der moleculaire brekende vermogens, $T_{kHe} = 1°{,}5$ (volgens Olszewski $< 1°.7$); indien de gasphase alleen uit He (molec. gew. 4) bestond, zou dan de dichtheid bij genoemde temp. en drukken zijn 0.062, resp. 0.081 en zou, indien bovendien de vloeistofphase bij beide drukken dezelfde dichtheid had, $\Delta\theta_{cap}$ moeten beantwoorden aan een dichtheidsverschil van $\pm$ 0.01; wegens het niet vervuld zijn der beide laatstgenoemde onderstellingen zal dit dichtheidsverschil kleiner zijn;

2°. dat de oppervlakteenergie van de grenslijn tusschen de bij bovengenoemde temperatuur en drukken coexisteerende phasen niet eenige malen kleiner (of grooter) is dan die van vloeibare waterstof bij die temp. in evenwicht met zijn verzadigden damp, en deze laatste uit die van stikstof [1]) volgens het beginsel der overeenstemmende toestanden kan worden afgeleid. De gasbel zal dan in eene buis als die, waarin de in Meded. N°. 96*a* beschreven proef geschiedde, (inw. diam. 8 mM.) eerst door de vloeistof heenzinken of weer opstijgen, als het verschil der kromtestralen van de toppen der begrenzende menisci dat tusschen 3 en 5 mM. overschrijdt.

Het geheele verschijnsel van het zinken en weer opstijgen der zich bij lagen druk boven bevindende phase treedt ten gevolge van de zwaartekracht alleen niet op bij die temperaturen, waarbij $\theta_{max} < \frac{\pi}{2} + \Delta\theta_{cap}$. Is dit voor mengsels van een bepaald stoffenpaar voor elke temperatuur tusschen de onderste en bovenste baro-

[1]) Baly en Donnan, Trans. Chem. Soc. 81 (1902) p. 907.

tropische grenstemperatuur het geval, dan zou men voor die mengsels het verschijnsel slechts met behulp van een geschikten roerder kunnen verwezenlijken.

§ 5. *Opmerkingen over verdere proeven met helium en waterstof.*

a. Bij de in Med. N°. 96*a*) genoemde proeven bleek bij samendrukking tot den in den toestel toe te laten druk de gezonken gasphase beneden te blijven. Bij herhaling dier proeven bij een hoogere temperatuur (bijv. te verkrijgen door de waterstof van het bad onder hoogeren druk te laten koken) is te verwachten, dat de barotropische druk eerst zal stijgen, daar aanvankelijk van af — 253° de gasphase zich sterker zal blijven uitzetten dan de vloeistofphase. Bij hoogere temperatuur gaat de vloeistofphase zich sterker dan de gasphase uitzetten, maar de wederzijdsche oplosbaarheid speelt dan reeds zulk een belangrijke rol, dat eene bepaalde verwachting niet kan worden uitgesproken, tenzij deze, dat door het terugwijken der plooi en de onmogelijkheid van de barotropische raakkoorde om de waterstofkant te bereiken de bovenste barotropische grenstemperatuur vrij spoedig bereikt zal worden. Mede in verband met de schatting, die hieruit omtrent T_{kHe} zal kunnen gemaakt worden, zal het van belang zijn te onderzoeken of bij een geschikt gehalte en bij eene geschikte hoogere temperatuur *het zinken van de eerst opgestegen vloeistofphase* kan worden waargenomen. Dat de verschijnselen bij hoogere temperatuur, indien de gebruikte glazen buis den druk mocht uithouden, verhinderd zouden worden door de capillaire werkingen, is niet waarschijnlijk, daar de capillariteit bij hoogere temperatuur tegelijk met de dichtheidsverschillen afneemt; ook zouden niettegenstaande de capillariteit met een geschikten roerder de verschijnselen wel te verwezenlijken zijn.

b. Bij verlaging van temperatuur wordt spoedig de grens bereikt waarbij de vaste phase optreedt. De vraag rijst of dan niet het *drijven van de vaste phase, de vaste waterstof, op de gasphase, in hoofdzaak het dan nog gasvormige helium,* verwezenlijkt zal kunnen worden.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan mededeeling N°. 96*c* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: W. H. KEESOM. *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. XIII. *Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels.*

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 1. *Inleiding.* Gelijk in Meded. N°. 96*b* (dit Zittingsverslag) werd opgemerkt (verg. Meded. N°. 96*a*, Nov. '06, p. 454, noot 1) ligt het voor de hand bij het onderzoek van het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase, het barotropische verschijnsel, volgens de theorie van VAN DER WAALS omtrent binaire mengsels, uit te gaan van het ψ-vlak voor de gewichtseenheid van het beschouwde mengsel. Twee coëxisteerende phasen van gelijke dichtheid zijn op dit ψ-vlak vereenigd door eene raakkoorde, wier projectie op het x, v-vlak [1]) evenwijdig is aan de x-as. In Meded. N°. 96*b* werd reeds opgemerkt, dat eene dergelijke barotropische raakkoorde bij verlaging van temperatuur van af de kritische temperatuur van de eerste (minst vluchtige) component, op twee wijzen kan te voorschijn komen:

a. doordat bij zekere temperatuur T_{bpl} de hellingshoek van de raaklijn aan de plooi in het plooipunt, θ_{pl}, de waarde $\frac{\pi}{2}$ bereikt, en bij lagere temperatuur deze overschrijdt;

b. doordat op de plooi θ bij zekere temperatuur een maximum en minimum vertoont, en dit maximum de waarde $\frac{\pi}{2}$ bereikt of overschrijdt. Ook in dit laatste geval zou bij lagere temperatuur eene der beide alsdan optredende barotropische raakkoorden het plooipunt kunnen bereiken en aldus $\theta_{pl} = \frac{\pi}{2}$ worden.

In beide gevallen waarin bij zekere temp. $\theta_{pl} = \frac{\pi}{2}$, is te verwachten, afgezien van complicaties zooals eene lengteplooi enz. (verg. Meded. N°. 96*b*, p. 507), waarvan de beschrijving later zal gegeven worden, dat voor mengsels van dezelfde stoffen bij eene lagere temperatuur weer $\theta_{pl} = \frac{\pi}{2}$, wordt.

---

[1]) Voor de beteekenis van x en v alhier zie men Meded. N°. 96*b*.

In het eerste deel dezer mededeeling wordt gehandeld over de voorwaarden, waaronder een plooipunt met $\theta_{pl} = \frac{\pi}{2}$, *barotropisch plooipunt*, op het ψ-vlak optreedt, terwijl in het tweede deel zal gehandeld worden over de voorwaarden voor het verschijnen van eene barotropische raakkoorde op de plooi.

A. Over de voorwaarden voor het optreden van een barotropisch plooipunt.

§ 2. In een barotropisch plooipunt moet de isopiest, die in een plooipunt steeds raakt aan de plooi, evenwijdig loopen aan de x-as. Dit geeft de voorwaarde:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Bovendien moet dan eene doorsnede $v = v_{pl}$ van het ψ-vlak met den limietstand van de raakkoorde eene aanraking van de 3de orde hebben. Dit geeft:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right) = 0 \quad (1\,b \text{ en } c)$$

De twee voorwaarden (1 *b*) en (1 *c*) volgen ook door (1 *a*) toe te passen op de algemeene betrekkingen voor het plooipunt van Med. N°. 75 (Nov. 1901) p. 332.

Hetzelfde kan verkregen worden uit de eigenschap van de barotropische punten op de connode, dat aldaar $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ langs de connode een maximum of minimum vertoont [1]), zoodat de substitutielijn $\left(\frac{\partial\psi}{\partial c}\right) = \text{const.}$ (zie voor de substitielijnen op het ψ-vlak voor de moleculaire hoeveelheid Meded. N°. 59^a, Juni 1900) in die punten aan de connode raakt.

---

[1]) Deze eigenschap voor coexistentie bij $x_2 = x_1$ is analoog aan de eigenschap dat $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = -p$ langs de connode min. of max. is voor coexisteerende phasen met $x_2 = x_1$. Evenzoo is ook de gemiddelde waarde van $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ langs eene isometrische lijn $v = v_b$, die op het ψ-vlak twee barotropische phasen vereenigt, gelijk aan de waarde van $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ voor deze phasen.

§ 3. We zullen voor een eerste onderzoek gebruik maken van de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS:

$$p = \frac{R_x T}{v - b_x} - \frac{a_x}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

met voor eene bepaalde x niet van v en T afhangende a_x en b_x. Daarin is:

$$R_x = R_1 (1-x) + R_2 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

als $R_1 = R/M_1$, $R_2 = R/M_2$, R de moleculaire gasconstante, M_1 en M_2 de moleculairgewichten voorstellende; we stellen voor dit eerste onderzoek $a_{12} = \sqrt{a_{11}\, a_{22}}$, zoodat

$$a_x = \{\sqrt{a_{11}} \cdot (1-x) + \sqrt{a_{22}}\ x\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

terwijl wanneer voor de moleculairvolumina ondersteld wordt: $2b_{12M} = b_{11M} + b_{22M}$, de door VAN DER WAALS Contin. II p. 27, aangegeven betrekking voor b_x overgaat in:

$$b_x = b_{11} (1-x) + b_{22}\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

Men verkrijgt dan (VAN DER WAALS Contin. II p. 28):

$$\psi = -R_x T \ln (v - b_x) - \frac{a_x}{v} + T \{R_1 (1-x) \ln (1-x) + R_2\, x \ln x\} \quad . \quad (4)$$

§ 4. De voorwaarden (1) geven nu met inachtneming van de vergelijkingen (3) en

$$\frac{b_{22} - b_{11}}{v - b} = u, \quad x = \frac{1+z}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

stellende:

$$R_2 \cdot \frac{1+z}{2}\left\{u + \frac{2}{1+z}\right\} + R_1 \frac{1-z}{2}\left\{u - \frac{2}{1-z}\right\} = \frac{v-b}{Tv^2}\frac{da}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

$$R_2 \cdot \frac{1+z}{2}\left\{u + \frac{2}{1+z}\right\}^2 + R_1 \frac{1-z}{2}\left\{u - \frac{2}{1-z}\right\}^2 = \frac{1}{Tv}\frac{d^2a}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

$$R_2 \cdot \frac{1+z}{2}\left\{u + \frac{2}{1+z}\right\}^2 \left\{u - \frac{1}{1+z}\right\} + R_1 \frac{1-z}{2}\left\{u - \frac{2}{1-z}\right\}^2 \left\{u + \frac{1}{1-z}\right\} = 0 \quad (6c)$$

Deze vergelijkingen zijn voldoende om voor een bepaald stoffenpaar de gegevens voor een barotropisch plooipunt x_{bpl}, v_{bpl}, T_{bpl}, te berekenen. Uit (6a) en (6b) T elimineerende verkrijgt men met inachtneming van (6c) en

$$(\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}) / (\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}) = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

stellende:

$$\tfrac{1}{2}(v-b)\left\{u + \frac{2}{1+z}\right\}\left\{u - \frac{2}{1-z}\right\}(\mu+z) + v\left\{u + \frac{4z}{1-z^2}\right\} = 0, \quad (8)$$

terwijl eliminatie van v uit deze verg. en (5),

$$(b_{22}+b_{11})/(b_{22}-b_{11}) = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

stellende, geeft:

$$\tfrac{1}{2}\left\{v+\frac{2}{1+z}\right\}\left\{v-\frac{2}{1-z}\right\}(\mu+z)+\left\{v+\frac{4z}{1-z^2}\right\}\{\tfrac{1}{2}(v+z)+1\}v=0\,. \quad (9)$$

Uit deze verg. met (6c) kan voor gegeven R_2/R_1, μ en v: z_{bpl} gevonden worden, waarna x_{bpl}, v_{bpl} en T_{bpl}, alsook p_{bpl} gemakkelijk volgen.

§ 5. Dat bij de aangenomen onderstellingen (2), (3b), (3c), en geschikte waarden der constanten een barotropisch plooipunt op de vloeistof-gas-plooi bestaat, blijkt als volgt: voor $z=0.5$, $R_2/R_1={}^1/_2$, $b_{22}/b_{11}={}^1/_8$, levert (6c): $u=-1.957$, waarna (9) levert: $\mu=-\ 1.176$, zoodat $a_{22}/a_{11}=0.00656$. Men vindt aldus voor een mengsel van twee stoffen met $M_2=2\,M_1$, $v_{k_2}={}^1/_8\,v_{k_1}$ (zoodat de verhouding der moleculaire kritische volumina is ${}^1/_4$) $T_{k_2}=0.052\,T_{k_1}$ een barotropisch plooipunt bij $v_{bpl}=0.79\,v_{k_1}$, $T_{bpl}=0.80\,T_{k_1}$, $p_{bpl}=4.9\,p_{k_1}$.

(*Wordt vervolgd*).

Natuurkunde. — De heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement 11, bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratarium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES, „*Bijdragen tot de kennis van het* ψ*-vlak van* VAN DER WAALS, *XIV, Grafische afleiding der uitkomsten van* KUENEN's *proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule.*

(Deze mededeeling zal later verschijnen).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 97 uit het Natuurkundig laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK, „*Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels.* VI. *Isothermen van waterstof tusschen* — 104° C. en — 217° C."

(Aangeboden in de vergadering van 29 December 1906).

§ 1. *Inleiding.*

Het onderzoek, waarover deze Mededeeling handelt maakt deel uit van het onderzoek naar de toestandsvergelijking van waterstof, waaraan sinds vele jaren te Leiden gewerkt wordt [1]).

[1]) In Med. N°. 69 Mrt. 1901, waar de toestellen omschreven zijn met welke dit onderzoek ondernomen was, is reeds in herinnering gebracht welke vroegere

Met het deel van onze metingen [2]) dat wij thans voor publicatie geschikt houden, hebben wij meer onmiddellijk voortgebouwd op het werk, dat H. H. Francis Hyndman met een van ons (K. O.) reeds voor 1904 verricht had, zoodat, al zijn ook alle waarnemingen, de een om deze, de andere om gene reden, doch altijd om de gewenschte (en er mag wel bijgevoegd worden, gedurende den loop van het onderzoek hooger opgevoerde), nauwkeurigheid te bereiken, herhaald, aan genoemden onderzoeker een belangrijk aandeel in het eindelijk welslagen der metingen toekomt.

De door ons verkregen uitkomsten verschaffen gegevens om langs experimenteelen weg de correctie van den waterstofthermometer tot de absolute schaal aan te brengen (zie de volgende Mededeeling) en den aard der afwijking tusschen het isothermennet van waterstof en dat der gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking (verg. Med. N°. 71, Juni 1901 en Med. N°. 74, Arch. Néerl. 1901) aan te geven.[3]) De vastgelegde punten in het isothermennet zijn slechts weinig in getal, doch deze weinige punten zijn dan ook met zorg bepaald, zoodat zij als het ware normaalplaatsen in het onderzochte gebied der toestandsvergelijking vormen, met welke zonder voorafgaande vereffening de berekening van individueele viriaalcoefficienten kan worden aangevangen. Kenmerkend is er voor, dat telkens een groep van dergelijke door bepalingen met den piëzometer en manometer (zie Med. N°s. 69 en 78) verkregen normaalplaatsen, werkelijk op dezelfde isothermen (die van ongeveer — 104°, — 136°, — 183°, —195°, —205°, —213° en —217°) liggen, en dat op diezelfde isothermen telkens een punt bij geringe dichtheid door een bepaling met den

---

Mededeelingen op dit onderwerp betrekking hadden. Sedert werden met de nauwkeurigheid, die de open standaardmanometer (Med. N°. 44 Oct. 1898) en de gesloten standaardmanometers (Med. N°. 50 Juni 1899) toelaten in Med. N°. 70 (Mei en Juni 1901) de isotherme voor 20° C. tot 60 atm. gegeven, waarbij zich dan aansluit Med. N°. 78 (Mrt. 1902) voor de isothermen van waterstof bij 20° C. en 0° C. gelijk zij bepaald zijn met de toestellen, die ook voor dit onderzoek gebruikt zijn. De geschiktheid van deze voor nauwkeurige isotherme-bepalingen is in Med. N°. 78 aangetoond en wordt door deze Mededeeling voor lage temperaturen bevestigd. Verscheidene Mededeelingen, zoo N°s. 83, 84, 94*b* en 94*f* verder N°s. 85 en 95*b*, eindelijk N°s. 89, 93 en 95 houden meer of minder verband met dit onderzoek, waarvan het groote belang, zoo het nauwkeurig wordt uitgevoerd, in Suppl. N°. 9 Febr. 1904 is uiteengezet.

[2]) De uitkomsten van metingen bij hoogere drukkingen en lagere temperaturen hopen wij eerlang te doen volgen, alsmede die van aanvullende bepalingen bij lagere drukkingen.

[3]) Definitieve waarden voor de viriaalcoefficienten *B* en *C* (§ 12 bevat slechts voorloopige), waaruit het verschil met die volgens de gereduceerde vergelijking kan volgen, worden in de volgende Mededeeling gegeven.

waterstofthermometer (zie Med. N°. 95^e Oct. 1906) is verkregen. In het verkrijgen der hiervoor noodige standvastigheid en zekerheid der lage temperaturen, ligt de groote moeielijkheid [1]) van het onderzoek. Te Leiden was dan ook het inrichten van betrouwbare cryostaten tot een afzonderlijk onderwerp van onderzoek gemaakt (verg. Med. N°s. 83 en 94).

Dit onderzoek omvat drie serien van piëzometer-bepalingen bij dichtheden repectievelijk ongeveer 70, 160 en 300 maal de normale. [2]) Verscheidene van de thans medegedeelde waarnemingen liggen in de buurt van de lijn der minima van pv. Den loop van deze lijn laten zij vrij nauwkeurig bepalen (zie § 13).

Wij bepalen ons in deze Mededeeling tot onze waarnemingen zelve. Over de discussie ervan, ook in verband met de resultaten van andere waarnemers, zal een volgende Mededeeling handelen.

§ 2. *Overzicht der gebruikte toestellen.*

a. Op Pl. I is in fig. 1 het systeem der meettoestellen en hulpmiddelen, behalve wat betrekking heeft op het onderhouden van een standvastige temperatuur in den cryostaat, schematisch [3]) voorgesteld. De compressietoestel A is dezelfde als de in Med. N°. 84 (Mrt. 1903) vermelde. Voor de beteekenis van het bijbehoorende stelsel van leidingen, kranen en andere onderdeelen kan verwezen worden naar Med. N°. 69 en N°. 84. Dezelfde letters zijn gebruikt, behalve dat c_1 in deze Mededeeling is gebruikt voor de kraan, waardoor de samengeperste lucht wordt toegelaten en c_2 voor de kraan, die het peilglas afsluit. De persbus, voorzien van het daarbij behoorende stelsel van kranen, het kwikreservoir en peilglas is in vooraanzicht in fig. 3 van Pl. I voorgesteld. De piëzometer met de verbindingen g_1 en g_2 is in fig. 2 van Pl. I in détail weergegeven.

De inrichting van den cryostaat B, welke diende bij de bepalingen in deze Mededeeling vermeld, vindt men in Med. N°. 94^d beschreven.

Voor de beschrijving der toestellen, dienende voor het constant houden van de temperatuur in den cryostaat kan tevens naar deze

---

[1]) Witkowski, wiens belangrijk onderzoek over de uitzetting van waterstof reeds (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1905) verscheen, voor de proeven in deze Mededeeling vermeld, voltooid waren, merkt dit reeds op ter verklaring daarvan, dat hij bij temperaturen lager dan — 147° de directe bepaling van isothermen heeft opgegeven.

[2]) De grenzen worden hoofdzakelijk bepaald door den druk, waaronder het gas komt te staan; deze zijn ongeveer 20 en 60 atm.

[3]) De enkele toestellen zijn op dezelfde schaal, de verbindingen schematisch voorgesteld.

laatstgenoemde Mededeeling worden verwezen. Fig. 4 van Pl. I kan dienen ter toelichting van deze beschrijving voor het bijzonder geval, dat onze piezometer in den cryostaat is gebracht.

De druk wordt (zie fig. 1, Pl. I) van de persbus naar den manometer overgebracht langs c_{11}, c_8, c_{12}, c_{13}, c_{14} en c_{15}. Door sluiten en openen van c_{12} kan de differentiaalmanometer E [1]) worden in- en uitgeschakeld. Door middel van de kranen c_8 en c_{13} kan hij van de overige drukleiding worden afgesloten, wanneer groote veranderingen in den druk worden aangebracht of te vreezen zijn. [2]) [3]) De verdeeling van de toestellen over twee kamers is in de figuur door een stippellijn aangeduid. Door het sluiten van een der kranen c_{13} en c_{14} kunnen beide afdeelingen als een zelfstandig stelsel worden behandeld. Dit is geschied bij de vergelijking van den manometer met den bij c_{17} aangesloten open standaardmanometer. De manometer C is dezelfde, als voor de onderzoekingen van Med. N°. 78 heeft gediend. Het reservoir D is bestemd om zoonoodig den schadelijken invloed van kleine lekken te elimineeren, waarvoor het dan in ijs geplaatst wordt. Het kan bij c_{16} aan het stelsel worden aangesloten. Bij de proeven van deze Mededeeling behoefde het niet gebruikt te worden [4]). De druk wordt door samengeperste lucht, die door c_1 en c_{19} langs de droogbuizen F en G binnentreedt, uitgeoefend en door afblazen langs c_{24} geregeld. De kranen c_{15}, c_{18}, c_{20}, c_{21}, c_{22} en c_{23} hebben analoge beteekenis met c_{11}, c_7, c_3, c_4, c_5 en c_6.

Alle koppelingen van de leidingen waarin lucht op standvastigen druk moet blijven, zijn (verg. de Plaat bij Med. N°. 94b) in met olie gevulde bakjes geplaatst, overeenkomstig het in Med. N°. 94b vermelde.

b. Wat betreft de hulpmiddelen om een standvastige temperatuur in den cryostaat te onderhouden, is in fig. 4 van Pl. I het systeem van pompen en hulpinrichtingen voor de temperatuurregeling, behoorende

---

[1]) Deze, vroeger bij den open standaard-manometer gebruikt, (zie C fig. 1 Med. N°. 44) en nu naar den piezometer verplaatst, bewees voor het nagaan van lekken goede diensten.

[2]) Een tweetal kwikvangers, die dienen voor het opnemen van kwik, dat mocht overstorten, is in de teekening niet voorgesteld.

[3]) Het tot hiertoe beschreven tot den piezometer behoorende stelsel bevindt zich in een der kamers van het laboratorium, gelegen in de onmiddellijke nabijheid der cryogene afdeeling. De overige, hoofdzakelijk tot den manometer behoorende toestellen, zijn in het vertrek met den standaardmanometer opgesteld.

[4]) Het aanbrengen der oliebakjes voor de verschillende koppelingen maakte het opsporen van lekken zoo gemakkelijk, dat nimmer een hinderlijk lek behoefde over te blijven.

tot de zuurstofcirculatie, afgebeeld. Voor eene beschrijving hiervan verwijzen wij naar Med. N°. 94.

Omtrent de ethyleencirculatie, gebruikt bij de bepalingen van Serie I, is het een en ander te vinden in Med. N°. 94*f* XIII § 1.

§ 3. *De manometer.*

De drukmetingen werden verricht door middel van den gesloten hulp-manometer beschreven in Med. N°. 78*c*. Daar een vergelijking van dezen manometer met den standaard-manometer A IV (verg. Med. N°. 78 § 17) in 1904 verricht, een onbevredigend resultaat opleverde en deed vermoeden, dat de hulpmanometer niet meer juist was, werd deze op een viertal punten met den open-standaard-manometer, aan welke de verbeteringen vermeld in Med. N°. 94*b* waren aangebracht, [1]) vergeleken. De uitkomsten dezer vergelijking zijn vereenigd in de onderstaande tabel.

Kolom *C* bevat evenals kolom *C* van Tabel XVII van Med. N°. 78*c* de aflezing van den druk, bepaald met den open manometer (Med. N°. 44). Elk getal is het gemiddelde uit twee waarnemingen. Kolom *F* geeft de aanwijzing van den druk door middel van onzen gesloten hulpmanometer. Elk der getallen is verkregen als gemiddelde uit 3 waarnemingen. Bij de berekening is gebruik gemaakt van de in Med. N°. 78*c* afgeleide calibratie. In kolom *G* is het verschil van de kolommen *F* en *C* voorgesteld. Kolom *H* bevat ditzelfde verschil uitgedrukt in de getallen van kolom *C* als eenheid. Het blijkt, dat voor alle waargenomen drukken de hulpmanometer te hoog aanwijst. Het lag voor de hand dit toe te schrijven aan een te groote waarde voor het normaal volume aangenomen [2]).

Neemt men het gemiddelde van de getallen in kolom *H*, dan vindt men 0.00087. Vermindert men het normaalvolume en dus ook de drukken met dit gedeelte van het oorspronkelijk bedrag, dan blijven tusschen de aanwijzingen van den hulpmanometer en den open standaard de verschillen over in kolom *K* voorgesteld. Deze verschillen, aanmerkelijk kleiner dan die in Tab. XVII van Med. N°. 78*c*, blijven binnen de grenzen van nauwkeurigheid, bij dit onderzoek

[1]) Was bij de onderzoekingen met dezen manometer van Med. N°. 70 het totaal afwezig zijn van lekken een zeldzaamheid, hier werd het gemakkelijk verkregen. Zoo bleek ook de eveneens in Med. N°. 94*b* vermelde verbeterde koppeling van de staalcapillairen aan de glascapillairen van den open manometer door platineering geheel afdoende.

[2]) Zie in verband met deze vermindering van het normaalvolume ook Med. N°. 95*e*, § 11.

gesteld en geven vrijheid om de middelbare fout, wat de drukmetingen betreft, thans te schatten op $\pm \frac{1}{3000}$.

In het volgende zijn de drukken met deze nieuwe waarde van het normaalvolume berekend.

TABEL I. Manometer.

C	F	G	H	K
24.247	24.264	+ 0.017	0.00070	— 0.00017
36.290	36.333	+ 0.043	0.00120	+ 0.00033
47.960	48.004	+ 0.044	0.00092	+ 0.00005
60.022	60.061	+ 0.039	0.00065	— 0.00023

§ 4. *De piëzometers en hulptoestellen.*

De piëzometer, gebruikt in de eerste serie bij de waarnemingen bij een dichtheid 70 en de temperaturen —104°, —136°, —183°, —195°, was van dezelfde soort als die, welke voor de waarnemingen van Med. N°. 78 werd gebruikt. In onderstaande tabel zijn, overeenkomstig tabel II van die Mededeeling, de afmetingen vermeld opdat de grootte en de invloed van de vele correcties gemakkelijker kan worden overzien.

TABEL II. Gegevens H_2, Serie I.

$U_1 = 6.4110$ cm³.	$\beta_1 = 5.0 \cdot 10^{-6}$ [1]
$U_2 = 0.0530$ »	$\beta_4 = 4.7 \cdot 10^{-6}$
$V_3 = U_3 = 1.198$ »	
$V_4 = 6.0174$ »	
U_4 is bepaald uit calibratietabel	
$V_5 = 576.077$ cm³	
$v' = 0.722$ » per cm.	

[1]) De hier gegeven waarden van β zijn bepaald voor gewone temperatuur en die voor lagere temperaturen hieraan gelijk gesteld. Wij hopen spoedig β ook voor lagere temperaturen te bepalen.

De steel b_4 (zie Pl. II Med. N°. 69), waarop het volume U_4 wordt afgelezen, was 30 cM. lang ten einde het mogelijk te maken, telkens 3 niet al te dicht bij elkaar gelegen punten op de isotherme te bepalen [1]). Bij andere piëzometers van ons is zij nog langer genomen.

Voor de Seriën II en III werd gebruik gemaakt van een piëzometer van grootere afmetingen.

De noodzakelijkheid van het gebruik van een grooter gasvolume voor bepalingen bij dichtheden grooter dan 120 maal de normale is reeds in § 19 van Med. N°. 84 vermeld. Van de daar beschreven volumenometer werd geen gebruik gemaakt, maar evenals in Serie I werd het normaalvolume in den piëzometer zelf bepaald.

Evenals in de vorige tabel volgen hier de afmetingen van den piëzometer.

TABEL III. Gegevens H_2, Serie III.

$U_1 =$ 5.1583 cm³.	$\beta_1 = 3.7 \cdot 10^{-6}$
$U_2 =$ 0.0382 »	$\beta_4 = 4.7 \cdot 10^{-6}$
$V_3 = U_3 =$ 1.407 »	
$V_4 =$ 10.9645 »	
$U_4 =$ (zie vorige tabel)	
$V_5 =$ 2063.30 cm³.	
$v' =$ 1.617 » per cm.	

In Serie II had het piëzometerreservoir een volume van 10.343 cM³, doch overigens dezelfde afmetingen als in Tabel III.

Om te voorkomen, dat gedurende de metingen bij hoogen druk het gas door het lekken van de verbindingen g_2 en g_3 (zie Pl. II Med. N°. 69) ongemerkt kon ontsnappen, waren om deze koppelingen cilindrische glazen oliebakjes aangebracht (zie Pl. I fig. 2) waardoor de geringste lekken terstond zijn te herkennen ; gelijk overal de oliebakjes uitstekende diensten bewezen, waren zij hier van groot belang voor het verkrijgen van vertrouwbare uitkomsten [2]).

[1]) Deze kunnen o.a. dienen om kromming en helling der isothermen bij het middelste punt te doen kennen.

[2]) De oliebakjes bij de koppelingen g_1 en g_2 bewezen eenmaal goede diensten toen vóór de bepalingen van serie III door het niet voldoende aangezet zijn van de moer g_2 gas ontweek. Uit een terstond daarop verrichte normaalvolumebepaling bleek het normaalvolume zooveel veranderd, dat de voorafgaande bepalingen verworpen moesten worden.

§ 5. *De waterstof.*

De vulling geschiedde voor de Serie III met alle verbeteringen in Med. N°. 94^e § 2 beschreven. Voor de eerste serie werd nog niet van de zuivering door middel van afkoeling door vloeibare lucht gebruik gemaakt, in de tweede serie wel, maar zonder toepassing van hoogen druk.

§ 6. *De temperaturen.*

De temperaturen t_4 en t_3, respectievelijk van de verdeelde steel b_4 en staalcapillair g_1 (zie Med. N°. 69 Pl. II), werden bepaald op dezelfde wijze als in Med. N°. 78 § 13. In serie I werden 3 thermometers langs de staalcapillair geplaatst en één bij het buiten den eryostaat blijvend deel van de glascapillair f_2. Daar het bleek dat de afkoelende werking van den cryostaat zelfs in de naaste omgeving zeer gering was, werden bij de volgende twee serieën slechts 3 thermometers gebruikt, 2 aan de uiteinden en 1 in het midden van de staalcapillair. De invloed van een fout van 1° C. in de temperatuur van de capillair (verg. Med. N°. 78 § 13) is slechts $\frac{1}{4000}$ bij $-100°$ en $\frac{1}{10000}$ bij $-200°$. Voor de temperatuur van de glascapillair werd hier aangenomen die, welke door den thermometer aan het eind van de staalcapillair wordt aangewezen. Deze vereenvoudiging is des te meer geoorloofd naarmate de temperatuur in den cryostaat lager is en derhalve de volumina er buiten betrekkelijk minder gas bevatten.

De temperatuur van de glascapillair in den cryostaat is bepaald op dezelfde wijze, als waarop dit geschiedde bij de in Med. N°. 95^e vermelde onderzoekingen met den waterstofthermometer. Daar de inrichting van den cryostaat in beide gevallen dezelfde was en de er in geplaatste meetinstrumenten van weinig verschillenden vorm, kon zonder bezwaar bij de temperatuurbepaling van de capillair van de vroeger gevonden gegevens worden uitgegaan (zie Med. N°. 95^e § 4). Deze methode geeft voldoende nauwkeurigheid, daar men op overeenkomstige wijze als in genoemde Mededeeling redeneerende, tot het resultaat komt, dat 50° fout in de temperatuur van het gedeelte van de steel dat in aanmerking komt, nog een te verwaarloozen fout in de einduitkomst geeft, n.l. minder dan $\frac{1}{5000}$.

De temperatuur t_1 van het piëzometerreservoir werd bepaald door middel van den weerstandsthermometer, die (zie Med. N°. 95^c) vooraf met den waterstofthermometer is vergeleken.

Zij verschillen weinig van die waarbij de calibratie van den weer-

standsthermometer is geschied. Daardoor zijn de reducties eenvoudig en kunnen met groote nauwkeurigheid geschieden.

De temperaturen werden niet direct uit de weerstandsformule van Med. N°. 95^c § 6 berekend, maar op de afzonderlijke waterstofthermometeraflezingen gebaseerd, omdat deze laatsten ook als punten der isothermen moeten dienen. Uit bovengenoemde formule werd $\frac{dt}{dw}$ bepaald en door middel van dezen factor de reductie uitgevoerd.

Daar het temperatuursverschil waarvoor de reductie geschiedt minder dan 0.°3 bedraagt, is deze rekenwijze volkomen voldoende, slechts voor de temperatuur van — 135°.71, waar het verschil 4° bedroeg, was nog een correctie van 0.°01 noodig.

In onderstaande tabel is voor één temperatuurbepaling het verloop der berekening voorgesteld. De eerste kolom bevat de waargenomen weerstand W, in de volgende kolom stelt W_c voor den weerstand, waarbij de weerstandsthermometer met den waterstofthermometer is vergeleken (vergelijk Med. N°. 95^c Tabel I § 6), terwijl T voorstelt de overeenkomstige aflezing van den waterstofthermometer. Uit de waarde $\frac{dt}{dw}$ en $W - W_c$ volgt nu de temperatuurcorrectie Δt die aan T_c moet worden toegevoegd om t_1 op de waterstofthermometerschaal te vinden.

TABEL IV. Temperatuur van het bad bij waarneming N°. 7 van Serie III.

W	W_c	T_c	$\frac{dt}{dw}$	Δt	t_1
17.295	17.254	— 212°.832	1.750	+ 0°.073	— 212°.76

§ 7. *De metingen.*

Aan het begin en het einde van elke serie werd het normaal volume bepaald op de wijze in Med. N°. 78 § 12 beschreven, slechts met dit onderscheid dat in de hier vermelde serien elke bepaling van het normaal volume nog werd aangevuld met een aflezing in de U-buis b_2 en een van den barometer. Zoo werden gewoonlijk twee bepalingen verricht voor en na elke serie. De waarden, gevonden voor en na elke serie, verschillen nergens meer dan $\frac{1}{2000}$.

De tabellen V en VI zijn analoog aan de tabellen VII en VIII van Med. N°. 78. In de eerste zijn voorgesteld de uitkomsten betrekking hebbende op de normaalvolumebepaling voor serie III, de tweede omvat de drie seriën.

TABEL V. Normaal volume H_2, Serie III.

N°.	Volume.	Druk.	$p\,v_A$	Gemiddelde.	Gemiddelde.	Verschil.
1	1955.78	75.546	1945.56	1945.58	1945.73	— 0.17
2	1955.82	75.545	1945.60			— 0.13
9	1961.39	75.342	1945.87	1945.87		+ 0.14
10	[1962.04	75.327	1946.13 [1])			+ 0.40]
11	[1962.31	75.317	1946.14			+ 0.41]

TABEL VI. Normaal volumes H_2.

Bepalingen		Voor	Na	Gemiddelde	Verschil
Serie I	N°. 1				— 0.05
	2	544.74	544.82	544.78	— 0.02
	10				+ 0.02
	11				+ 0.07
Serie II	1				— 0.60
	2	1945.73	1946.10		— 0.46
	3				— 0.23
	11			1946.16 [2])	+ 0.05
	12				— 0.18
	21	1946.10	1946.64		+ 0.39
	22				+ 0.58
	23				+ 0.47
Serie III		1945.58	1945.87	1945.73	zie Tabel V

[1]) De beide laatste bepalingen zijn, ofschoon ze slechts geringe afwijkingen vertoonen toch buiten rekening gelaten, omdat wegens temperatuurs-veranderingen van de omgeving voor de schijnbare stijging van het normaal volume een zekere oorzaak kon worden aangegeven.

[2]) In deze serie werd zoowel voor en na, als ook tusschen de bepalingen bij hoogen druk een normaalvolume-bepaling gedaan. Het hier gegeven getal is het gemiddelde uit deze drie bepalingen.

Bij de isotherme-bepalingen werden voorzoover de druk dit toeliet, in iedere serie drie punten op elke isotherme gekozen met ongeveer gelijke dichtheidsverschillen opklimmende, wat voor de berekening der viriaalcoefficienten (zie § 12) voordeelen oplevert. Op deze punten werd ingesteld door het kwik te brengen beneden, midden en boven in den verdeelen steel b_4. Ter contrôle werden bij eenige der bepalingen bij afdalenden druk de beide punten in het midden en beneden in den steel nog eens bepaald.

Voor elke bepaling werd gewacht tot zoowel de druk als de temperatuur constant waren en men kon aannemen, dat het temperatuur- en drukevenwicht zich had ingesteld. Dit zal het geval zijn, wanneer de meniscus in den verdeelden steel binnen dezelfde enge grenzen zich op en neer blijft bewegen. De standvastigheid der temperatuur was door een goede regeling verzekerd en die van den druk door acht te geven op de in § 2 reeds vermelde oliebakjes, waardoor het kleinste lek onmiddellijk verraden wordt [1]), gemakkelijk te verkijgen en te behouden.

Was de hierboven genoemde constante toestand ingetreden, dan werden achtereenvolgens beurtelings eenige aflezingen van den piezometer en den manometer verricht. Stemden deze laatste onderling overeen, dan werd tot een volgend punt overgegaan.

Wat betreft de temperatuur-regeling geschiedden de metingen onder dezelfde omstandigheden als de onderzoekingen met den waterstofthermometer beschreven in Med. N°. 95^e (Oct. 1906). Behalve de weerstandsthermometer voor regeling en temperatuurbepaling was het thermo-element ook hier aangebracht, als contrôle voor de temperatuurbepaling. Daar echter de aanwijzingen van den weerstandsthermometer betrouwbaarder bleken dan die van het thermo-element werden alleen die van den eersten toestel voor de berekeningen gebruikt. Er werd steeds zoo goed mogelijk zorg gedragen dat de temperaturen, waarbij bepalingen werden gedaan, zoo dicht mogelijk lagen bij die, welke gebruikt zijn voor de calibratie van den weerstandsthermometer om de correcties klein en de nauwkeurigheid der temperatuurbepaling zoo groot mogelijk te doen zijn.

Het instellen van den druk geschiedde naar aanwijzing van den metaalmanometer M van Pl. I, fig. 1. Indien het overgaan van den eenen druk tot den volgenden slechts langzaam geschiedde was het hiermede gepaard gaande warmteproces in het reservoir zoo gering dat de temperatuurregeling en meting geen merkbare storing ondervond,

---

[1]) Vroeger vereischte dit dikwijls een langdurig en soms vruchteloos zoeken verg. bijv. Med. N°. 70 p. 8).

waardoor het constanthouden van het bad gedurende een geheele isothermebepaling des te meer was verzekerd.

§ 8. *Berekening der waarnemingen.*

De berekening geschiedt op dezelfde wijze als in Med. N°. 78 § 8 beschreven.

Voor de berekening van de volumeverandering van het piëzometer-reservoir U_1 bij lage temperaturen werd uitgegaan van de kwadratische formule voor k in Med. N°. 95^b § 1 gevonden, zoodat $k_1 = 23.43 \times 10^{-6}$ en $k_2 = 0.0272 \times 10^{-6}$ is genomen. Voor het volume van de glas-capillair U_2 was geen correctie voor glasuitzetting noodig, evenmin voor dat van de staalcapillair U_3. Voor de reductie van het gasvolume in de glascapillair U_2 tot 0° werd als volgt te werk gegaan: het volume werd in 5 deelen verdeeld U_{2a}, U_{2b}, U_{2c}, U_{2d} en U_{2e} U_{2a} stelt voor het volume van het gedeelte, dat zich in het vloeistofbad bevindt, vermeerderd met 2 cm. van de capillair boven de vloeistof, waar de temperatuur nog gelijk aan die van het bad kan worden gesteld. U_{2b} U_{2c} en U_{2d} vormen te samen het overblijvende deel van de capillair in den cryostaat boven het bad, $U_{2b} + U_{2c}$ komt overeen met het volume u'_2 van § 5 van Med. N°. 95^e en U_{2d} met u''_2. U_{2e} is het volume der capillair dat zich buiten den cryostaat bevindt. Voor de reductie van de volumina U_{2b}, U_{2c} en U_{2d} werd uitgegaan van dezelfde temperatuurbepalingen als in Med. N°. 95^e. Daar wegens de grootere dichtheid bij lagere temperatuur de gevonden gemiddelde temperatuur niet direct voor de reductie kan worden gebruikt, werd ieder der bovengenoemde volumina in 3 deelen verdeeld, van elk dezer deelen de temperatuur afgeleid, en hieruit de gemiddelde temperatuur bepaald volgens de formule $t = \frac{\Sigma \frac{t}{T}}{\Sigma \frac{1}{T}}$ waarin T de absolute temperatuur voorstelt. De uitzettingscoefficiënten, die voor de reductie zijn vereischt, werden bepaald door middel van de algemeene reeksontwikkeling van Med. N°. 71 met een geringe wijziging in de aldaar medegedeelde coefficiënten. De uitkomsten op deze wijze verkregen, geven geen merkbaar verschil met die welke worden gevonden, indien uit de zoo verkregen benaderde uitkomsten voor de isothermbepalingen de reducties opnieuw worden verricht.

Wat betreft de temperatuurcorrecties van de volumina U_3 en U_4 werd gehandeld op overeenkomstige wijze als in Med. N°. 78. Voor die van het reservoir op lage temperatuur werd een iets verschillende handelwijze gevolgd. Daar de temperatuur bij elke afzonderlijke

isothermbepaling praktisch als constant kon worden beschouwd (zie § 1), kon terstond voor iedere serie afzonderlijk een rij van isothermenstukken worden verkregen. Daar deze tevens ongeveer op dezelfde dichtheden betrekking hebben, kan uit de graphische voorstelling van pv_A op $\frac{1}{v_A}$ een nauwkeurige waarde worden afgeleid voor $\left[\frac{d(pv_A)}{dt}\right]_{t_1 v_A}$. Daar de temperaturen in de verschillende seriën niet meer dan 0.°2 verschillen, konden op deze wijze de uitkomsten zonder bezwaar tot eenzelfde standaardtemperatuur worden teruggebracht. Als standaardtemperaturen werden aangenomen de temperaturen —103°.57 en —135°.71 van serie I, —182°.81 en —195°.27 van serie II en —204°.70, —212°.76 en —217°.41 van serie III. In onderstaande tabel zijn de waarden van $\left(\frac{pv_{At''} - pv_{At'}}{t'' - t'}\right)_{v_A}$ gegeven, die hebben gediend voor de reductie van de overblijvende isothermbepalingen tot deze standaardtemperaturen t_s, welke op den waterstofthermometer bij constant volume en 1100 mM. druk bij 0° betrekking hebben.

TABEL VII. H_2 $\left(\alpha_v\right)_{t_{s_1}}^{t_{s_2}}$ Serie II.

Dichtheid.	$\left(\alpha_v\right)_{-182°.81}^{-195°.27}$	$\left(\alpha_v\right)_{-195°.27}^{-204°.83}$	$\left(\alpha_v\right)_{-204°.83}^{-212°.92}$
150	0.004336	0.004406	0.004535
160	0.004390	0.004458	0.004574
170	0.004440	0.004513	0.004622
184	0.004508	0.004599	0.004702

Uit deze gemiddelde coefficienten konden voor de verschillende punten der betreffende isothermen waarden voor $\left[\frac{d(pv_A)}{dt}\right]_{t_1 v_A}$ worden afgeleid, die voor de isotherme van —212°.76 in tabel XI van § 10 zijn opgenomen.

§ 9. *Overzicht van een bepaling.*

Als een voorbeeld van isothermbepalingen bij lage temperaturen geven wij hier een van de metingen uit de 3e serie bij een dicht-

heid van 326 maal de normale, in zuurstof kokend onder sterk gereduceerden druk.

TABEL VIII. H_2 Serie III N° 7. Bepaling in zuurstof bij ongeveer — 213° C.

Tijd 3.10—3.20	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Piëzometer top	5.8	56.496	— 213°	20°.76	19°.5				
rand	4.8	56.360	— 188°		19°.4	21.6			
verdeeling n°29	7.0	56.864	— 98°		19°.4				
			— 11°						
Manometer						5.0	93.97	19.98	
								20.04	
Piëzometer top	5.9	56.493		20°.76	19°.4				
rand	4.8	56.360				21.6			
					19°.3				
Manometer						5.0	93.97	20.00	
								20.05	
Vlotter									1.3

De kolommen van de tabel komen in hoofdzaak overeen met die van tabel IX van Med. N° 78^b. A en B hebben dezelfde beteekenis, C geeft de temperatuur t_1 van het piëzometerreservoir in het bad en de temperaturen t_{2b} t_{2c} en t_{2d} in de volgorde, van de deelen U_{2a} U_{2b} en U_{2c} (zie § 8) van de glazen steel in den cryostaat boven het bad. De in deze kolom gegeven temperaturen zijn gedurende de geheele bepaling als constant te beschouwen en zijn daarom slechts eenmaal vermeld. D geeft de temperatuur t_4 van het waterbad om de steel b_4, E de temperaturen t_3', t_3'' en t_3''' van de thermometers langs de staalcapillair geplaatst. De temperatuur van het boven den cryostaat uitstekende deel U_{2e} wordt gelijk gesteld aan t'_3. De kolommen F, G en H hebben dezelfde beteekenis als in bovengenoemde tabel. In kolom K is aangegeven de aanwijzing van den vlotter in den cryostaat. Alle lengten zijn in cM.

Deze aflezingen worden gecorrigeerd op dezelfde wijze, als voor tabel X van Med. N°. 78^b is geschied. Deze gecorrigeerde waarden

zijn in de volgende tabel weergegeven. De twee aflezingen van den piëzometer zijn later na reductie tot een gemiddelde vereenigd.

TABEL IX. H_2, Serie III. Bepaling bij ongeveer —213° C. Gecorrigeerde en ongerekende gegevens.

	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Manometer gemiddeld						115.5	93.97	19.93	
Temperaturen t_1, t_4, t_3			—213°	20°.70	18°.6				
t_{2b}			—188°						
t_{2c}			— 98°						
t_{2d}			— 11°						
Piëzometer	28.634	0.135				82.3			
	28.631	0.132							
Vloeistofspiegel									1.9

De kolommen A tot en met H hebben dezelfde beteekenis als die van tabel X van Med. N°. 78^b. K geeft den stand van den vloeistofspiegel boven den grens van het piëzometerreservoir en den glazen steel, afgeleid uit de aanwijzing van den vlotter.

Hieruit wordt de volgende tabel verkregen, die de volume- en drukcorrecties, die noodig zijn voor de berekening van pv_A, aangeeft. Zij komt overeen met tabel XI van Med. N°. 78.

De volumina der deelen van de glascapillair zijn met hunne correcties afzonderlijk opgegeven. Daarenboven zijn toegevoegd de correcties u'_3 en h, de eerste is een gevolg van het indrukken der pakkingen bij g_1 en g_2, de tweede geeft rekenschap van het gewicht der samengeperste lucht in de leiding tusschen den manometer en den piëzometer. De verticale afstand der peilglasniveau's is ongeveer 0.5 meter. Voor de berekening van de correctie w_1 is in plaats van de gemiddelde uitzettings-coefficient k, aangenomen de tweeterm $k_1 + k_2 t$ (zie § 8).

Hierbij dient echter te worden opgemerkt, dat voor de standaardtemperatuur t_α voor de reductie der deelen waarin de glascapillair verdeeld is, is aangenomen + 20°, zoodat de verschillen $t_\alpha - t_2$ hier niet klein zijn. De in Med. N°. 78 toegepaste interpolatiemethode

voor kleine waarden van $t_\alpha - t_2$ zal worden gebruikt zoodra wij over tabellen beschikken voor $d_{\alpha p_2}$. Deze waarden zijn hier terstond door berekening bepaald.

TABEL X, H_2 Serie III. Correcties en eindresultaat.

U_4 =	4.4904 cm³.	p_m =	61.004 atm.
w_4 =	0.0003 »	Hp =	0.434 »
w'_4 =	0.0014 »	h =	— 0.004 »
u_4 =	— 0.0104 »		
u_3 =	0.0018 »	u'_3 =	— 0.0005 cm³.
U_{2a} =	0.0018 »	u_{2a} =	0.0059 »
U_{2b} =	0.0020 »	u_{2b} =	0.0049 »
U_{2c} =	0.0025 »	u_{2c} =	0.0024 »
U_{2d} =	0.0129 »	u_{2d} =	0.0015 »
U_{2e} =	0.0190 »	u_{2e} =	0.0001 »
w_1 =	— 0.0239 »	w'_1 =	0.0012 »
$(pv_A)_{t_1}$ =	0.18863	t_1 =	— 212°.76
$(pv_A)_{-212°.76}$ =	0.18863	bij p =	61.434 atm.

De totale waarde van de correctie van de steel blijkt zeer gering, zoodat men zonder merkbare fouten in te voeren tot —217° met de wet van GAY—LUSSAC zou kunnen rekenen.

§ 10. *Waarden van pv_A.*

De waarden van pv_A op deze wijze verkregen voor de verschillende bepalingen zijn voor de isotherme van —212°.76 in de volgende tabel weergegeven. De getallen in de laatste kolom dienen voor de reductie tot de standaard-temperatuur t_s (vergelijk het slot van § 8).

TABEL XI. H_2. Uitkomsten voor de isotherme van —212°.76.

N°.		t_1	p	pv_A	d_A	$\left[\frac{d(pv_A)}{dt}\right]_{t_1 v_A}$
Serie II	17	— 212°.92	30.591	0.19406	157.64	0.00461
	18		35.426	0.19134	185.15	0.00476
	19		33.071	0.19264	171.68	0.00468
	20		30.554	0.19405	157.46	0.00461
Serie III	6	— 212°.76	51.632	0.18767	275.12	
	7		61.434	0.18863	325.68	

De getallen dezer tabel zijn, zooals uit tabel IX blijkt, verkregen door berekening met de gemiddelde waarden der afzonderlijke instellingen. De afwijkingen in deze afzonderlijke instellingen, die het gevolg kunnen zijn zoowel van druk- en temperatuurschommelingen als van fouten in de aflezingen zelve, bedragen nergens meer dan $\frac{1}{2000}$.

De resultaten voor ongeveer dezelfde punten gevonden aan het begin en het einde van eenzelfde isothermbepaling geven zeer goede overeenstemming, zooals tevens in de vorige tabel door vergelijking van waarneming N°. 17 en N°. 20 te zien is. Door middel van de in de laatste kolom gegeven waarden van $\left[\frac{d(pv_A)}{dt}\right]_{t_1 v_A}$ worden de uitkomsten tot dezelfde standaard-temperatuur teruggebracht.

In de volgende tabel zijn de op deze wijze verkregen resultaten ook voor de overige isothermen weergegeven. De resultaten aan het begin en het eind van een isothermbepaling bij ongeveer dezelfde dichtheid verkregen, zijn tot een gemiddelde vereenigd.

Voor iedere temperatuur is aan de resultaten der isothermbepalingen, die van de aflezingen van den waterstofthermometer toegevoegd, waarmede de eersten in direct verband staan.

De nummers komen niet overeen met die van de vorige tabel, doordat sommige bepalingen tot een gemiddelde zijn vereenigd, daarom zijn ze door ( ) aangeduid.

TABEL XII, H_2. Waarden voor $(pv_A)_{t_s}$.

N°.		t_s	p	pv_A	d_A
H_2 therm.	(1)	— 103°.57	0.896	0.62082	1.444
Serie I	(2)		32.985	0.63467	51.971
	(3)		39.659	0.63765	62.193
	(4)		49.897	0.64274	77.632
H_2 therm.	(1)	— 135°.71	0.727	0.50307	1.445
Serie I	(2)		28.592	0.51064	55.991
	(3)		33 437	0.51258	65.231
H_2 therm.	(1)	— 182°.81	0.479	0.33051	1.448
Serie II	(2)		46.572	0.32700	142.42
	(3)		55.293	0.32822	168.46
H_2 therm.	(1)	— 195°.27	0.413	0.28486	1.449
Serie II	(2)		40.599	0.27367	148.35
	(3)		45.484	0.27337	166.36
	(4)		49.998	0.27343	182.85
H_2 therm.	(1)	— 204°.70	0 363	0.25031	1.449
Serie II	(2)		35.487	0.23189	153.03
	(3)		38.640	0.23097	167.30
	(4)		42.438	0.23010	184.43
Serie III	(5)		61.917	0.23009	269.10
H_2 therm.	(1)	— 212°.76	0.320	0.22078	1.450
Serie II	(2)		30.689	0.19480	157.64
	(3)		33.200	0.19339	171.68
	(4)		35.566	0.19210	185.15
Serie III	(5)		51.632	0 18767	275.12
	(6)		61.434	0.18863	325 68
H_2 therm.	(1)	— 217°.41	0.295	0.20375	1.450
Serie III	(2)		46.419	0.16281	283.81
	(3)		52 898	0.16336	323 80
	(4)		58.971	0.16424	359.04

De punten van den waterstofthermometer zijn op de volgende wijze verkregen. Uit de isothermebepalingen van SCHALKWIJK volgt voor 20° C.

$$pv_A = 1.07258 + 0.000667\, d + 0.00000099\, d^2.$$

Neemt men aan, dat de gemiddelde spanningscoefficient van 0° tot 20° niet merkbaar afwijkt van de waarde 0.0036627 tusschen 0° en 100°, hetgeen geoorloofd is wegens de onbeduidende afwijkingen van de aanwijzingen van den waterstofthermometer van constant volume van de absolute schaal, dan volgt hieruit

$$(pv_A)_{0°,\ 1100\ mm.} = 1.000275.$$

Daar voor de berekening der waterstofthermometer-temperaturen voor den spanningscoefficient van waterstof de in Med. N°. 60 medegedeelde waarde is genomen, volgt nu de waarde van pv_A bij t_s afgeleid uit de formule

$$(pv_A)_{t_s} = (pv_A)_0\,(1 + 0.0036627\, t_s)$$

§ 11. *Waarschijnlijke fout van een bepaling.*

De middelbare fout in de calibratie van het groote volume van den piëzometer kan worden geschat op $\pm \frac{1}{4000}$. Wat betreft het volume, waarin het gecomprimeerde gas zich bij de metingen bevindt, kan van de grootere dichtheid van het gas in het reservoir op lage temperatuur rekenschap worden gegeven door de volumina op kamertemperatuur met slechts $\frac{1}{3}$ van hun bedrag in rekening te brengen. Daar de fouten in deze volumina overwegend zijn ten opzichte van die in het volume van het piëzometerreservoir, kan overeenkomstig de in Med. N°. 69 berekende nauwkeurigheid, waar voor metingen bij gewone temperatuur de middelbare fout voor piëzometers van 5 c.M³. op $\pm \frac{1}{1000}$ is geschat, de middelbare fout voor metingen beneden —180° met piëzometers van 5 c.M³. gelijk aan $\pm \frac{1}{3000}$ van het gecomprimeerde volume gesteld worden. Voor —100° zal de middelbare fout $\pm \frac{1}{2000}$ zijn.

De middelbare fout in de normaalvolume-bepalingen is $\pm \frac{1}{3000}$, die van de drukmeting kan ook op $\pm \frac{1}{3000}$ worden geschat.

In de temperatuurbepaling schuilt geen merkbare fout. De waar-

nemingen van een zelfde punt verricht, wijzen er op dat de middelbare fout te wijten aan temperatuursverschillen en foutieve aflezingen van den stand van het kwik in de steel, kleiner dan $\pm \frac{1}{5000}$ kan worden gesteld.

De middelbare fout van de temperatuursbepaling in de steel blijft beneden $\pm \frac{1}{6000}$.

De middelbare fout, veroorzaakt door al deze foutenbronnen te samen bedraagt $\pm \frac{1}{1500}$ voor piëzometers van 5 c.M.^{3} en minderlage temperatuur tot $\pm \frac{1}{1700}$ voor grootere piëzometers en zeer lage temperatuur. De verschillende punten op eenzelfde isotherme zullen onderling geringere verschillen moeten vertoonen, dan met bovengenoemde middelbare fout overeenkomt. De middelbare fout namelijk voor een bepaling, afgezien van fouten in de normaalvolume-bepaling en de calibratie van het groote volume is $\pm \frac{1}{2000}$ tot $\pm \frac{1}{2400}$.

§ 12. *Voorloopige individueele viriaalcoefficienten.*

Waren de temperaturen niet als aflezingen op den waterstofthermometer van constant volume bij 1100 mm. druk, doch op de absolute schaal gegeven, zoo zouden de coefficienten A_A, B_A enz. uit de vergelijking

$$pv_A = A_A + \frac{B_A}{v_A} + \frac{C_A}{v^2_A} + \frac{D_A}{v^4_A} + \frac{E_A}{v^6_A} + \frac{F_A}{v^8_A} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

berekend met de waarden van pv_A uit tabel XII onmiddellijk vergeleken kunnen worden met die, welke in Med. N°. 71 zijn afgeleid. [1]) Dit is echter niet het geval, daar de laatste op de absolute schaal der temperaturen betrekking hebben. Wij hadden ons van den aanvang af ten doel gesteld uit onze metingen zelve de correctie van de waterstofschaal op de absolute langs experimenteelen weg af te

[1]) Er moet op gelet worden, dat bij de berekeningen van Med. N°. 71 begonnen werd met voor het absolute nulpunt als eerste benadering 273°.04 te nemen; de correctie daaraan zou uit de uitkomsten der isotherme-berekeningen gevonden worden, om dan tot eene tweede benadering over te gaan. Aan 273°.04 is nog vastgehouden bij VI. 1 Suppl. N°. 8 en bij VI. 2 Med. N°. 92. Sedert is echter een stel coefficienten VII. 1, die in de volgende Mededeeling zullen worden gepubliceerd, berekend met de verdere benadering voor de absolute temperatuur, n.l. de meer juiste waarde 273°.09, terwijl er ook verbeteringen in kritische grootheden enz. zijn aangebracht.

leiden. Men kan daartoe geraken door de correctie eerst te verwaarloozen en voorloopige waarden A'_A, B'_A, C'_A enz. voor elk der isothermen te berekenen, met welke men dan voorloopige correcties voor den waterstofthermometer zoekt, waarna men met de gecorrigeerde temperaturen de berekening herhaalt, enz. tot verdere herhaling geen verandering meer zou geven. Een dergelijke handelwijze hebben wij toegepast bij de bepaling van de correcties van de aflezingen van den waterstofthermometer op de absolute schaal, waar wij ons ten doel stelden, door de waarnemingen op elke isotherme een kromme lijn te brengen, die niet alleen zoo goed mogelijk aan de waarnemingen aansluit, maar tevens aan de algemeene toestandsvergelijking. In deze § is direct op de individueele isothermen de methode der kleinste kwadraten toegepast, om een formule te verkrijgen, die de waarnemingen zoo goed mogelijk weergeeft.

Daar het aantal punten op elke isotherme niet groot genoeg was om terstond alle 6 coëfficienten te bepalen, werden voor de laatste 3 bepaalde waarden aangenomen. F_A werd $= 0$ gesteld en voor D_A en E_A waarden berekend uit het coëfficientenstel VII.1, [1]) dat in plaats van V uit Med. N°. 71 is gekozen. Deze aanname komt hierop neer, dat aan de isothermen voor hoogere dichtheden een bepaalde loop wordt voorgeschreven, die zich zoo goed mogelijk bij de wet der overeenstemmende toestanden aansluit. De resultaten dezer berekeningen zijn in onderstaande tabel weergegeven. D_A en E_A zijn de voor de berekening volgens het bovenstaande aangenomen waarden.

TABEL XIII. H_2. Voorloopige viriaalcoefficienten.

t_s	A'_A	$10^3 . B'_A$	$10^6 . C'_A$	$10^2 . D'_A$	$10^{18} . E'_A$
— 103°.57	0.62048	0.24271	0.5584	0.9113	— 0.648
— 135°.71	[0.50303	0.03234	1.7974	0.7028	— 0.408]
— 182°.81	0.33063	— 0.08384	0.4021	0.3809	— 0.088
— 195°.27	0.28503	— 0.13051	0.3565	0.2892	— 0.016
— 204°.70	0.25058	— 0.18030	0.3710	0.2166	0.031
— 212°.76	0.22112	— 0.22630	0.3709	0.1514	0.066
— 217°.41	0.20410	— 0.25013	0.3715	0.1122	0.082

[1]) Voor de berekening van DA en EA werd de ongecorrigeerde aanwijzing van den waterstofthermometer gebruikt (zie de vorige noot).

Uit de tabel blijkt, dat de coëfficienten van eenzelfde kolom regelmatig met de temperatuur veranderen, behalve voor — 135°.71, hetgeen is te verklaren door in aanmerking te nemen, dat de twee piëzometerbepalingen, die voor de berekening gebruikt moesten worden zoo dicht bij elkaar liggen, dat een gering verschil in de onderlinge ligging reeds een groot verschil geeft in B'_A en C'_A.

Met de coëfficienten werden volgens formule (1) opnieuw de waarden van pv_A bepaald. De afwijkingen voor elke isotherme tusschen de waargenomen waarden van pv_A, W_i, en de met A'_A, B'_A en C'_A berekende R_{oi} ($pv_A = 1$ voor 0° en 760 mm.), waar i aangeeft het nummer dier waarneming in tabel XII, zijn in onderstaande tabel voorgesteld.

TABEL XIV H_2. Afwijkingen van formule (1).

	$10^5 (W_i - R_{oi})$						in % van R_{oi}					
t_s	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=1$
—103°.57	—1	+7	—9	+3			0.001	0.011	0.015	0.005		
—135°.71												
—182°.81												
—195°.27	+1	+1	—4	+2			0.004	0.004	0.014	0.007		
—204°.70	—1	+9	0	—9	+1		0.004	0 036	0.000	0.036	0.004	
—212°.76	—1	+4	+7	—1	—15	+10	0.003	0.018	0.032	0.005	0.068	0.045
—217°.41	0	0	—3	+2			0.001	0.000	0.014	0.010		

Ter beoordeeling van de nauwkeurigheid van de onderlinge aansluiting is de isotherme van — 212.°76 het meest geschikt wegens het grootere aantal punten. De aansluiting blijkt zeer bevredigend. De bovenste grens van de middelbare fout is te stellen op $\pm \frac{1}{2000}$.

§ 13. *Minima van pv.*

Door middel van de coëfficienten van tabel XIII werden uit de gegevens van tabel XII de volgende minima der pv-lijnen afgeleid.

Uit de tabel blijkt, dat de coëfficienten van eenzelfde kolom regelmatig met de temperatuur veranderen, behalve voor — 135°.71, hetgeen is te verklaren door in aanmerking te nemen, dat de twee piëzometerbepalingen, die voor de berekening gebruikt moesten worden zoo dicht bij elkaar liggen, dat een gering verschil in de onderlinge ligging reeds een groot verschil geeft in B'_A en C'_A.

Met de coëfficienten werden volgens formule (1) opnieuw de waarden van pv_A bepaald. De afwijkingen voor elke isotherme tusschen de waargenomen waarden van pv_A, W_i, en de met A'_A, B'_A en C'_A berekende R_{oi} ($pv_A = 1$ voor 0° en 760 mm.), waar i aangeeft het nummer dier waarneming in tabel XII, zijn in onderstaande tabel voorgesteld.

TABEL XIV H_2. Afwijkingen van formule (1).

	$10^5\,(W_i - R_{oi})$						in % van R_{oi}					
t_s	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=1$
—103°.57	—1	+7	—9	+3			0.001	0.011	0.015	0.005		
—135°.71												
—182°.81												
—195°.27	+1	+1	—4	+2			0.004	0.004	0.014	0.007		
—204°.70	—1	+9	0	—9	+1		0.004	0 036	0.000	0.036	0.004	
—212°.76	—1	+4	+7	—1	—15	+10	0.003	0.018	0.032	0.005	0.068	0.045
—217°.41	0	0	—3	+2			0.001	0.000	0.014	0.010		

Ter beoordeeling van de nauwkeurigheid van de onderlinge aansluiting is de isotherme van — 212.°76 het meest geschikt wegens het grootere aantal punten. De aansluiting blijkt zeer bevredigend. De bovenste grens van de middelbare fout is te stellen op $\pm \frac{1}{2000}$.

§ 13. *Minima van pv.*

Door middel van de coëfficienten van tabel XIII werden uit de gegevens van tabel XII de volgende minima der pv-lijnen afgeleid.

Plaat I.

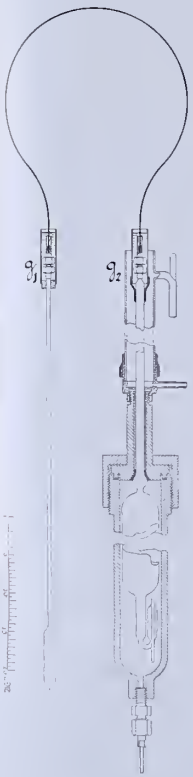


Fig. 2

Fig. 3.

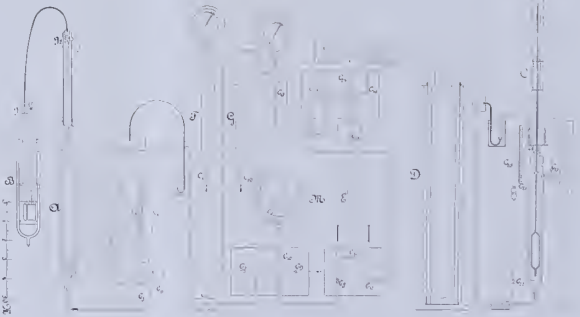


Fig. 1.

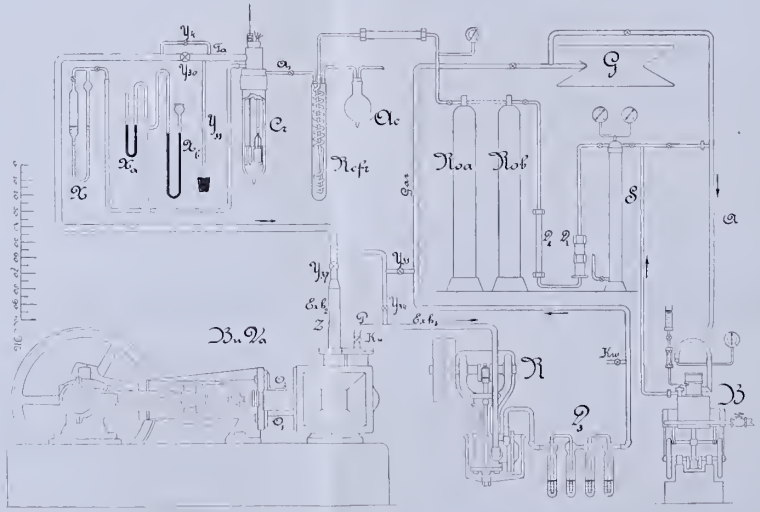
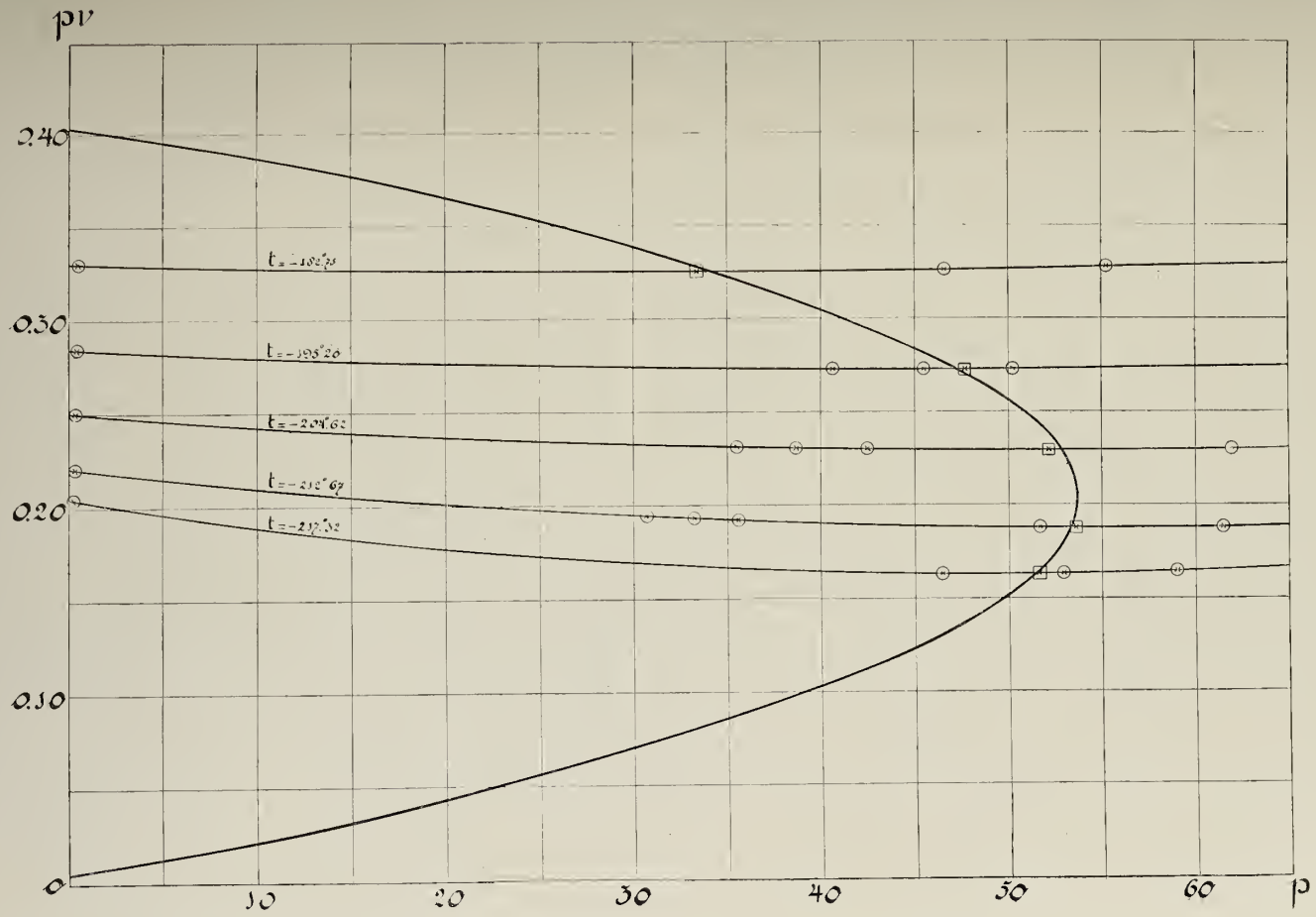


Fig. 4.

binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C.

Plaat II.



TABEL XV. H_2. Minima van pv_A.

t_s	pv_A	d_A	p	$W—R_0$
— 182°.81	0.32630	102.24	33.36	— 0.09
— 195°.27	0.27338	174.45	47.69	+ 0.51
— 204°.70	0.22935	227.17	52.10	— 0.73
— 212°.76	0.18778	285.17	53.55	+ 0.21
— 217°.41	0.16335	315.72	51.57	+ 0.10

Door middel der methode der kleinste kwadraten werden uit deze gegevens de coëfficienten van een parabool

$$p = P_0 + P_1 (pv_A) + P_2 (pv_A)^2$$

berekend. Deze zijn:

$$P_0 = - 2.556$$
$$P_1 = \quad 551.689$$
$$P_2 = - 1352.57.$$

De verschillen $W—R_0$ tusschen de gegeven waarden van p en de met deze coëfficienten berekende zijn in de laatste kolom van tabel XV voorgesteld. Deze bedragen weinig meer dan $\frac{1}{2}$ atmospheer. De in de tabel gegeven uitkomsten zijn op Pl. II [1]) in teekening gebracht, de daar geteekende kromme is de berekende parabool.

Uit de waarden van de coëfficienten volgt verder, dat de parabool de ordinaat $p = 0$ snijdt in twee punten waar pv_A respectievelijk is 0.00469 en 0.40319 waaruit met de formule:

$$(pv_A)T_{abs} = 0.99939\,[2])\{1 + 0.0036618\,(T_{abs} - 273°.09)\}$$

volgt voor de bijbehoorende temperaturen gemeten op de absolute schaal,

$$T_{abs_1} = 1°.3 \qquad\qquad T_{abs_2} = 110°.2.$$

De top van de parabool ligt bij een druk van 53.70 atm., de waarde van pv_A is hier 0.20394, waaruit in verband met de uit de isothermen bepaalde waarde van $\left(\frac{d(pv_A)}{dt}\right)_{p=53.70}$ namelijk 0.0053 voor de absolute temperatuur der isotherme, die door de top gaat, volgt

$$T = 63°.5.\,[3])$$

[1]) De temperaturen zijn gegeven in absolute graden beneden nul.

[2]) Deze waarde van A_{AO} is (vergelijk het slot van § 10) berekend uit de isothermebepalingen van SCHALKWIJK.

[3]) Hierbij zijn de correcties op de absolute schaal in aanmerking genomen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 97*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer op de absolute schaal."*

(Deze mededeeling zal later verschijnen).

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan: *„Eene opmerking over de theorie van het ψ-vlak voor binaire mengsels."*

Nu door de verrassende proef van KAMERLINGH ONNES, waarbij een gas verkregen is dat in een vloeistof zinkt, de aandacht meer dan vroeger gevestigd is op de richting van de raaklijn van het plooipunt van een binair mengsel, wil ik, de verdere bijzonderheden noodig om een dergelijk mengsel te verwezenlijken aan de onderzoekingen van KAMERLINGH ONNES en zijn medewerkers overlatende, een opmerking van algemeene beteekenis maken, die met deze proef in een nauw verband staat.

In mijn Molekulair-theorie en uitvoeriger in Cont. II heb ik nagegaan de voorwaarde, waaronder de raaklijn aan het plooipunt evenwijdig aan de v-as loopt, of met andere woorden $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \infty$ is. De vraagstukken welke daarmede in betrekking, staan kunnen wij tot 3 terugbrengen. Zij hebben alle 3 betrekking op de snijding van de twee krommen $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$.

Als eerste vraagstuk zou ik het eigenlijke willen noemen n.l. dat, waarbij $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = 0$ is, en het beschouwde punt dus op de spinodale lijn ligt, en waarbij tegelijk de kromme $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ voor standvastige waarde van x twee samenvallende wortels bezit, en dus ook $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3} = 0$ is. Dan is het beschouwde punt het kritisch punt van het als onsplitsbaar gedachte mengsel. De waarde voor T is die van T_k voor zulk een mengsel en de waarde van x wordt dan gevonden, als men de benaderde toestandsvergelijking met b constant toepast uit

$$\frac{\frac{1}{a}\frac{da}{dx}}{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}} = \frac{2}{3},$$

welke waarde $^2/_3 = {}^6/_7$ wordt als men de onafhankelijkheid van b van het volume laat vallen.

In dat geval doorsnijdt de lijn $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = 0$ de lijn $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ nog in twee punten. Het eene punt is het bovengenoemde, het tweede ligt bij kleinere x en grootere v. Dus dichter bij den component met de kleinste waarde van b.

Verhoogt men de temperatuur dan komen de twee snijpunten dezer krommen dichter bij elkander, en als tweede vraagstuk zou men kunnen stellen: te onderzoeken de omstandigheden, waarbij de twee snijpunten dezer krommen samenvallen. De 3 vergelijkingen waaruit men deze omstandigheid bepaalt zijn dan: $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = 0$ en een derde welke uitdrukt dat deze krommen aan elkander raken, nl.:

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial v^2\,\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial v}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3}$$

of

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)^2 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}$$

Boven de temperatuur, waarbij deze omstandigheden vervuld zijn, snijden $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial v} = 0$ elkander niet meer, en is de complicatie in den loop der isobaren, n.l. dat er eene is, welke zich zelve doorsnijdt, verdwenen.

Het derde vraagstuk staat wel eenigszins afzonderlijk maar zou ik toch hierbij willen voegen, nl. dat waarop de lijn $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ een dubbelpunt bezit en dus tegelijker tijd $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3} = 0$ en $\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial v^2} = 0$. Bestaat er minimum T_k, voor onsplitsbaar gedachte mengsels, dan is zulk een punt een werkelijk dubbelpunt. Mocht er maximum T_k zijn, dan is het een geïsoleerd punt. Men vindt dan weder $v = v_k$, $T = T_k$ en de waarde van x is die voor welke T_k minimum of maximum waarde heeft. Noemen wij de drie verkregen waarden van x voor die 3 vraagstukken x_1, x_2 en x_3, dan is

$$x_2 < x_1 < x_3$$
$$T_2 > T_1 > T_3 .$$

Nu bestaan er, en daarop wil ik met deze korte noot de aandacht vestigen, nog 3 vraagstukken die als tegenhanger kunnen beschouwd worden van de drie hierboven genoemde.

Stellen wij in de genoemde vraagstukken voor v in de plaats de grootheid x en omgekeerd, zoodat $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}$ verandert in $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v}$ onveranderd blijft, dan zullen de krommen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$, door hare snijding, tot 3 vraagstukken aanleiding geven, die voor de theorie der binaire mengsels evenzeer van belang zijn, als de 3 hierboven genoemde vraagstukken, welke betrekking hebben op de snijding van $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$.

In de eerste plaats zullen de punten waarin beide krommen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ elkander snijden tot de spinodale lijn behooren, gelijk uit $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v}\right)^2$ blijkt.

In de tweede plaats zullen deze doorsnijdingspunten voor den loop der lijnen $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = q =$ constant dezelfde beteekenis hebben, welke de doorsnijdingspunten van $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ hebben voor den loop der lijnen $\frac{\partial\psi}{\partial v} = -p =$ constant. Het eene doorsnijdingspunt zal een strikpunt voor de q lijnen zijn, terwijl het andere doorsnijdingspunt zich als middelpunt van afgesnoerde deelen der q lijnen zal voordoen.

In de derde plaats zal er een grenstemperatuur zijn voor het bestaan der meetkundige plaats $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$. Bij stijgende waarde van T trekt zich deze kromme samen tot een geïsoleerd punt, even als dat het geval is met $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ bij maximum T_k, of evenals bij minimum T_k de kromme $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ een strikpunt bezit.

In de vierde plaats is er een temperatuur, waarbij de krommen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ elkander nog slechts aanraken, en dus de 2 snijpunten zijn samengevallen.

En eindelijk, en wel in de voornaamste plaats, is er een temperatuur, waarbij de doorsnijding dezer krommen aldus geschiedt dat aan een der snijpunten een raaklijn aan $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ kan getrokken worden, waarbij $\frac{dv}{dx} = 0$ is.

Om deze omstandigheden te bepalen heeft men de 3 vergelijkingen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ en $\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = 0$ en blijkt dat vraagstuk de tegenhanger te zijn, van het hierboven genoemde waarbij $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x dv} = 0$ en $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3} = 0$. Was daarbij $\frac{dv}{dx} = \infty$, dan is nu $\frac{dx}{dv} = \infty$ of $\frac{dv}{dx} = 0$.

Als dus de 3 vergelijkingen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ en $\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = 0$ een oplossing toelaten, dan kunnen de omstandigheden verwezenlijkt worden waarbij in het plooipunt een raaklijn // x-as kan getrokken worden. De drie vergelijkingen zijn, als men de veranderlijkheid van b met v verwaarloost:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{MRT}{x(1-x} + \frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = -\frac{MRT(1-2x)}{x^2(1-x)^2} + 2\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^3}{(v-b)^3} = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = \frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} - \frac{\frac{da}{dx}}{v^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stelt men $a = A + 2Bx + Cx^2$ en $b = b_1 + x\beta = b_1 + x(b_2 - b_1)$ dan komt men ter bepaling van x tot de vergelijking:

$$\sqrt[3]{\frac{2x^2}{1-3x+2x^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{C_2}{B+Cx}\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{4(B+Cx)(Cb_1-\beta B)}{C^2x\beta(1-x)}\right]}\right\}$$

Mocht $B = a_{12} - a_1$ klein zijn in vergelijking van $a_1 + a_2 - 2a_{12})x = Cx$ dan verkrijgt men x bij benadering gelijk aan $^1/_3$, ten minste als ook $\frac{b_1}{\beta}$ klein is.

Zoowel voor x, als voor T en v vindt men dan reële waarden; alleen deze waarde van T kan in vele gevallen beneden het smeltpunt liggen, en dus niet worden waargenomen.

Maar de verdere discussie laat ik achterwege. Alleen wil ik op-

merken dat voor behoorlijke waarden van T, de kromme $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$, een gesloten kromme voorstelt, die met stijgende waarde van T inkrimpt, en tot een punt kan samentrekken.

Bij het vraagstuk, waarbij bij het plooipunt $\frac{dv}{dx} = \infty$ is, is dat geval het overgangsgeval waarbij $\frac{dv}{dx}$ positief of negatief is. Evenzoo is bij het vraagstuk waarbij $\frac{dv}{dx}$ in het plooipunt $= 0$ is, dit een overgangsgeval tusschen $\frac{dv}{dx}$ positief of negatief. De gevallen kunnen dus ook bestaan, waarbij, aan den kant der kleine volumes, in het plooipunt, de grootheid $\frac{dv}{dx}$ tegengesteld teeken kan hebben.

Gaat men den loop der lijnen $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ na, dan blijkt dat voor het bestaanbaar zijn van het geval noodig is, dat als $\frac{db}{dx}$ positief is, ook $\frac{da}{dx}$ en $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief zijn, terwijl de berekende temperatuur boven T_k van den 1sten component moet liggen als men de uitkomst wil toepassen op de coëxistentie van gas- en vloeistofphasen.

Bij den top hebben wij het limietgeval van twee coëxisteerende phasen. Is de raaklijn // x-as, dan is het molekulairvolume gelijk en zal de dichtheid proportioneel zijn aan $m_1(1-x) + m_2x$.

Zij

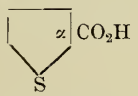
$$d = \frac{m_1(1-x) + m_2x}{v} \text{ en } d' = \frac{m_1(1-x') + m_2x'}{v} \text{ en } d'-d = \frac{(m_2-m_1)(x'-x)}{v}.$$

Als (m_2-m_1) en $(x'-x)$ het zelfde teeken hebben is $d'-d$ positief. Daar als de eerste component de kleinste molekuul grootte heeft $x'-x$ negatief is, moet m_2-m_1 ook negatief zijn, wat bij helium en waterstof vervuld is.

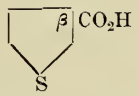
Trouwens wij kunnen door $\frac{m}{b}$ de limietdensiteit eener stof voorstellen, en de regel zou dan gelden: Als de vluchtigste stof de grootste limietdensiteit heeft, zal de gasphase spec. zwaarder kunnen zijn dan de vloeistofphase. Bij Helium is waarschijnlijk de limietdensiteit gelijk aan die der zware metalen. Uit de onderstelling dat het een afsplitsingsproduct van zware metalen is, volgt dat reeds met zekere mate van waarschijnlijkheid.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet, mede namens den Heer Dr. G. L. VOERMAN, eene mededeeling over: *„Het α- en het β-thiopheenzuur."*

In 1886 is door V. MEYER omtrent deze zuren (die hij ook ontdekte) een zeer merkwaardig onderzoek gepubliceerd. [1]) In hoofdzaak komt dit hierop neer, dat naast de twee theoretisch mogelijke monocarboonzuren van het thiopheen



Smp. 126°.2



Smp. 138°.4

nog een derde isomeer werd verkregen, *α*-thiopheenzuur, van een smeltpunt 117.5—118°, dat echter in zijne derivaten, zooals het amied, het phenylureumderivaat van het amied, het amidoxiem, het thienon $(C_4H_3S)_2CO$, zoo volkomen op de overeenkomstige derivaten van het *α*-zuur geleek, dat zij voor identiek moesten verklaard worden, ware het niet, dat uit de *α*-derivaten weder het *α*-zuur met zijn smp. 118°, uit de *α*-derivaten het *α*-zuur, smp. 126°, werd teruggekregen. V. MEYER drukt zich zelf aldus uit: „Die Vergleichung der *α*- und *α*-Säure ergab immer von Neuen das merkwürdige Resultat, dass die beiden Säuren wirklich in ihren Eigenschaften durchaus verschieden sind, und dass die Verschiedenheiten sich als constante, durch keinerlei Reinigung oder Umwandlungen zu entfernende Eigenschaften erwiesen; dass aber alle Derivate der beiden Säuren in ihren physikalischen Eigenschaften absolut zusammenfallen und für identisch (im gewöhnlichen Sinne) erklärt werden müssten, wenn sie nicht die Eigenschaft besässen, dass jedes aus der *α*-Säure dargestellte Derivat bei der Rückführung auch wieder *α*-Säure, jedes *α*-Derivat dagegen *α*-Säure lieferte."

Daar het *α*-zuur o.a. door oxydatie van teerthiotoleen was verkregen, hetgeen een mengsel van *α*- en *β*-thiotoleen is, vermoedde V. MEYER, dat dit *α*-zuur toch een mengsel van *α*- en *β*-zuur zoude zijn, en het gelukte hem ook inderdaad om door oxydatie van een mengsel der beide thiotolenen in bepaalde verhouding, of ook door langzame kristallisatie van een mengsel van *α*- en *β*-zuur uit koud water, een zuur te verkrijgen, dat met het *α*-zuur geheel overeenkomstig was. Hiermede was nu wel is waar eene belangrijke schrede voorwaarts gedaan, maar het gedrag van zulk een mengsel, alsmede van de daarvan verkregen derivaten was toch nog altijd hoogst merkwaardig.

[1]) A. **236**, 200; zoo ook V. MEYER, die Thiophengruppe bl. 188—207.

Desalniettemin heeft, sinds dit uitvoerige onderzoek van V. Meyer, niemand zich in de verloopen 20 jaar meer met het onderzoek dezer zuren bezig gehouden, hoewel de ontwikkeling der phasenleer kon doen verwachten, dat het dier leer mogelijk zoude zijn, een nader inzicht in de boven beschreven verschijnselen te geven.

De vermoedelijke oorzaak daarvan moet wel daarin gezocht worden, dat deze zuren zeer moeielijk toegankelijk zijn, waardoor zij, die zich met onderzoekingen over de phasenleer bezighouden, van de bereiding dezer praeparaten zijn teruggeschrikt. Toen dan ook de Heer Voerman op mijn verzoek de nadere bestudeering dezer zuren op zich nam was het ons duidelijk dat het eerste wat er te doen viel, zoude zijn om eene betere bereidingswijze dezer stoffen te vinden.

Inderdaad is ons dit ook voor het α-zuur op bevredigende wijze gelukt. Wat het β-zuur betreft, hebben wij wel een andere en ook betere bereidingswijze uitgewerkt, maar zij is toch door de nog altijd geringe opbrengst gebrekkig gebleven. Van daar dan ook, dat wij ons voorloopig hebben moeten bepalen tot een onderzoek der zuren zelf, dat der derivaten uitstellende, totdat meer materiaal zal verkregen zijn.

Bereiding van α-thiopheenzuur. Door V. Meyer en zijne leerlingen werd dit zuur het beste verkregen door oxydatie van propiothienon $C_4H_3S.COC_2H_5$, daar de oxydatie van het veel gemakkelijker toegankelijke acetothienon $C_4H_3S.COCH_3$ een mengsel van α-thiopheenzuur en thienylglyoxylzuur leverde, dat vrij lastig te scheiden was. Het is ons gelukt om het acetothienon nagenoeg quantitatief in α-thiopheenzuur over te voeren, waarbij wij van de volgende overwegingen uitgingen. Oxydeert men een methylketon, dan heeft de ervaring geleerd, dat de methylgroep vrij gemakkelijk tot carboxyl wordt, waardoor dus een glyoxylzuur wordt verkregen: $R.CO.CH_3 \rightarrow R.CO.CO_2H$. Tracht men echter dit glyoxylzuur verder af te breken tot het overeenkomstige carboonzuur: $R.CO.CO_2H \rightarrow R.CO_2H$, dan gaat dit moeielijk en het oxydatiemiddel grijpt daarbij ook de groep R aan, waardoor de opbrengst aan het gewenschte carboonzuur meestal onvoldoende wordt. Nu heb ik echter voor eenigen tijd een methode gevonden om zuren $R.CO.CO_2H$ quantitatief in $R.CO_2H$ over te voeren; het is de aanwending van waterstofsuperoxyd die dit mogelijk maakt, waardoor eene gladde splitsing volgens het schema:

$$\begin{matrix} R.CO.CO_2H \\ HO\ \ OH \end{matrix} = R.COOH + CO_2 + H_2O$$

wordt verkregen. Deze methode heeft hier ook tot het gewenschte doel gevoerd. De oxydatie van het acetothienon wordt dus in tweeën uitgevoerd, eerst de vorming van het thienylglyoxylzuur, dat vervol-

gens tot α-thiopheenzuur geoxydeerd wordt. De practische uitvoering dezer processen geschiedde als volgt:

Het acetothienon werd volgens de methode van FRIEDEL en CRAFTS uit thiopheen met zeer goede ophrengst bereid. Het thiopheen werd door distillatie van Na-succinaat met P_2S_3 zelf verkregen. 11.5 gr. keton en 12 gr. natriumhydroxyd werden in 1 L. water gebracht en hierbij langzaam eene oplossing van 42 gr. K-permanganaat in 1 L. water opgelost, gegoten, telkens met de toevoeging van eene nieuwe hoeveelheid waehtende tot van de vorige portie de violette kleur in groen is overgegaan. Gewerkt werd bij gewone temperatuur.

Nadat alle K-MnO_4 was toegevoegd bleef de vloeistof een nacht staan; men verwarmde deze kort op een waterbad totdat de groene kleur verdwenen was, filtreerde van het bruinsteen af en dampte in tot $^1/_4$ L. Zonder nu eerst het thienylglyoxylzuur af te zonderen wordt bij deze vloeistof, nadat zij met zooveel zoutzuur is voorzien dat hare reaetie nog maar zwak alkalisch is, 9 gr. 30 $^0/_0$ig waterstofperoxyde gevoegd, met zijn eigen volume water verdund. Men laat nu eenige uren bij gewone temperatuur staan en verwarmt ten slotte eenige oogenblikken op een waterbad. Door aanzuren der vloeistof slaat thans het grootste deel van het gevormde α-thiopheenzuur bijna geheel zuiver neer; uit de moederloog laat zich door uitschudden met aether nog een kleine hoeveelheid winnen. Door omkrystalliseeren uit water en door distillatie in vacuo is het zuur geheel zuiver en vrij van thienylglyoxylzuur te verkrijgen. De opbrengst bedraagt ruim 9 gram.

De bij 24°.9 verzadigde oplossing van α-thiopheenzuur bevat 0.75 $^0/_0$.

Bereiding van β-thiopheenzuur. V. MEYER heeft dit uitgevoerd door β-thiotoleen te oxydeeren met K-permanganaat in zeer verdunde koude oplossing. De opbrengst aan β-zuur was hierbij zeer slecht, nl. van 5—8 $^0/_0$ van het gebruikte thiotoleen. Nadat wij van allerlei wijzigingen in deze directe oxydatiemethode hadden beproefd, zonder echter tot een beter resultaat te komen, besloten wij een indirecten weg in te slaan, door eerst de zijketen te chloreeren, uit het thienalchloride het aldehyd te maken en dit ten slotte tot zuur te oxydeeren:

$$C_4H_3S \cdot CH_3 \rightarrow C_4H_3S \cdot CHCl_2 \rightarrow C_4H_3S \cdot CHO \rightarrow C_4H_3S \cdot COOH.$$

Gedachtig aan het onderzoek van VAN DER LAAN [1]) omtrent de bromeering van toluol, waarbij bleek dat bij aanwezigheid van PCl_5, de substitutie in de zijketen bevorderd wordt, werd deze stof bij de chloreering van β-thiotoleen toegevoegd. De bovengenoemde processen lieten zich alle vrij glad doorvoeren, maar jammer genoeg werd ten slotte een sterk chloorhoudend zuur verkregen, doordien de chloreering zich blijkbaar ook tot de kern had uitgestrekt. Dit liet zich wel van chloor bevrijden door behandeling met Na-amalgama, maar een groot deel van het β-thiopheenzuur ging daarbij verloren, zoodat de opbrengst ten slotte niet grooter dan ca. 10 $^0/_0$ van het aangewende thiotoleen was.

Ziehier nog eenige bijzonderheden over de gevolgde werkwijze:

[1]) Deze verslagen deel **14**, 439 (vergad. v. 28 Oct. 1905).

Het β-thiotoleen werd zelf bereid door pyrowijnsteenzuur natrium met phosphortrisulfide te distilleeren. De chloreering geschiedde bij kooktemperatuur in het directe zonlicht, onder toevoeging van 10% PCl_5. Het reactieproduct wordt met water en calciumcarbonaat aan een opstijgenden koeler gekookt. Het aldehyd wordt met stoom overgeblazen en over de bisulfietverbinding gezuiverd. Uit 10 gr. thiotoleen worden ca. 5 gr. aldehyd verkregen. 3 gr. hiervan worden met 3.2 gr. $KMnO_4$ en 1.3 gr. kali (80% KOH bevattende) in 0.5 L. water geoxydeerd; na een nacht staan van het bruinsteen afgefiltreerd, het filtraat geconcentreerd en het β-thiopheenzuur door aanzuren gepraecipiteerd. De opbrengst is $\pm$ 3 gr. Het ontchlooren van dit product met Na-almalgama in verdund waterige oplossing duurt 15 à 20 dagen, waarbij een groot deel van het gewenschte zuur verloren gaat.

Voor de oplosbaarheid van het β-thiopheenzuur bij 25°.0 werd gevonden, dat de verzadigde oplossing 0.43 % zuur bevat.

Smeltlijn van mengsels der beide zuren. Volgens de tegenwoordige inzichten in de phasenleer lag het voor de hand om te vermoeden, dat de onmogelijkheid om deze zuren door kristallisatie te scheiden, daarin ligt, dat zij mengkristallen geven. Inderdaad is het aan den heer VOERMAN, door bepaling van de smeltlijn, met zekerheid gelukt om aan te toonen, dat zij eene onderbroken mengingreeks geven. De beginstolpunten zijn zeer scherp waar te nemen, de eindstolpunten niet; zij zijn echter met niet meer onzekerheid dan ca. 0°.5 belast.

Ziehier de lijst der begin- en eindstolpunten.

In bijgaande figuur zijn deze cijfers graphisch voorgesteld.

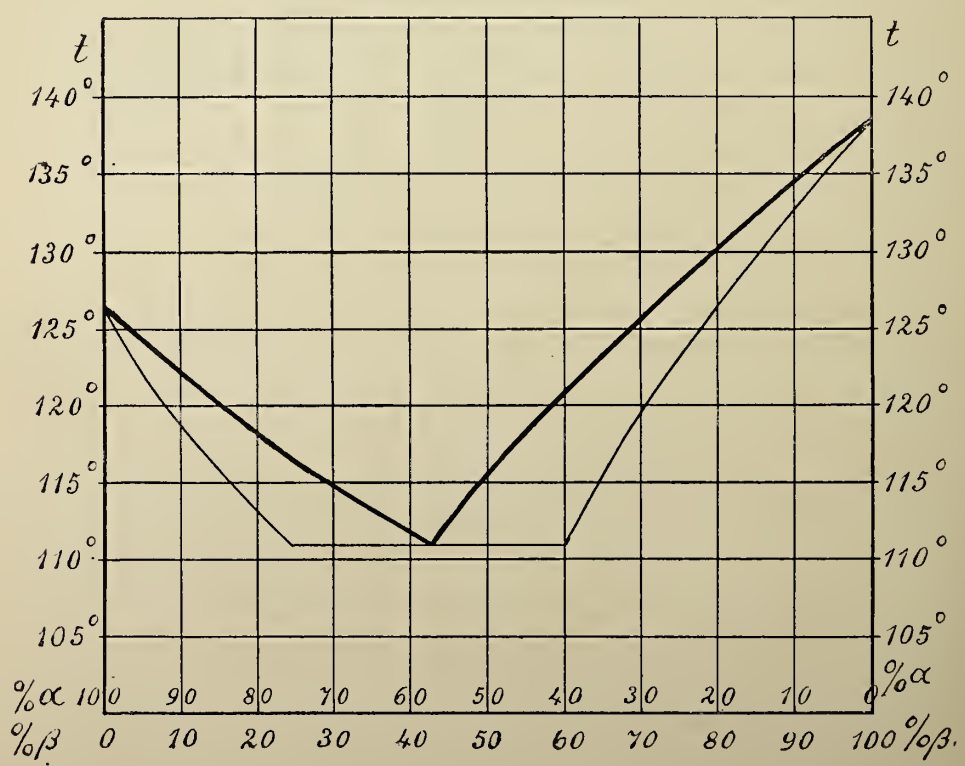


Fig. 1.

STOLPUNTEN VAN α EN β-THIOPHEENZUUR EN HUN MENGSELS.

% α	% β	1e stolpunt	2e stolpunt
100	0	126.°2	
99.01	0.99	125.4	123.°9—124.°4
98.25	1.75	125.1	
96.56	3.44	124.6	123.1—123.6
94.3	5.7	124.7	121.0
93.60	6.40	123.4	
90.60	9.40	122.2	
88.20	11.80	121.3	± 118
85.82	14.28	120.3	± 116.6
85.0	15.0	120.1	
79.45	20.55	117.7	113.5—114
77.45	22.55	117.2	112 —112.6
75.3	24.7	116.3	110.8—111.2
74.60	25.40	116.0	± 110.6
69.45	30.55	114.3	110 —111
66.20	33.80	113.3	110.5—110.8
63.35	36.65	112.5	110.8
59.70	40.30	111.5	110.5
58.0	42.0	111.0	110.7
55.0	45.0	112.6	110.8
50.85	49.15	115.0	110.7
42.50	57.50	119.6	id.
38.9	61.1	121.2	111.2
33.60	66.40	124.0	116.5—117.5
23.80	76.20	128.2	123—124 (±123.5)
14.0	86.0	132.6	129.5—129.8
5.4	94.6	136.3	134 —134.3
0	100	138.4	

Er blijkt uit, dat de reeks mengkristallen eenerzijds bij 25% β-zuur, anderzijds bij 61% onderbroken is, en dat er een eutectisch punt bij 42.5% β-zuur en bij eene temperatuur van 111° is.

Het kristallografisch onderzoek, dat Dr. JAEGER welwillend aan deze zuren en hunne mengsels heeft uitgevoerd, komt geheel tot hetzelfde resultaat. Dr. JAEGER deelt daaromtrent het volgende mede:

„Het *β-Thiopheenzuur* kristalliseert van de beide isomere verbindingen het gemakkelijkst in scherp begrensde kristalplaatjes.

Zoowel gesmolten en daarna gestold, als uit oplossingen kristalliseerend, vertoont de verbinding het mikroskopisch aanzien der onderstaande figuur. De kristallen zijn monoklien-prismatisch, en

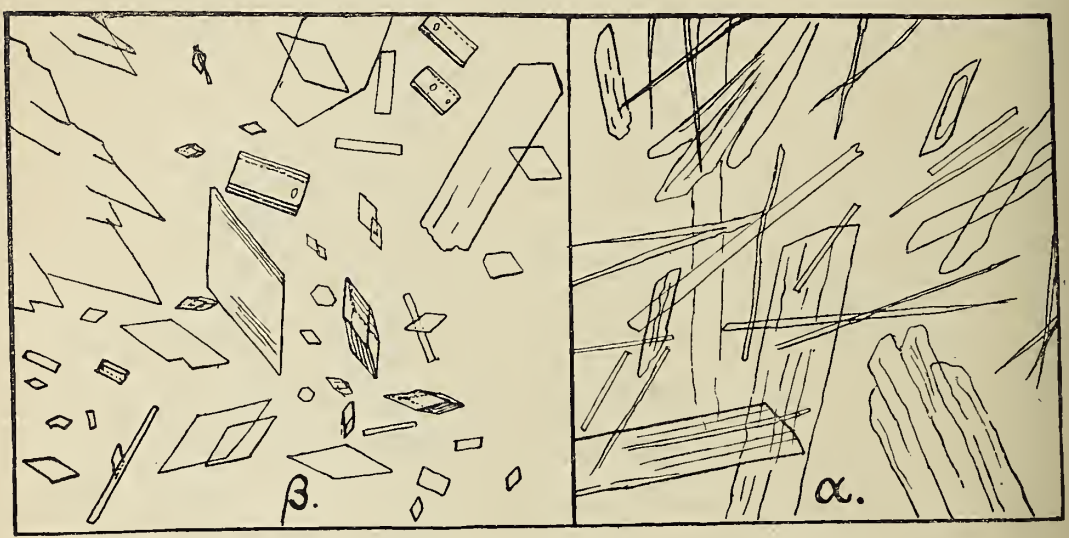


Fig. 2. Mikroskopisch beeld van α- en β-Thiopheenzuur.

wel kombinatie's der vormen: {001}, sterk vóórheerschend, {110} en {100}; de hellingshoek β wijkt aanzienlijk van 90° af, zoodat de kleinere individuën veelal rhomboëdervorm vertoonen door gelijkmatige ontwikkeling van {110} en {001}. Vaak zijn de plaatjes zóó dun, dat alleen een parallelogrammatische omtrek is waar te nemen, met zeer geringe afstomping van den scherpen hoek, die op 42° à 43° werd bepaald, door {100}.

Daarnevens komen ook rechthoekige plaatjes voor, welke, zooals 't onderzoek leert, ontstaan door uitgroeiïng van {100}, dus door verlenging volgens de *b*-as. Ofschoon oogenschijnlijk een tweeden vorm voorstellend, zijn zij echter geheel en al identiek met de parallelogrammatische fase.

Het optisch assenvlak is parallel {010}, en wel vallende langs de langste diagonaal der parallelogrammen, of loodrecht op de lengte-richting der meer naaldvormige individuen. In konvergent licht aan den rand van 't gezichtsveld ééne hyperbool met ringen

zichtbaar. Uiterst zwakke, geneigde dispersie, met $\varrho > v$; dubbelbreking negatief. De lengte-as der parallelogrammen, en de kortste afmeting (breedte) der meer naaldvormige individuën, is de richting van kleinere optische elasticiteit.

Het *α-Thiopheenzuur* kristalliseert uit oplosmiddelen of uit de smeltmassa in lange, meer of minder breede, naaldvormige individuën, welke gewoonlijk slechts rudimentaire begrenzing vertoonen, en morfologisch dus slecht definieerbaar zijn. Ofschoon de optische eigenschappen op monokliene symmetrie schijnen te wijzen, zou men uit de hier en daar optredende vormbegrenzingen eer tot trikliene symmetrie besluiten willen. De uitdooving der naalden is blijkbaar echter loodrecht op hunne lengte-richting georienteerd. Deze richting is, in tegenstelling dus met het β-derivaat, die van grootste elasticiteit; de kleinere optische elasticiteits-as valt dus met de lengterichting der naalden samen. 't Optisch assenvlak is loodrecht op de lengte der naalden georienteerd; in konvergent licht is ééne, zeer karakteristiek gekleurde hyperbool zichtbaar, ongeveer op $^2/_3$ van den diameter van 't gezichtsveld.

Enorm sterke dispersie, met $\varrho < v$; het teeken der dubbelbreking rondom de bijbehoorende bissectrix, is positief.

Mikroskopisch zijn beide isomeren dus door de volgende eigenschappen uitermate gemakkelijk te onderscheiden:

β-Thiopheenzuur:	*α-Thiopheenzuur.*
Parallelogramm. begrenzing, of korte staafjes van rechthoekigen vorm.	Lange, zeer dunne naalden, met meestal rudimentaire begrenzing.
Zeer hooge interferentie-kleuren.	Grauwe of weinig in 't oog vallende kleuren.
Eéne optische as met ellipt. ringen, zeer zwakke dispersie: $\varrho < v$.	Eéne gekleurde hyperbool; zeer sterke dispersie: $\varrho < v$.
Negatieve dubbelbreking.	Positieve dubbelbreking.
Monokliene symmetrie; hoek der parallelogrammen is 42° à 43°.	Trikliene of monokliene symmetrie.
Optisch assenvlak bij de parallelogrammen, // de langste diagonaal, bij de naalden loodrecht op de lengte-richting.	't Optisch assenvlak is loodrecht op de lengte-richting der naalden. Deze laatste valt samen met de kortste elasticiteits-as der kristallen.
De grootste elasticiteits-as is evenwijdig aan de lengterichting der naalden, of aan de kortste diagonaal der parallelogrammen	

Wegens de verdamping der beide stoffen, is men verplicht, onder 't kristallisatie-mikroskoop steeds met een dekglaasje te werken.

Ik heb, bij menging der twee isomeeren, het volgende kunnen waarnemen, bij opsmelting en stolling der mengsels.

a. Mengsel met 61,6 % β-zuur, levert uitsluitend *mengkristallen*, en wel van den β-vorm; *uiterst weinig* der α-kristallen is niet onwaarschijnlijk.

b. Mengsel met 42 % β-zuur, levert voornamelijk *mengkristallen* van den α-vorm; aan den rand der smeltmassa daarnevens echter, *zeer kleine*, weinig gekleurde parallelogrammetjes van den β-vorm. Negatieve mengkristallen in den α-vorm (zie onder *d*), werden hier *niet* waargenomen; slechts positieve, met $\varrho < v$.

c. Mengsel met 35,5% β-zuur, gedraagt zich bij stolling als onder *b*.

d. Mengsel met 22,5 % β-zuur, levert alleen mengkristallen van den α-vorm, en wel positief-, naast negatief-dubbelbrekenden, echter met $\varrho < v$, evenals 't α-zuur zelve.

e. Mengsel met 86 % α-zuur, levert alleen mengkristallen van 't α-type, met sterke dispersie $\varrho < v$, en positieve dubbelbreking."

Dr. JAEGER besluit uit een en ander:

„Er bestaat hier eene isodimorfe mengingsreeks met hiaat. Deze strekt zich uit van een gehalte aan 't β-zuur, dat $> 22{,}5$ %, tot mengsels met 61 à 62 % der β-verbinding. De mengkristallen van 't α-type worden door toevoeging der negatieve β-verbinding, steeds minder sterk optisch positief, en in de onmiddellijke nabijheid van den hiaat zelfs negatief; zij behouden echter de, voor de zuivere α-verbinding zoo karakteristieke, sterke dispersie, met $\varrho < v$.

Daarentegen hebben de mengkristallen van 't β-type, bij alle concentratie's, van 62 %—100 % negatieve dubbelbreking, en eene uiterst zwakke, geneigde dispersie."

V. MEYER vermeldt in zijne verhandeling, dat hij behalve het bovengenoemde α-zuur, nog verschillende andere mengsels van α en β-thiopheenzuur, door oxydatie van mengsels der beide thiotelenen verkregen, in handen heeft gehad, en dat deze bij gefractioneerde krystallisatie geene aanduiding van eene scheiding in hunne componenten gaven.

Deze waarneming kan de Heer VOERMAN echter niet bevestigen. Kristalliseerde hij nl. een mengsel van 85.8% α-zuur en 14.7% β-zuur, dat een stolpunt had van 120°.3, uit heet water om, dan was het stolpunt op 121°.6 gekomen, hetgeen met een mengsel van 89% α- en 11% β-zuur overeenkomt. Daar V. MEYER echter geene

temperatuur aangeeft, waarbij hij zijne gefractioneerde kristallisaties uitvoerde, bestaat de kans dat deze eene andere was dan bij VOERMANS experiment, hetgeen het verschil zoude kunnen verklaren.

De heer VOERMAN heeft zich ten slotte nog bezig gehouden met de bepaling van het geleidend vermogen der beide zuren en van hunne mengsels. De overweging hierbij was, dat daardoor mogelijkerwijze aanduidingen konden verkregen worden van eene vereeniging der twee zuren in oplossing: De waarnemingen zijn de volgende:

GELEIDINGSVERMOGEN VAN α-THIOPHEENZUUR BIJ 25°.

v	μ	α	100 k	
25	32.44	0.085	0.0314	
50	45.37	0.118	0.0319	
100	62.49	0.163	0.0319	
200	85.06	0.222	0.0318	$\mu_\infty = 382.7$
400	113.87	0.298	0.0315	
800	149.41	0.390	0.0312	
[1600	189.34	0.495	0.0303]	

Gemiddeld 0.0316

Hierin is v het volume waarin 1 mol. is opgelost, μ het moleculair geleidingsvermogen, α de dissociatiegraad, 100 k de dissociatieconstante volgens OSTWALD met 100 vermenigvuldigd.

Het gel. vermogen is vroeger bepaald door OSTWALD (Ph. Ch. **3**, 384) die voor 100 k 0,0302, en door BADER, (Ph. Ch. **6**, 313) die voor 100 k 0,0329 vond.

GELEIDINGSVERMOGEN VAN β-THIOPHEENZUUR BIJ 25°.

v	μ	α	100 k	
50	23.20	0.061	0.00783	
100	32.32	0.084	0.00779	
200	44.90	0.117	0.007795	$\mu_\infty = 382.7$
400	62.06	0.162	0.00784	
800	84.66	0.221	0.00785	
[1600	114.17	0.298	0.00793]	

Gemiddeld 0.00783

GELEIDINGSVERMOGEN VAN MENGSELS VAN $\alpha + \beta$-THIOPHEENZUUR BIJ 25°.

11% β
89% α
} thiopheenzuur.

v	μ	α	100 k
50	43.26	0.113	0.0288
100	59.49	0.155	0.0286
200	80.94	0.211	0.0284
400	108.05	0.282	0.0278
800	141.29	0.369	0.0270
1600	180.75	0.572	0.0264

33.33% β
66.66% α
} thiopheenzuur.

v	μ	α	100 k
33.333	31.79	0.083	0.0226
66.666	44.28	0.116	0.0227
133.333	60.86	0.159	0.0226
266.666	82.33	0.215	0.0221
533.333	109.83	0.287	0.0217
1066.666	143.38	0.375	0.0210

rechtlijnig (geïnterp. $v = 100$ $\mu = 52.57$ id. $v = 200$ $\mu = 71.59$)

50% β
50% α
} thiopheenzuur.

v	μ	α	100 k
50	35.12	0.092	0.0185
100	48.52	0.127	0.0184
200	66.01	0.172	0.0180
400	88.58	0.231	0.0174
800	117.15	0.306	0.0170
1600	151.7	0.396	0.0163

70.4% β
29.6% α
} thiopheenzuur.

v	μ	α	100 k
100	43.04	0.112	0.0143
200	58.63	0.153	0.0139
400	79.06	0.207	0.0135
800	105.02	0.274	0.0130
1600	138.20	0.361	0.0128

Het geleidingsvermogen van het zuivere β-zuur is vroeger bepaald door LOVÈN (Ph. Ch. **19**, 458) die vond

$$100\,k = 0{,}0078.$$

met welke waarde de door mij gevondene goed overeenstemt.

De invloed van de plaats van het zwavel-atoom ten opzichte van de carboxylgroep is zeer duidelijk.

Uit deze waarnemingen blijkt, dat de zuren in waterige oplossing op hun wederzijds geleidingsvermogen slechts zeer weinig invloed uitoefenen, daar het bij de mengsels gevonden geleidingsvermogen met dat hetgeen uit de samenstelling door rechtlijnige interpolatie te berekenen is, vrijwel overeenkomt. Een samentreden hunner moleculen in zulke oplossing kan hieruit niet aangenomen worden.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt een mededeeling aan „*Over de quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en hartswerking, naar aanleiding van onderzoekingen van den Heer* P. WOLTERSON." [1]).

Als proefdier diende de moerasschildpad (Emys orbicularis), waaraan met behulp van onpolariseerbare electroden van DONDERS [2]), door middel van condensatorladingen de rechter n. vagus werd geprikkeld, terwijl boezem en kamer volgens de suspensiemethode geregistreerd werden. De mica-condensators hadden een capaciteit van 0,02, 0,2 en 1 m. F., de voltage wisselde van een fractie van een volt tot 12 volt, een enkele maal zelfs meer. Hieruit werd de prikkelsterkte in ergs (resp. in Coulombs volgens HOORWEG) berekend. Slechts een gedeelte van deze, bij de lading door de zenuw passeerende, energie werkt als prikkel. Welk gedeelte dit is, blijft onbekend, maar wordt verondersteld in dezelfde proefreeks niet al te zeer te wisselen. In de typische proeven had een summatie van tien in een tempo vau $^1/_2$ sec. op elkaar volgende prikkels plaats, in bijzondere experimenten werden enkelvoudige prikkels of ook wel andere summaties onderzocht. Van vermoeienis is bij de gevolgde wijze van proefnemen weinig merkbaar, eerder van een iets gevoeliger worden van het stelsel van den n. vagus tegen het einde eener proefreeks.

Prikkeling van den rechter vagus geeft bij den schildpad vooreerst verlenging van den duur eener hartperiode [3]) en wel in dien zin,

[1]) Voor bijzonderheden zij naar diens weldra verschijnend proefschrift verwezen.

[2]) Onderz. Phys. Lab. Utrecht (3). Deel 1 p. 4, Pl. I. fig. 1. (1872).

[3]) De duur eener hartperiode gerekend van het voetpunt eener sinuscontractie, of als deze niet zichtbaar is eener boezemcontractie, tot aan het eerstvolgende voetpunt eener sinuscontractie resp. boezemcontractie.

dat in de 2e periode, na een tijdens de hartpauze invallende prikkeling, de diastolische helft der periode sterke vertraging ondergaat, terwijl in eenige aansluitende perioden een geringer wordende vertraging van het diastolische gedeelte der periode merkbaar is.

Vervolgens heeft de vagusprikkeling verzwakking van de samentrekking tengevolge, die geleidelijk duidelijker wordt en enkele perioden na de prikkeling haar maximum bereikt. Deze afname van het contractievermogen is primair, daar zij ook kan voorkomen, wanneer elke verandering in de automatie ontbreekt (b.v. bij prikkeling met één condensatorlading en bij prikkeling van den linker vagus). Eindelijk brengt vagusprikkeling in den regel een tonusverslapping tot stand, zelden een tonusverheffing. Veranderingen in het geleidingsvermogen hebben wij, bij dit proefdier en met condensatorladingen werkend slechts éénmaal, en dan toevalligerwijze zeer duidelijk, tusschen Si_s en A_s gezien.

De negatieve chronotropie geldt voor sinus, voorkamer en kamer in gelijke mate, de negatieve inotropie bestaat, uitsluitend voor den sinus en de voorkamer, is bij de kamer indien aanwezig zelfs meestal positief, de tonotropie ontmoet men in voorkamer en kamer.

Een latentie van het verschijnsel, gemeten door het tijdsverschil tusschen vagusprikkeling en vaguswerking, werd steeds waargenomen. Zij is het geringst voor de inotropie; reeds de eerste periode laat vaak een verzwakking der mate van contractie zien, die in de eerst volgende perioden nog verder toeneemt. De latentie der chronotropie is grooter, want eerst in de 2e, een enkele maal 3e periode, is een vertraging waarneembaar; daarentegen bereikt dit verschijnsel terstond zijn maximum. Inotropie en tonotropie vallen niet samen. Integendeel de maxima van uitwerking rangschikken zich naar tijdorde aldus: eerst maximum der chronotropie, dan maximum der tonotropie, eindelijk maximum der inotropie.

Wat de gevoeligheid voor vagusprikkels betreft, zij opgemerkt, dat de drempelwaarde der inotropie lager ligt dan de drempelwaarde der chronotropie en deze weer lager dan de drempelwaarde der tonotropie. Alzoo:

„Schwelle" inotropie $<$ „Schwelle" chronotropie $<$ „Schwelle" tonotropie.

Uit het in het algemeen ontbreken van dromotropie in onze proeven zou men geneigd zijn af te leiden, dat de „Schwelle" der dromotropie in casu nog hooger ligt.

De overtuiging heeft algemeen veld gewonnen, dat de rhythmische processen, die aan de hartpulsaties ten grondslag liggen, op een chemisme in de hartspier berusten. Om, afgezien van den grond-

legger der myogene theorie W. Th. Engelmann, een paar schrijvers van autoriteit te noemen, Fano en Botazzi in Richet's Dictionnaire en Hofmann in Nagel's Handb. staan op dit standpunt[1]). Ook proefondervindelijke uitkomsten kunnen tot steun worden aangevoerd. Snijder[2]) toonde aan, dat de frequentie der samentrekkingen met betrekking tot de temperatuur geheel de wet volgt, die door van 't Hoff-Arrhenius voor chemische reacties is opgesteld[3]), en in onafhankelijk van hem door J. Gewin genomen proeven, werd dit volkomen bevestigd.[4]) In tegenstelling tot den invloed der temperatuur is die van den druk zeer gering, hetgeen strookt met de geringe beteekenis van den omringenden druk voor zoogenaamd gecondenseerde stelsels, d.w.z. stelsels, waarin geen gasvormige phasen voorkomen.

Voor de automatie schijnt het mij dus wel vast te staan, dat zij op den grondslag van chemische processen moet berusten.

Voor de overige harteigenschappen: geleidingsvermogen, plaatselijke prikkelbaarheid, samentrekkingsvermogen en toniciteit is de beslissing moeilijker. De wet van van 't Hoff-Arrhenius betreffende den samenhang der reactie-snelheid met de temperatuur kan enkel toegepast worden, indien men omtrent den tijdsduur der reactie ingelicht is. Welnu, de opzettelijk gemeten snelheid van geleiding neemt tot zeker optimum toe met de temperatuur[5]), terwijl de duur der contracties in overeenstemming hiermee verkort wordt[6]). De plaatselijke prikkelbaarheid echter is van uit dit oogpunt in het geheel niet bestudeerd geworden, terwijl in het samentrekkingsvermogen de tijdfactor vooralsnog ontbreekt. De samentrekking eener spier en ook die van de hartspier wordt intusschen zoo algemeen als een echt chemisch proces beschouwd, dat de lezer dezes haar wel zonder betoog tot het kader der chemische verschijnselen zal willen brengen. Betreffende de toniciteit eindelijk tasten wij volstrekt in het duister, hoewel wij weten, dat door temperatuursverhooging hoofdzakelijk toestandsverandering teweeg wordt gebracht, zoodanig, dat de tonus definitief is opgeheven.

---

[1]) Fano en Botazzi, Richet's Dict. d. physiologie t. IV. p. 316. Hofmann, Nagel's Handb. d. physiologie, Bd. I. 1. S. 244.

[2]) Snijder Univ. of California Publications II. p. 125. 1905.

[3]) E. Cohen, Voordrachten. Blz. 236 1901.

[4]) J. Gewin, Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5). Dl. VII, p. 222.

[5]) W. Th. Engelmann. Onderz. Physiol. Lab. Utrecht (3e R.) III p. 98; boven het optimum vermindert de snelheid v. geleidingvermogen weer.

[6]) Hofmann l. c. p. 247. Onlangs bevestigd door V. E. Nierstrasz, zie diens proefschrift Utrecht 1907, p. 145 fig. 22: een temperatuurdaling van 9° gaf een toename van den systoleduur tot het dubbele.

Bij de bewerking van zijn proefschrift is de Heer WOLTERSON hoofdzakelijk in aanraking gekomen:

1°. met veranderingen in de automatie (chronotropie);

2°. met veranderingen in het contractievermogen (inotropie),

beiden, gelijk ik meen te hebben aangetoond, exquisiet chemische verschijnselen.

Voor het beloop van chemische processen geldt de wet van GULDBERG en WAAGE [1]) en dus zullen wij haar op de door ons behandelde processen mogen toepassen. Daartoe zullen wij voor ons bijzonder geval het begrip „tijden van gelijken omzet" nader moeten vastleggen.

Onder „tijden van gelijken omzet" verstaat men de tijden, waarin een bepaalde reactie tusschen 2 nauwkeurig nagegane en in de verschillende gevallen overeenkomstige eindpunten heeft plaats gehad. De totale duur van eene hartsperiode is zulk een karakteristiek tijdsverloop, waarvan het begin en het einde wel niet na analyse met de balans kan worden beoordeeld, maar toch door biologische kenmerken bepaald is. De tijdsafstand tusschen het begin en het einde eener hartperiode mag als een tijd van gelijken omzet worden beschouwd, indien althans geen inotrope veranderingen optreden [2]) en de door het hart te overwinnen mechanische weerstand gelijk is gebleven.

Dit vooropgesteld, kunnen wij terstond de grondvergelijking der wet van GULDBERG en WAAGE

$$\varphi = kC^n$$

in toepassing brengen. Hierin vertegenwoordigt k eene konstante, de konstante der reactiesnelheid, C is de hoeveelheid in omzetting verkeerende stof, n de exponent, die de zoogenaamde orde der omzetting bepaalt, terwijl φ de reactiesnelheid aangeeft. Omtrent de exponent n laat zich voor het hart a priori niets bepalen. Misschien, dat toxicologische proeven, waarbij men mag aannemen, dat de hoeveelheid in omzetting verkeerende stof vermindert, dienaangaande iets zouden kunnen leeren; wellicht ook, dat vermoeienisproeven een vingerwijzing zouden kunnen geven; op dit oogenblik echter ontbreken alle gegevens. Of er tusschenreacties zijn en in welk aantal laat zich niet vaststellen. Onder deze omstandigheden neem ik geheel willekeurig aan, dat in casu het eenvoudigste geval verwezenlijkt is, en de exponent $= 1$ is. Mocht later anders blijken, dan zal men onze berekeningen slechts mutatis mutandis hebben toe te passen,

---

[1]) E. COHEN. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1901, Dl. I, blz. 58., vergelijk ook ZWAARDEMAKER, ibidem 1906, Dl. II, blz. 868.

[2]) In den ventrikel brengt vagusprikkeling geen inotropie teweeg.

zonder dat haar zin daardoor gewijzigd wordt. De formule luidt in dit eenvoudig geval:

$$\varphi = k\,C.$$

Bij vagus prikkeling komt een zeer uitgesproken wijziging van de tijden van gelijken omzet tot stand. De reactiesnelheid van het hypothetische chemische proces, dat aan de automatie ten grondslag ligt, zal derhalve een zeer aanzienlijke verandering ondergaan. Zulk eene verandering kan niet plaats hebben, tenzij òf k òf C zijn gewijzigd.

In de literatuur zijn beide voorstellingen gehuldigd, doch alleen de voorstelling, dat k wordt verandert, geeft tot heldere, doorzichtige uiteenzetting zonder verdere hulp-hypothesen aanleiding. Ook is zij het gemakkelijkst in overeenstemming te brengen met een recente verhandeling van MARTIN [1]) volgens welke de vagus-inhibitie op de inwerking van K-ionen berust en door temperatuursverhooging wordt tegengegaan. De beteekenis der Alkali- en Aardalkali-ionen voor de hartspier is ook na de talrijke onderzoekingen van J. LOEB en zijne volgers en kritici wel is waar nog geenszins opgehelderd, — zij worden door den een als oorzaak van den voortdurenden prikkelingstoestand der hartspier, als prikkel voor de automatie [2]), door den ander als toestandsvoorwaarde noodzakelijk tot het in oplossing blijven der werkzame bestanddeelen[3]) beschouwd, — in eenvoudige chemische binding met de hartsubstantie, waardoor deze onbruikbaar zou worden, treden zij stellig niet. Ware dit laatste het geval, dan zou de levensrekkende invloed der RINGER'sche oplossing en het merkwaardig antagonisme van Na en K eenerzijds en Ca anderzijds ten eenenmale onverklaarbaar zijn.

Het op den voorgrond brengen der hypothese, dat de vagus de konstante der reactiesnelheid wijzigt, heeft ons aanleiding gegeven tot de toepassing van de formule der katalytische versnelling eener chemische reactie. De katalytische versnelling is hier negatief. Men vindt de formule bij G. BREDIG nader ontwikkeld. Zij luidt:

$$\beta = k' - k = \frac{1}{(t'_2 - t'_1)} - \frac{1}{(t_2 - t_1)}.$$

Op onze experimenten aangewend, den normalen periodeduur door $(t_2 - t_1)$, den gewijzigden periodenduur gedurende de hoofdvertraging door $t'_2 - t'_1$ aanduidend, bracht zij eene betrekking aan het licht, die standvastig voorhanden blijkt tusschen de sterkte van den vagus-

[1]) MARTIN. Amer. Journal of Physiol. Vol. XI, p. 370, 1904 (MARTIN zelf schijnt intusschen eene verbinding van K-ionen aan C aan te nemen).

[2]) WENCKEBACH. Die Arythmie etc, eine physiol.-klinische Studie. Leipzig. 1904.

[3]) H. J. HAMBURGER. Osmotischer Druck u. Ionenlehre Bd. III, p. 127.

Proef 8. VI. '06. Emys orbicularis. Rechter n. vagus op onpolariseerbare electroden geprikkeld met ladingsstroomen. Capac. v. d. cond. 1 m. F. Aantal prikkels 10; 2 per secunde. Tusschen de prikkelreeksen ingeschoven rustpauzen 4 minuten; buitentemp. van 18° Celsius.

Micro-coulomb	Ergs	Aanw. vertr. in %	Tot. vertr. in %	β
0.80	3.20	13	23	—0.0392
0.82	3.36	92	143	—0.1662
0.84	3.53	95	133	—0.1694
0.86	3.69	282	347	—0.2555
0.88	3.87	320	385	—0.2716
0.90	4.05	320	364	—0.2635
0.92	4.23	322	360	—0.2648
0.94	4.42	346	364	—0.2765
0.96	4.61	337	366	—0.2575
0.98	4.80	337	398	—0.2667
1.00	5.00	343	398	—0.2679
1.04	5.41	333	394	—0.2570
1.08	5.83	346	410	—0.2765
1.12	6.27	333	367	—0.2661
1.20	7.20	330	322	—0.2480
1.28	8.19	346	373	—0.2592
1.36	9.25	336	370	—0.2575
1.52	11.50	343	374	—0.2679
1.68	14.11	360	421	—0.2790
1.84	16.93	340	377	—0.2673
3.68	67.71	371	405	—0.2723
5.52	152.35	371	418	—0.2723
7.36	270.85	371	411	—0.2723
9.20	423.20	357	377	—0.2702
11.04	609.40	333	347	—0.2661
0.80	3.20	330	343	—0.2654

prikkel eenerzijds en de mate van vertraging, gelijk β die kennen doet, anderzijds. (Uit de bezichtiging der door het hart geregistreerde curven wel is waar zou men kunnen willen afleiden, dat de vertraging in hoofdzaak geldt voor het diastolische gedeelte van het proces, maar daar voor dit stuk op zich zelf de tijden van gelijken omzet niet scherp zijn vast te stellen, omvatten onze berekeningen het geheele proces.)

Met het aangroeien van den vagusprikkel neemt zeer geleidelijk de vertraging toe, totdat een bepaalde maat bereikt is; van dat oogenblik af blijft de reactiesnelheid van het hypothetische proces der automatie dezelfde, hoe ook de sterkte van den prikkel moge klimmen. Slechts door den duur van den vagusprikkel grooter te nemen, kan men nieuwe vertraging teweegbrengen, en dan vrijwel evenredig aan de uitbreiding, welke men den prikkelduur geeft. Voor een verwarmd hart geldt geheel hetzelfde.

Proef 15. VI. '06. Emys orbicularis. Rechter n. vagus. Onpolariseerbare electroden. Ladingsstroomen. Capac. 0,2 m. F. Aantal prikkels 10; 2 per secunde. Rustpauzen tusschen de prikkelreeksen 2 minuten. Proefdier in 0,6 % Na Cl opl. tot 28° C. verwarmd.

Micro-coulomb	Ergs	Eerste zichtbare vertraging, merkbaar in de 2de periode van de prikkeling, in %	2de dito in de 3de periode	Totale vertr.	β kol. 3	β kol. 4
0.48	5.76	13	139	224	—0.0785	—0.3889
0.496	6.15	20	99	155	—0.1111	—0.3334
0.504	6.35	20	139	205	—0.1111	—0.3889
0.52	6.76	26	152	224	—0.1404	—0.4035
0.552	7.61	26	152	224	—0.1404	—0.4035
0.616	9.48	26	152	218	—9.1404	—0.4035
0.744	13.83	28	199	270	—0.1587	—0.4762
1.116	31.13	21	157	270	—0.1261	—0.4579
5.58	155.65	28	157	284	—0.1587	—0.4579

Twee bijzonderheden verdienen vermelding:

1ste. dat de grootste vertraging niet in de 2de, maar 3de periode valt.

2de Bij prikkeling met 7,61, 9,48, 13,83 Ergs, treden in de kamer woelbewegingen op, gevolgd door de postundulatoire pauze, en wel in de eerste systole na de aanvankelijke vertraging.

De in beide gevallen aan het licht gekomene betrekking zou men vermogen op te helderen door met LANGLEY aan te nemen, dat de vagusvezels niet het hart rechtstreeks bereiken, maar eerst nog een station der intracardiale ganglien passeeren. Bestaat deze verhouding, dan zal de prikkelingstoestand van de praeganglionaire vezels eerst door overdracht in de gangliencellen aan de postganglionaire vezels kunnen worden medegedeeld. Dan echter geldt in deze gangliencellen de quantitatieve dwang van de wet van WEBER en mag eene betrekking, als zooeven geschetst, allerminst zonderling heeten. Tegen deze wijze van opvatten bestaat evenwel het bezwaar, dat vermoedelijk bij prikkeling der postganglionaire vezels (in den zoogenaamden n-coronarius [1]) in hoofdtrekken wel dezelfde betrekking zal worden gevonden. Indien hieromtrent niet enkel voorloopige maar ook beslissende proeven zullen zijn genomen, zal het ondoenlijk blijken de zooeven opgeworpen verklaring van het door ons beschreven verschijnsel te handhaven. De heer WOLTERSON wenscht er daarom nog een andere verklaringswijze naast te plaatsen, die naar het mij voorkomt, werkelijk eenige waarschijnlijkheid heeft, en zich aan de hypothese van MARTIN betreffende het wezen der vaguswerking aansluit.

Verondersteld, dat door vaguswerking in de receptieve substantie der hartspier zich eenige katalytisch werkzame stof — stel om de gedachten te bepalen MARTIN's *K*-ionen — afscheidt, dan zal de boven vastgestelde quantitatieve verhouding verklaard zijn, indien men mag aannemen, dat de door vaguswerking afgescheiden stof slechts in beperkte mate in het medium oplosbaar is. Immers bij geringe productie van den katalysator zal deze nog op kunnen lossen en de vertraging nog kunnen doen toenemen, maar wanneer verzadiging van het medium met den katalysator is opgetreden, is verdere afscheiding zonder gevolg. Men zal dan verder nog moeten aannemen, dat de nieuw gevormde katalysator terstond weder uit het medium diffundeert, of in onverschillige verbindingen wordt vastgelegd; want gelijk bekend, houdt de vaguswerking na korten tijd op. Alleen wanneer de duur van den prikkel wordt verhoogd en zich telkens en telkens opnieuw katalytische substantie afscheidt, kan het verdwijnen van den katalysator worden gecompenseerd en de vertraging aanhouden.

Het tweede chemische proces, waarmede ons het proefschrift van den heer WOLTERSON in aanraking brengt, dat der contractiliteit, kan niet aan de bovengevolgde behandeling onderworpen worden, daar de tijd-factor ontbreekt. Wel hebben wij getracht deze er in te brengen

[1]) Over den n. coronarius als postganglionaire zenuw zie J. GEWIN l. c. 82.

door de betrekking op te sporen, tusschen sterkte van vagus-prikkel en duur der inotrope werking, maar deze laatste is niet zelf een chemische reactie, doch slechts eene wijziging van de voorwaarden, waaronder periodiek zich herhalende reacties zijn gesteld. De negatieve inotropie kan hoogstens als eene vermindering van de grootheid C in de formule $\varphi = kC$ worden opgevat, m. a. w. aannemende, dat door vagusprikkeling de hoeveelheid der zooeven bedoelde in omzetting verkeerende stof vermindert. Ook dit is intusschen nog onzeker, want in de chemische reactie der automatie stelt C een deel van LANGLEY's receptieve substantie voor, die van de contractiele substantie verschillend is. Ik hel er dus toe over, de beide chemismen uit elkander te houden en de inotropie geheel op zichzelf te beschouwen.

Nemen wij dit standpunt in, dan is te vermelden: 1° dat bij zwakke aangroeiende vagusprikkels het inotroop-effect op sinus en voorkamer met de sterkte van den prikkel geleidelijk toeneemt, totdat een zekere mate van inotropie bereikt is, welke niet overschreden wordt, hoe sterk men de prikkel ook neemt; 2° dat een analoge verhouding geldt voor den *duur* van het inotroop-effect; 3° dat het pessimum van contractiliteit zich bevindt ongeveer op de grens van het eerste en tweede derde of vierde van den geheelen tijdsduur, voor welke de inotropie bestaat.

Samenvattend komen wij derhalve tot de conclusie:

A. de chronotropie, door vagusprikkeling te voorschijn geroepen, kan worden teruggebracht tot een negatief katalytische werking op een chemisme, dat aan de pulsatie ten grondslag ligt.

B. de inotropie laat per analogiam een soortgelijke opvatting toe, maar het is onmogelijk dit te staven, daar hier voorshands geen tijden van gelijken omzet kunnen worden opgespoord.

Als nevenuitkomst werd vastgesteld:

a. het bestaan van tweeërlei negatief chronotrope vezels in den rechter vagus van de schildpad.

b. een bijzonder groote gevoeligheid van het schildpadhart voor inotropie der voorkamer door vagusprikkeling, in die mate dat eene enkelvoudige condensatorontlading in staat is de bedoelde wijziging te voorschijn te roepen en deze ook bij gesummeerde prikkeling vroeger verschijnt en langer blijft dan de chronotropie.

c. het een enkel maal optreden van spontaan hartwoelen in een verwarmd schildpadhart, terstond na een door vagusprikkeling teweeggebrachte hoofdvertraging.

Mikrobiologie. — De Heer BEIJERINCK biedt voor de boekerij aan de dissertatie van den Heer N. L. SÖHNGEN; getiteld: *„Het ontstaan en verdwijnen van waterstof en methaan onder den invloed van het organische leven."*

Bij de aanbieding van de eerste dissertatie, bewerkt aan de Technische Hoogeschool tot verkrijging van het doktoraat in de Technische Wetenschap, wensch ik de aandacht van de Akademie te vestigen op het daarin bewezen feit, dat de mikroben der methaangisting in staat zijn, bij aanwezigheid van koolzuur, vrije waterstof te absorbeeren onder vorming van methaan, waardoor, naar het schijnt, de armoede aan waterstof in onze atmosfeer, ten minste ten deele kan verklaard worden. Bovendien worden in het geschrift nog andere mikroben genoemd, welke zich met methaan als koolstofbron kunnen voeden, dan de soort, welke in een vroegere, in de Verslagen 1905, pag. 289 opgenomen medeeling, door den Heer SÖHNGEN is beschreven, zoodat het geringe gehalte der atmosfeer ook aan dit, zoo rijkelijk in de natuur gevormde gas, alleszins begrijpelijk schijnt.

Voor de boekerij wordt aangeboden door den Heer MOLL: *„Mikrographie des Holzes der auf Java vorkommenden Baumarten"*, unter Leitung von J. W. MOLL bearbeitet von H. H. JANSSONIUS.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

blz. 374 r. 1 v. b. staat: recht schwach wahrnehmbar, schwächer
lees: recht schwach, wahrnehmbar schwächer

(11 Januari, 1907).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 Januari 1907.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 566.

Jaarverlag van de Geologische Commissie over het jaar 1906, p. 566.

Verslag van de Heeren T. PLACE en C. WINKLER over eene verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „On congenital ataxia in a cat", p. 569.

P. H. SCHOUTE: „Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke krommen met zes basispunten", p. 570.

F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Over een vierkomponenten stelsel met twee vloeibare phasen", p. 580.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „De astronomische straalbreking volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit ballontochten afgeleid", p. 587.

J. BOËSEKEN: „Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en P. VAN ROMBURGH), p. 599.

J. BOEKE: „Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei". (Aangeboden door de Heeren A. A. W. HUBRECHT en MAX WEBER), p. 607. (Met 2 platen).

C. H. WIND, A. F. H. DALHUISEN, W. E. RINGER: „Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee", (Eerste mededeeling) p. 616. (Met 1 plaat).

P. NIEUWENHUYSE: „Over het ontstaan van de anthracose der longen". (Aangeboden door de Heeren C. H. H. SPRONCK en C. A. PEKELHARING), p. 623.

F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 633.

J. H. MEERBURG: „Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijs". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 638.

A. P. N. FRANCHIMONT: „Bijdrage tot de kennis der werking van reëel salpeterzuur op heterocyclische verbindingen", p. 647.

W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ vlak van VAN DER WAALS: XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels". (Vervolg). (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. D. VAN DER WAALS), p. 655.

H. KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS: XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule", p. 659. (Met 4 platen).

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer van constant volume op de absolute schaal", p. 668. (Met 1 plaat).

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 677.

Errata, p. 677.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren BAKHUIS ROOZEBOOM, FRANCHIMONT, HOOGEWERFF en MOLL dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Brief van den Heer L. COUTURAT, namens de „Délégation pour l'adoption d'une langue internationale" waarbij bericht wordt gegeven dat deze aan de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen verzocht heeft de kwestie van een internationale taal op de agenda voor de eerstvolgende algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademiën te plaatsen. Zal behandeld worden in de vereenigde vergadering der beide afdeelingen.

3°. Circulaire van het 7de Internationaal Zoölogisch Congres te houden van 19—23 Augustus 1907 te Boston U. S. A., waarbij verzocht wordt dat de Akademie zich door een afgevaardigde zal laten vertegenwoordigen. De Heer HUBRECHT verklaart zich bereid die taak op zich te nemen.

4°. Bericht van het overlijden van Dr. W. Ritter VON HARTEL, Vice-president van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen. Is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Aardkunde. — De Heer LELY biedt aan: „*het Verslag van de Geologische Commissie over het jaar* 1906".

In den loop dezes jaars hadden de volgende veranderingen plaats in het personeel der Commissie.

De Heer G. VAN DIESEN legde tot ons leedwezen zijn lidmaatschap neder toen hij den 21sten Mei ll. den leeftijd van 80 jaren bereikt had. In zijne plaats werd door de Akademie benoemd de Heer H. E. DE BRUIJN. In de plaats van Prof. SCHROEDER VAN DER KOLK, die ons in het vorige jaar ontviel, werd door de Akademie benoemd Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF.

In het afgeloopen jaar werden ons geene mededeelingen omtrent grondboringen of terreininsnijdingen gedaan door Ingenieurs, die bij den Rijks en Provincialen waterstaat of bij particuliere grondwerken werkzaam zijn.

Van onzen trouwen medewerker Dr. J. LORIÉ hebben wij in Maart j.l. een uitvoerig geologisch onderzoek ontvangen over de Geldersche vallei. Daarover is aan de Akademie verslag uitgebracht

in de vergadering van April en tot de opneming in de werken der Akademie besloten. Het is sedert in het licht verschenen als no. 35 van de Mededeelingen der Commissie. Het bevat eene beschouwing over den geologischen bouw der Geldersche vallei, in verband met de vraag of een oude Rijntak door die vallei heeft gevloeid, en voorts eene beschrijving van veertien boringen welke in die vallei in 1904 verricht zijn.

Van Dr. H. G. Jonker ontvingen wij eene bijdrage bevattende een lijst van de geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland, van af het jaar 1734 tot heden. Deze 1300 nummers omvattende lijst mag van groot gemak geacht worden voor de beoefenaars der Nederlandsche geologie. In de November-vergadering is verslag daarover uitgebracht, en besloten haar in de werken der Akademie op te nemen. Zij zal in het jaar 1907 als no. 36 van de mededeelingen in het licht verschijnen.

Hebben wij in ons vorig verslag medegedeeld, dat leerlingen van wijlen ons betreurd medelid Prof Schroeder van der Kolk onder leiding van Prof. van Loon de vier laatste bladen der stafkaart in de door Prof S. v. d. K. uitgekozen strook gekaarteerd hebben, het kwam der Commissie wenschelijk voor in den afgeloopen zomer de kaarteering van nog enkele aangrenzende bladen, die de oost-westelijke strook met de noord-zuidelijke strook verbinden, daaraan toe te voegen. In plaats van Prof. van Loon, die door andere bezigheden verhinderd werd om de leiding van dat werk in dit jaar op zich te nemen, heeft Prof. Grutterink te Delft zich daarmede willen belasten, waarvoor wij hem dankbaar zijn. Aan het werk hebben deelgenomen vijf mijn-ingenieurs en vijftien candidaat mijn-ingenieurs. Zij hebben de bladen Roozendaal, Oosterbeek en Arnhem gekaarteerd in de maanden Augustus en September [1]).

De Heer Waterschoot van der Gracht onlangs als Ingenieur Direkteur der Rijksopsporing van Delfstoffen aan Dr. F. Beyerinck opgevolgd, heeft bij schrijven van 28 Juni ll. zich tot de Akademie gewend en bereid verklaard om bij zijne onderzoekingen zich met de Geologische Commissie der Akademie in aanraking te

---

[1]). Blad Roozendaal no. 470 door de Heeren: O. J. van der Elst M. I. als ploeghoofd en als medewerkers B. H. van der Linden, J. C. Schagen van Soelen, W. D. Munniks de Jongh, J. van Duynen, L. Knoppert. Blad Oosterbeek no. 490 door de Heeren: E. A. Douglas M. I. als ploeghoofd, en als medewerkers; W. A. J. Aernout, K. A. Biegman, M. G. F. Soehnlein, E. C. N. van Hoepen, A. Valk. Blad Arnhem no. 491, door de heeren: I. J. J. M. Schmutzer M. I. als ploeghoofd, en als medewerkers, M. H. Caron, C. D. Keen, L. Leger, K. L. Löb, A. L. W. E. van der Veen, G. E. J. Wiessing.

stellen, overeenkomstig den wensch, dien de Akademie in haar schrijven van 20 Februari 1904 aan zijne Excellentie den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid heeft geuit.

De Heer W. v. d. Gr. heeft ons medegedeeld dat de diepe boringen naar steenkolen in Noord Limburg en thans ook in Noord Brabant eigenaaardige en ten deele onverwachte feiten betreffende den geologischen bouw van den ondergrond aan het licht hebben gebracht. Verschillende gegevens, die allengs bekend zijn geworden, maken het wenschelijk, om nog in andere streken, met name in het Oosten van ons land, op de aanwezigheid van technisch ontginbare delfstoffen onderzoekingen in de diepte in te stellen. Bij dit alles zal hij eene samenwerking met die Geol. Commissie op prijs stellen, met name bij het onderzoek van de bovenste grondlagen (alluvium, diluvium en tertiair) die anders onbewerkt zouden blijven. Hij heeft daartoe den Minister voorgesteld ons eene volledige serie der verkregene en nog te verkrijgen grondmonsters aan te bieden, en zal eene verzameling derzelve in duplo aanleggen en tevens eene handstukken-verzameling van de bij de kernboring aangetroffen gesteenten.

Wij hebben ons tot die eventueele samenwerking bereid verklaard. Tengevolge daarvan heeft al dadelijk een mondeling overleg tusschen den Heer W. v. d. Gr. en twee onzer leden plaats gehad, waarbij deze kennis hebben genomen van de wijze waarop de boringen verricht en de aardmonsters verzameld worden, die voor het geologisch onderzoek en voor de bestudeering der gevonden fossielen geschikt zijn.

Na deze bespreking heeft de Heer W. v. d. Gr. aan ons medelid Molengraaff te Delft eene volledige verzameling gezonden van al de duplikaten der tot nu verkregen boormonsters. De vrij talrijke fossielen zijn nog niet voldoende door hem bewerkt en gesorteerd om de duplikaten reeds nu aan te bieden, maar deze zullen weldra volgen.

Is de Commissie daardoor reeds in het bezit gekomen van eene belangrijke verzameling aardmonsters uit de diepere lagen in gedeelten van Limburg en Noord-Brabant, in een volgend jaarverslag hopen wij eenige vruchten van die aanwinst en tevens van de wetenschappelijke samenwerking met den Heer W. v. d, Gr. ten opzichte van de thans verrichte diepboringen te kunnen mededeelen.

Ten slotte hebben wij de eer U voor te stellen:

1e. den dank der Akademie te betuigen aan Prof. Grutterink voor de leiding in den afgeloopen zomer van de werkzaamheden bij de kaarteering;

2e. aan Z. E. den Minister van W. op nieuw eene toelage van duizend gulden voor het jaar 1908 aan te vragen ter bestrijding van de kosten voor het geologisch onderzoek van Nederland.

C. LELY, *voorzitter*.
G. A. F. MOLENGRAAFF.
K. MARTIN.
H. E. DE BRUIJN.
J. M. VAN BEMMELEN,
Sekretaris.

Overeenkomstig de voorstellen der Geologische Commissie wordt besloten.

Physiologie. — De Heer WINKLER leest het volgende verslag over eene verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN, getiteld: *„On congenital ataxia in a cat"*.

„On congenital ataxia in a cat" is de titel van een opstel door DR. J. W. LANGELAAN, hoogleeraar te Leiden, aangeboden tot plaatsing in de verhandelingen der Akademie.

De schrijver heeft door toevallige omstandigheden een jong katje in bezit gekregen, dat tijdens het leven wegens bizondere bewegingsstoornissen het vermoeden wekte van te lijden aan een congenitale afwijking in de kleine hersenen.

De schrijver heeft die bewegingsstoornissen nauwkeurig beschreven en gephotografeerd. Toen het dier in een toeval was gebleven, bleek hem bij de autopsie, dat er inderdaad een belangrijke atrophie van het cerebellum aanwezig was.

De atrophie zetelt in hoofdzaak in de schors van het cerebellum. Relatief weinig veranderd of onveranderd zijn de groote cerebellaire kernen. Op de primaire atrophie zijn omvangrijke vezelatrophien gevolgd in de medulla oblongata en in de medulla spinalis.

De schrijver gebruikt deze secundaire atrophien, die door hem nauwkeurig worden beschreven, om zijn meeningen uiteen te zetten omtrent den loop der vezels, die het cerebellum met het ruggemerg verbinden. In tegenstelling met hetgeen het meerendeel der hedendaagsche onderzoekers op dit gebied aanneemt, denkt zich de schrijver het verband tusschen cerebellum en ruggemerg direct d. w. z. zonder een tusschenschakel in de nuclei tecti, in den nucleus Deitersi of in den nucleus ruber.

Zonder te betwisten, dat er ook indirecte verbindingen zijn, die trouwens door onderzoekers als VON MONAKOW, VAN GEHUCHTEN, PROBST, LEWANDOWSKY, e. a. met zekerheid zijn vastgesteld, is de schrijver van meening, dat de door hem gevonden atrophien in het

ruggemerg het bestaan van directe efferente en afferente spino-cerebellaire verbindingsbanen bewijzen.

Ofschoon, naar onze meening, de bewijsvoering daarvoor niet afdoende is, is er in de verhandeling van den schrijver zooveel, wat als nieuwe en waardevolle bijdragen tot dit moeilijk en belangrijk vraagstuk mag gelden, dat de ondergeteekenden de plaatsing van dit stuk in de verhandelingen gaarne voorstellen.

De aan de verhandeling toegevoegde photo's zonden, met het oog op de hooge kosten aan de reproductie verbonden, tot op het strikt noodige kunnen worden beperkt.

Want al is het waar, dat er, voor zoover wij weten, geen photo's gepubliceerd zijn van de bewegingen der cerebellumlooze kat, zoo zullen, om daarvan een voorstelling te geven er geen 8 noodig zijn. Daaromtrent zal met den schrijver overleg kunnen worden gepleegd.

T. Place.
C. Winkler.

Wiskunde. — De heer Schoute biedt een mededeeling aan: *„Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke krommen met zes basispunten"*.

Bij de algemeen bekende afbeelding van een kubisch oppervlak O^3 op een plat vlak α beantwoorden aan de vlakke doorsneden van O^3 kubische krommen door zes punten in α; daarbij komt met de parabolische kromme o^{12} van O^3 de meetkundige plaats k^{12} der keerpunten van het lineair stelsel dier kubische krommen overeen. Het hoofddoel dezer kleine studie is uit bekende eigenschappen van o^{12} eigenschappen van k^{12} af te leiden en omgekeerd.

1. Draait een vlak om een rechte lijn l van O^3, dan doorloopen de snijpunten dier lijn l met de aanvullingskegelsnee op l een involutie, waarvan de dubbelpunten de asymptotenpunten van l heeten. Naar de bestaanbaarheid dezer asymptotenpunten verdeelen de 27 rechten van O^3, die bestaanbaar ondersteld worden, zich in twee groepen, in een groep van 12 lijnen met onbestaanbare asymptotenpunten, de lijnen

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{vmatrix}$$

van een dubbelzes, en in een groep van 15 lijnen $c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{56}$

met bestaanbare asymptotenpunten. Komen met de zes basispunten A'_i van het lineaire stelsel der kubische krommen de zes lijnen a_i overeen — en dit geval zal ons in het volgende telkens voor oogen zweven —, dan beantwoorden aan de zes lijnen b_i de zes kegelsneden $b_i'^2$ door alle basispunten op A'_i na en aan de vijftien lijnen c_{ik} de verbindingslijnen $c'_{ik} = (A'_i, A'_k)$, terwijl met de reeksen van kegelsneden (a_i^3) in vlakken door a_i, (b_i^2) in vlakken door b_i, (c_{ik}^2) in vlakken door c_{ik} achtereenvolgens de bundels der krommen van het lineaire stelsel met A'_i tot dubbelpunt, der lijnen (b'_i) door A'_i en der kegelsneden $(c_{ik}'^2)$ door de vier van A_i en A_k verschillende basispunten overeenstemmen. Daarbij is dan de ligging der zes punten A'_i zoodanig, dat elk der vijftien lijnen c'_{ik} door twee kegelsneden uit den bundel $(c_{ik}'^2)$ in bestaanbare punten wordt aangeraakt, terwijl daarentegen de raakpunten van de raaklijnen uit de punten A'_i aan de kegelsneden $b_i'^2$ onbestaanbaar zijn en ieder punt A'_i dus ligt binnen de kegelsnee $b_i'^2$ met denzelfden index.

2. Uit den aard der zaak zijn alle bestaanbare punten eener lijn l van O^3 hyperbolische punten van dit oppervlak met uitzondering van de beide asymptotenpunten dezer lijn, die een parabolisch karakter vertoonen; terwijl elk dezer beide asymptotenpunten raakpunt is van l met een op O^3 gelegen kegelsnee, raakt l in beide punten de parabolische kromme o^{12}. Past men dit toe op elk der zes lijnen a_i, die zich in de punten A'_i afbeelden, en bedenkt men, dat met een bepaald punt P van a_i het oneindig dicht bij A'_i gelegen punt P' overeenstemt, dat door een lijn van bepaalde richting met A'_i verbonden wordt (*Verslagen*, deel 1, blz. 143), dan vindt men onmiddellijk:

„De zes basispunten A'_i van het lineaire stelsel zijn viervoudige „punten van de kromme k^{12} van een bijzonder karakter, bestaande „uit de vereeniging van twee bestaanbare keerpunten met toegevoegd „onbestaanbare keerraaklijnen, de keerraaklijnen der krommen uit „het stelsel met een keerpunt in A'_i".

De 12 snijpunten van de lijn c'_{ik} met k^{12} bestaan in de viermaal tellende geïsoleerde punten A'_i, A'_k en de tweemaal tellende bestaanbare raakpunten met twee kegelsneden uit den bundel $(c_{ik}'^2)$. Evenzoo bestaan de 24 snijpunten van de kegelsnee $b_i'^2$ met k^{12} in de viermaal tellende vijf van A'_i verschillende basispunten en de tweemaal tellende onbestaanbare raakpunten van de raaklijnen door A'_i.

3. Uit de van 1873 en 1875 dagteekenende onderzoekingen van F. KLEIN en H. G. ZEUTHEN is gebleken, dat het oppervlak O^3 met 27 bestaanbare rechte lijnen tien openingen en de parabolische kromme o^{12} tien ovaalvormige takken heeft. In verband hiermee vinden we:

„De meetkundige plaats k^{12} heeft tien ovaalvormige takken."

We vragen, welke ligging der zes basispunten A'_i overeenkomt met het bijzondere geval van het „diagonalenoppervlak" van CLEBSCH, waarbij de tien ovaalvormige takken der kromme o^{12} zich tot geïsoleerde punten hebben samengetrokken. In dit geval gaan de 15 lijnen met bestaanbare asymptotenpunten, d. i. in ons geval de lijnen c'_{ik}, tienmaal drie aan drie door een punt; hieraan is voldaan door het zestal punten bestaande uit de vijf hoekpunten van een regelmatigen vijfhoek en het middelpunt van den omgeschreven cirkel. Wat meer

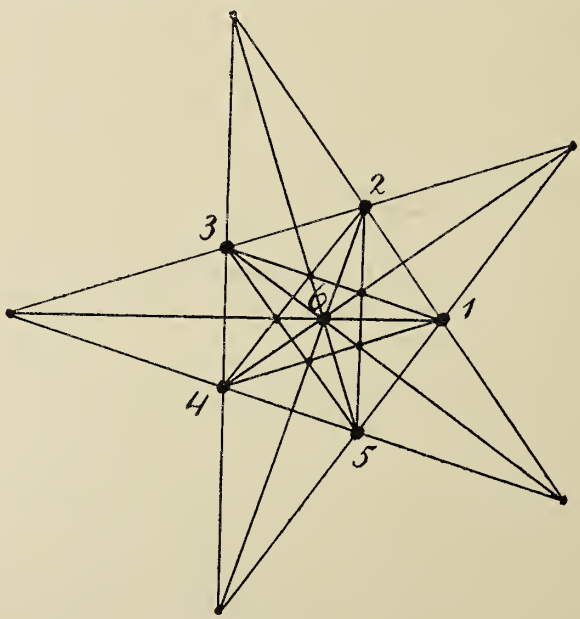


Fig. 1.

zegt, elk zestal punten met de bedoelde ligging kan door centrale projectie in deze meer regelmatige gedaante worden gebracht. De tien punten van samenkomst der drietallen van lijnen vormen dan weer de hoekpunten van twee regelmatige vijfhoeken (fig. 1). De met dit zestal basispunten overeenkomende kromme k^{12} bestaat dan uit louter geïsoleerde punten en wel viervoudige in de zes basispunten en tweevoudige in de tien punten van samenkomst der lijnendrietallen.

De opmerking, dat de bij het zestal basispunten van fig. 1 behoorende kromme k^{12} de lijn c'_{16} tot as van symmetrie heeft en bij draaiing over 72° om A'_6 in zich zelf overgaat, stelt ons in staat op

eenvoudige wijs haar vergelijking op te maken met betrekking tot een rechthoekig coördinatenstelsel met A'_6 als oorsprong en c'_{16} als x-as. De vormen, die bij genoemde draaiing in zich zelf overgaan, zijn

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,\ P = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4,\ Q = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5.$$

Als we op de symmetrie-as en de identiteit $P^2 + Q^2 = \varrho^{10}$ letten kan de bedoelde vergelijking dus in de gedaante

$$\varrho^4 + a\varrho^6 + b\varrho^8 + c\varrho^{10} + d\varrho^{12} + P(e + f\varrho^2 + g\varrho^4 + h\varrho^6) + P^2(i + k\varrho^2) = 0$$

geschreven worden, zoodat we nog slechts de tien coëfficienten $a, b, \ldots, k$ te bepalen hebben. Is nu de gemeenschappelijke afstand der punten $A'_1, A'_2, \ldots, A'_5$ tot A'_6 de eenheid, dan stelt

$$x^4\left(x + \frac{3-e}{2}\right)^2 (x-1)^4 \left(x + \frac{3+e}{2}\right)^2 = 0,$$

waarin e voor $\sqrt{5}$ staat, de twaalf snijpunten van de kromme met de x-as voor. Bij uitwerking gaat dit over in

$$x^4 (x^8 + 2x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 20x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 2x + 1) = 0.$$

Hieruit volgt dus

$$a = -7,\quad b = 20\ ,\quad c + i = -7,\quad d + k = 1,$$
$$e = 2\ ,\quad f = -6,\qquad g = -6,\qquad h = 2.$$

Derhalve is de vergelijking

$$\varrho^4 - 7\varrho^6 + 20\varrho^8 - 7\varrho^{10} + \varrho^{12} + 2P(1 - 3\varrho^2 - 3\varrho^4 + \varrho^6) - Q^2(i + k\varrho^2) = 0$$

op de nog onbekende coëfficienten i en k na bepaald. Nu levert de evenwijdige verplaatsing van het coördinatenstelsel naar A'_1 als oorsprong een nieuwe vergelijking, waarvan de vorm

$$(4 - i - k)y^2 + 2(12 - 4i - 5k)xy^2 + x^4 + (54 - 28i - 45k)x^2y^2 + (5 + 4i + 3k)y^4$$

na vermenigvuldiging met 25 de termen van lageren dan den vijfden graad voorstelt. Wijl de nieuwe oorsprong een viervoudig punt van k^{12} is en de termen met y^2 en xy^2 dus verdwijnen moeten, is

$$i = 8\qquad ,\qquad k = -4,$$

waardoor bedoelde vorm overgaat in

$$(x^2 + 5y^2)^2.$$

De juistheid van deze uitkomst blijkt uit het volgende. Even als de twee tweemaal tellende raaklijnen in den ouden oorsprong voorgesteld worden door $x^2 + y^2 = 0$ en dus samenvallen met de raaklijnen uit A'_6 aan de kegelsnee door de andere basispunten, stelt $x^2 + 5y^2 = 0$ voor den nieuwen oorsprong A'_1 het paar raaklijnen uit A'_1 aan de kegelsnee door de andere basispunten voor. Of, als men wil, even als $x^2 + y^2$ op een getallenfactor na de vierde overschuiving is van het eerste lid der vergelijking $Q = 0$ van de ver-

bindingslijnen van A'_6 met de overige basispunten, stelt $x^2 + 5y^2$ eveneens op een getallenfactor na de vierde overschuiving voor van het eerste lid der vergelijking $\frac{Py}{x} = 0$, die met betrekking tot den nieuwen oorsprong A'_1 de vijf verbindingslijnen van A'_1 met de overige basispunten aangeeft.

Ten slotte is de vergelijking van k^{12}

$$\varrho^4(\varrho^8-7\varrho^6+20\varrho^4-7\varrho^2+1)+2P(\varrho^6-3\varrho^4-3\varrho^2+1)+4Q^2(\varrho^2-2)=0, \quad (1)$$

of geheel in poolcoördinaten (ϱ, φ)

$$4(\varrho^2-2)\varrho^5 \cos 5\varphi=(\varrho^2+1)(\varrho^4-4\varrho^2+1)\pm(\varrho^2-1)^2\sqrt{(\varrho^2-1)(4\varrho^2+1)(5\varrho^2-1)}. \quad (2)$$

Men toont gemakkelijk aan, dat deze kromme buiten de zes basispunten A'_i en de tien snijpunten der drietallen van verbindingslijnen om geen bestaanbare punten toelaat. Schrijft men (2) kortheidshalve in den vorm

$$L \cos 5\varphi = M \pm \sqrt{N},$$

dan is

$$-L^2 \sin^2 5\varphi = (M^2 + N - L^2) \pm 2M\sqrt{N} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en

$$\left.\begin{aligned} M^2+N-L^2 &\equiv 2(\varrho^2-1)^2(2\varrho^2-1)(\varrho^8-6\varrho^6+14\varrho^4+2\varrho^2-1) \\ (M^2+N-L^2)^2 - 4M^2N &\equiv 4\varrho^8(\varrho^2-1)^4(\varrho^2-2)^2(\varrho^4-7\varrho^2+1)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Merkt men nu nog op, dat N negatief en dus $\cos 5\varphi$ complex is, als ϱ^2 tusschen $\frac{1}{5}$ en 1 ligt, dan blijkt onmiddellijk het volgende:

a. Het eerste lid der tweede vergelijking (4) wordt nul, als ϱ^2 een der waarden 0, 1, 2, $\frac{1}{2}(7 \pm 3e)$ aanneemt, en is voor alle andere waarden van ϱ^2 positief.

b. Als $\sqrt{N}$ bestaanbaar is en ϱ^2 van de eenheid verschilt, is het tweede lid van de eerste vergelijking (4) positief; want de vergelijking

$$\varrho^8 - 6\varrho^6 + 14\varrho^4 + 2\varrho^2 - 1 = 0$$

heeft, zoo als door verminderig der wortels ϱ^2 met $1\frac{1}{2}$ blijken kan, naast één bestaanbaren negatieven slechts één bestaanbaren positieven wortel tusschen $\frac{1}{5}$ en 1.

c. Als ϱ^2 van 0, 1, 2, $\frac{1}{2}(7 \pm 3e)$ verschilt, is het tweede lid van (3) positief bij positieve N en dus φ onbestaanbaar.

d. Ook $\varrho^2 = 2$ geeft geen bestaanbare waarde van φ; want invoeging in (1) levert voor $cos\, 5\varphi$ de uitkomst $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

e. We vinden dus slechts de bestaanbare punten:

$\varrho = 0$, φ onbepaald . . . . A'_6,

$\varrho = 1$, $cos\, 5\varphi = 1$ . . . . . A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5,

$\varrho = \frac{3 \pm e}{2}$, $cos\, 5\varphi = -1$ . . . de tien snijpunten der vijftien verbindingslijnen drie aan drie.

4. We beschouwen thans een tweede geval, waarin de ligging der zes basispunten eveneens zeer bijzonder is, waarin deze punten n.l. de hoekpunten vormen van een volledige vierzij. Door deze zes punten gaat dan geen enkele enkelvoudige kubische kromme met een keerpunt. Want de drie paren overstaande hoekpunten (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) van een volledige vierzij (fig. 2) vormen op elke kromme van den derden graad, die ze bevat, drie paren toegevoegde

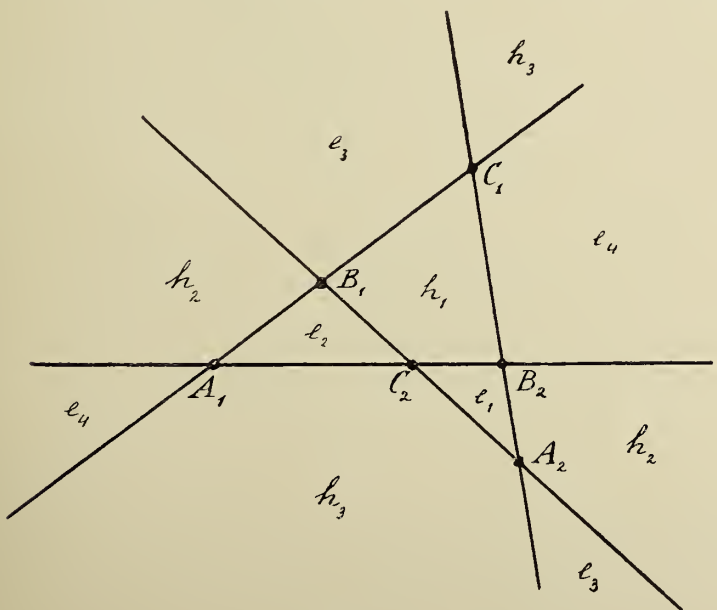


Fig. 2.

punten van een zelfde stelsel en deze komen bij de kubische kromme met een keerpunt niet voor, omdat er door elk punt van zulk een kromme slechts één de kromme elders rakende lijn getrokken kan worden. In dit bijzonder geval heeft de meetkundige plaats der keerpunten zich ontbonden in de vier zijden der vierzij, elk dier lijnen driemaal geteld. Het is toch wel duidelijk, dat een willekeurig

punt der lijn $A_1B_1C_1$ bijv. als raakpunt van deze lijn met een door A_2, B_2, C_2 gaande kegelsnee een keerpunt van het lineaire stelsel van kubische krommen vertegenwoordigt. Zelfs is het te verwachten, dat elk der vier zijden meer dan eenmaal in rekening gebracht moet worden, omdat elk der punten in stede van een gewoon keerpunt een punt is, waar twee doorloopende takken elkaar aanraken. En eindelijk dwingt ons de opmerking, dat de zijden der vierzij het vlak verdeelen in vier driehoeken e met elliptische en drie vierhoeken h met hyperbolische punten, zoodat ze de afscheiding tusschen die beide gebieden blijven vormen, ze een oneven aantal malen in rekening te brengen en wel, omdat we tot een samengestelde kromme k^{12} moeten komen, driemaal.

Omtrent de beide gebieden e en h een enkel nader verklarend woord. De dubbelpuntsraaklijnen van de kubische kromme (fig. 3), die door de drie puntenparen (A_1, A_1), (B_1, B_2), (C_1, C_2) gaat en in P een dubbelpunt heeft, zijn de dubbelstralen der involutie van de

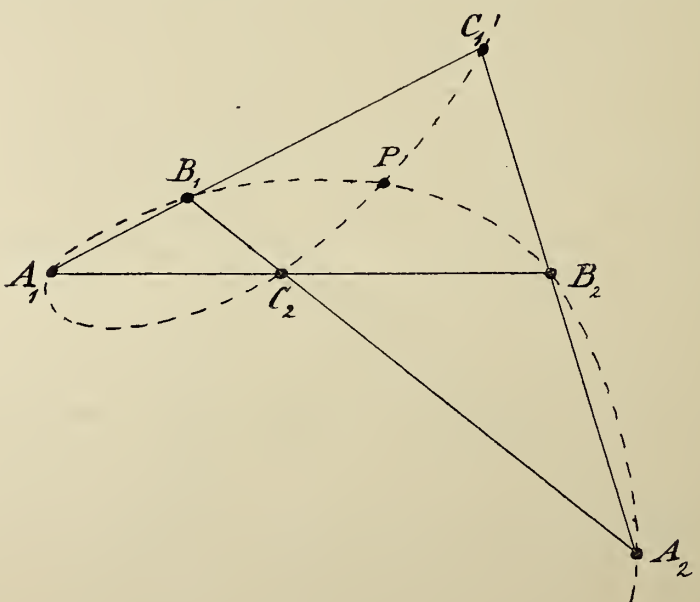


Fig. 3.

lijnenparen, die P met de genoemde drie puntenparen verbinden, en dus ook de raaklijnen in P aan de beide door P gaande kegelsneden van de schaar met de zijden der vierzij tot basisraaklijnen; wijl nu deze beide kegelsneden bestaanbaar of toegevoegd onbestaanbaar zijn, naarmate P in een der drie vierhoeken h of in een der vier driehoeken e ligt, volgt hieruit onmiddellijk het beweerde.

Met het hier beschouwde geval der in vier driemaal tellende lijnen opgeloste k^{12} stemt de parabolische kromme van het oppervlak O^3 met vier dubbelpunten overeen.

5. We beschouwen in de derde plaats nog het bijzondere geval van zes op een kegelsnee gelegen basispunten, waarin het lineaire stelsel van kubische krommen een net van krommen bevat, die in een kegelsnee en een rechte lijn ontaarden; bij dit net van ontaarde krommen is de kegelsnee dan telkens weer de kegelsnee k^2 door de zes basispunten, de rechte lijn een willekeurige rechte van het vlak. Dit geval kan op eenvoudige wijs in verband gebracht worden met een oppervlak O^3 met een dubbelpunt O. Projecteert men dit oppervlak uit het dubbelpunt O op een niet door dit punt gaand vlak α, dan projecteeren de vlakke doorsneden van het oppervlak zich als kubische krommen gaande door de zes snijpunten van α met de door O gaande lijnen van het oppervlak; omdat deze zes lijnen op een kwadratischen kegel liggen, liggen de zes snijpunten met α op een kegelsnee. Bovendien projecteeren de doorsneden met vlakken door O zich als rechte lijnen; derhalve is de aanvullende kegelsnee k^2 klaarblijkelijk als de afbeelding van het dubbelpunt O te beschouwen. Natuurlijk moeten we ons daarbij weer voorstellen, dat k^2 punt voor punt overeenkomt met de oneindig dicht bij O gelegen punten van O^3; immers k^2 is de doorsnee van α met den kegel der raaklijnen aan O^3 in O.

Wijl k^2 met een harer raaklijnen een kromme van het lineaire stelsel vertegenwoordigt, behoort deze kegelsnee minstens tweemaal tot de meetkundige plaats der keerpunten. Ook hier is deze meetkundige plaats van oneigenlijke keerpunten met doorloopende takken driemaal in rekening te brengen, zoodat de eigenlijke meetkundige plaats een kromme van den zesden graad k^6 is, die k^2 in de zes basispunten aanraakt.

Onderstellen we, dat k^2 een cirkel is en de zes basispunten (fig. 4) op dien cirkel de hoekpunten vormen van een regelmatigen zeshoek, dan heeft de kromme k^6 den vorm van een rozet met zes bladen, die het middelpunt O' van den cirkel en de oneindig ver verwijderde punten van de middellijnen A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 tot geïsoleerde punten heeft. Van de tien ovalen zijn er dan vier tot punten samengetrokken, terwijl de zes overige zich vereenigd hebben tot den cirkel der basispunten en de kromme k^6.

Neemt men het punt O' tot oorsprong en de lijn $O'A_1$ tot x-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan, dan vindt men als $O'A_1$ lengte-eenheid is, voor de vergelijking van k^6

$$4y^2(y^2 - 3x^2)^2 + 9(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 + y^2) = 0.$$

Blijkens deze vergelijking is de kromme k^6 werkelijk bestand tegen

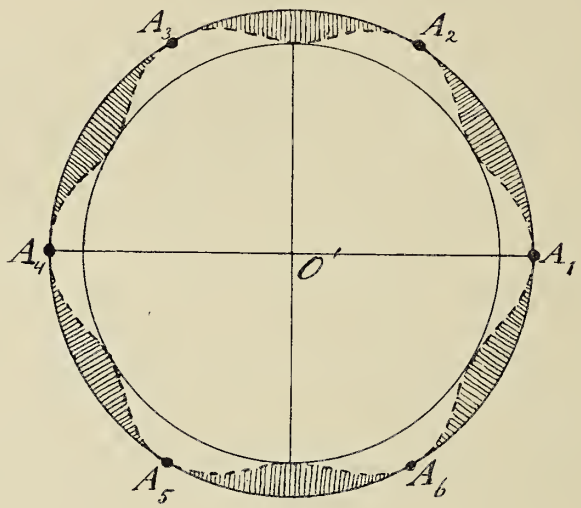


Fig. 4.

draaiing over veelvouden van 60° om O', want daarbij gaan $x^2 + y^2$ en $y(y^2 - 3x^2)$ in zich zelf over.

Uit de vergelijking

$$\sin 3\varphi = \pm \frac{3}{2r^2}\sqrt{1 - r^2}$$

op poolcoördinaten blijkt nog, dat de kromme k^6 (op haar vier geïsoleerde punten na) begrepen is tusschen de cirkels uit O' met de stralen 1 en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschreven.

Gaan we van de meetkundige plaats der keerpunten tot de parabolische kromme van O^3 over, dan moet worden opgemerkt, dat de laatste kromme het dubbelpunt O van O^3 tot drievoudig punt heeft, omdat k^2 zich driemaal van de meetkundige plaats k^{12} heeft afgesplitst. Dus is deze parabolische kromme een o^9 van den negenden graad, een uitkomst die aanstonds langs anderen weg zal worden bevestigd.

We geven — zonder dit geval der zes op een kegelsnee gelegen basispunten ook maar eenigzins te willen uitputten — eenige ontaardingen der overblijvende kromme k^6 aan, die met bepaalde samenvallingen der basispunten overeenkomen.

a) De gevallen (2, 2, 2), (4, 2), (6). Vallen de zes basispunten twee aan twee in drie punten der kegelsnee samen, dan bestaat k^6 uit de zijden van den driehoek der basispunten dubbel geteld, die

afkomstig zijn van samengestelde kubische krommen met een dubbellijn; er is dan geen eigenlijke meetkundige plaats. Werkelijk kan bij een enkelvoudige kubische kromme met een keerpunt het geval (2, 2, 2) van een in drie punten rakende kegelsnee niet optreden.

De gevallen (4, 2) en (6) zijn als in het voorgaande begrepen te beschouwen. Door twee der hoekpunten of de drie hoekpunten van den juist beschouwden driehoek te doen samenvallen, vindt men voor het geval (4, 2) de verbindingslijn der beide basispunten viermaal en de raaklijn aan de kegelsnee in het basispunt van hoogste veelvoudigheid tweemaal, voor het geval (6) de raaklijn aan de kegelsnee in het voor zes basispunten tellende punt zesmaal. Dat er in het laatste geval geen eigenlijke meetkundige plaats kan zijn, volgt ook hieruit, dat een enkelvoudige kubische kromme met keerpunt geen sextactisch punt toelaat.

b) Het geval (3, 3). Vallen de zes basispunten drie aan drie in twee punten der kegelsnee samen, dan bestaat k^6 uit een oneigenlijk deel, de verbindingslijn der beide punten viermaal geteld, en een eigenlijk deel, een kegelsnee, die de kegelsnee der basispunten in deze punten raakt. De nieuwe kegelsnee ligt *buiten* de kegelsnee der basispunten.

c) Het geval (1, 5). Dit geval komt in veel opzichten met het voorgaande overeen. We vinden een oneigenlijk deel, de raaklijn in het voor vijf basispunten tellende punt aan de kegelsnee der basispunten getrokken, en een eigenlijk deel, een kegelsnee die de kegelsnee der basispunten in deze punten raakt. De nieuwe kegelsnee ligt *binnen* de kegelsnee der basispunten.

6. Natuurlijk is het mogelijk bij de kromme k^{12} achtereenvolgens al de verschillende bijzondere gevallen in het leven te roepen, die zich bij de parabolische kromme o^{12} der verschillende oppervlakken O^3 kunnen voordoen. Wijl dit ons hier te ver voeren zou, beperken we ons tot een enkele opmerking, die een eventueele analytische uitwerking van dit denkbeeld kan vergemakkelijken.

Volgens de algemeene uitkomsten betreffende een lineair stelsel van krommen C^n reeds in 1879 door E. Caporali verkregen heeft de meetkundige plaats $C^{4(2n-3)}$ der keerpunten van dit stelsel in elk r-voudig basispunt van het stelsel een $4(2r-1)$-voudig punt en bovendien nog $6(n-1)^2-2\Sigma(3r^2-2r+1)$ dubbelpunten C. Elk dier punten C is gekenmerkt door de eigenschap, dat elke door dit punt gaande kromme van het stelsel in dit punt door een bepaalde lijn c wordt aangeraakt.

Voor het geval $n=3$ der kubische krommen, dat ons bezig houdt,

wordt het aantal punten C door $24—6p$ voorgesteld, als p het aantal basispunten is.

Wil men nu langs analytischen weg onderzoeken, welke bijzonderheid de meetkundige plaats der keerpunten vertoont in een basispunt van het stelsel, of hoe een lijn door drie basispunten zich van haar afscheidt, dan zal de uitkomst — en dit is de bedoelde opmerking — onafhankelijk wezen van het al of niet voorhanden zijn der overige basispunten, mits men in het eerste geval, dat eenige dezer basispunten bestaanbaar of onbestaanbaar voorhanden zijn, aanneme, dat deze punten zoowel met betrekking tot elkaar als tot de eerstgenoemde basispunten geen bijzondere ligging hebben. Met behulp van deze opmerking vindt men gemakkelijk de volgende stellingen, waarmee wij besluiten :

„De beide keerpunten, waaruit het met een basispunt A'_i van k^{12} „samenvallende viervoudige punt dier kromme schijnt te bestaan, en „de beide keerpunten der krommen uit het stelsel, die in dit punt „een keerpunt vertoonen, komen wel in keerraaklijnen overeen, doch „keeren hun spits naar tegengestelde kanten".

„Liggen de drie basispunten A'_1, A'_2, A'_3 op een rechte l, dan „herleidt zich de eigenlijke meetkundige plaats der keerpunten tot „een kromme k^9, die in A'_1, A'_2, A'_3 de lijn l aanraakt. Zijn de drie „overigens mogelijke basispunten voorhanden, dan zijn de snijpunten „van l met de zijden van den driehoek met die basispunten tot „hoekpunten punten van k^9".

Het laatste geval beantwoordt aan dat van een oppervlak O^3 met een dubbelpunt; de parabolische kromme, die in dit dubbelpunt een drievoudig punt heeft, omdat l zich driemaal van k^{12} afscheidt, is, zoo als reeds boven gevonden werd, een ruimtekromme van den negenden graad.

Scheikunde. — De Heer Schreinemakers doet eene mededeeling: *„Over een vierkomponenten stelsel met twee vloeibare phasen."*

Ofschoon in de stelsels van drie komponenten met twee en drie vloeistofphasen nog vele gevallen kunnen optreden, die wel door de theorie voorzien, maar experimenteel nog niet verwezenlijkt zijn, heb ik toch gemeend eens enkele stelsels met vier komponenten te moeten onderzoeken om ook eens een blik te werpen op dit nog volkomen onbekende gebied.

Ik wil thans een enkel dier stelsels, opgebouwd uit de stoffen: water, aethylalkohol, lithiumsulfaat en ammoniumsulfaat, nader bespreken.

Wij kunnen de evenwichteu met behulp van een regelmatig viervlak voorstellen, zooals in Fig. 1; de hoekpunten stellen de vier

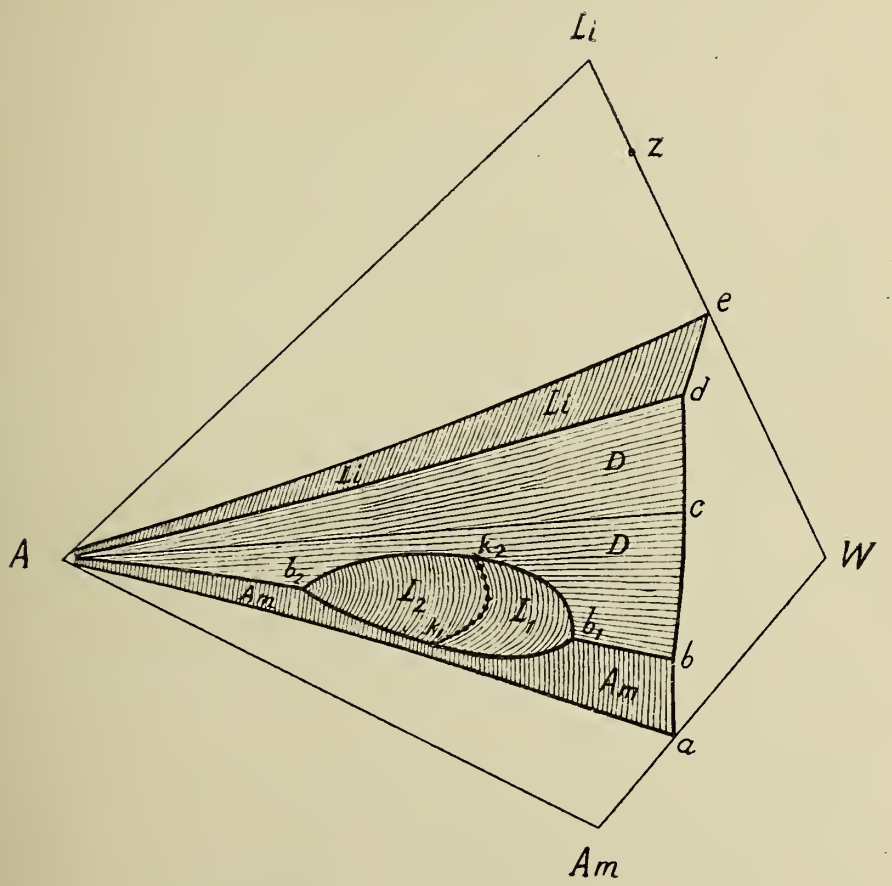


Fig. 1.

komponenten voor nl. W = water, A = alkohol, Li = Lithiumsulfaat, Am = Ammoniumsulfaat. De ribbe AW is, daar zij onzichtbaar is, weggelaten; eveneens de ribbe $Li\,Am$.

Als vaste phase kunnen, behalve het Li_2SO_4 en $(NH_4)_2SO_4$ nog optreden: $Li_2SO_4.H_2O$ en het dubbelzout $LiNH_4SO_4$. Het eerste wordt voorgesteld door een punt Z op de ribbe LiW, het tweede door een niet aangegeven punt D op de ribbe $Li\,Am$.

De bij 6°5 optredende evenwichten worden schematisch door Fig. 1 voorgesteld. De oplosbaarheid van het $(NH_4)_2SO_4$ en van het $Li_2SO_4.H_2O$ in water wordt voorgesteld door de punten a en e; punt c geeft de oplosbaarheid aan van het dubbelzout in water en moet dus op de lijn WD liggen. (punt D ligt op de ribbe $Li\,Am$). Daar Li_2SO_4, $(NH_4)_2SO_4$ en $LiNH_4SO_4$ in alkohol practisch onoplos-

baar zijn, kan men hunne oplosbaarheid practisch door het punt A voorstellen.

De kromme aA is de verzadigingslijn van het $(NH_4)_2SO_4$; zij geeft nl. de water-alkoholoplossingen aan, die met vast $(NH_4)_2SO_4$ verzadigd zijn.

De water-alkoholoplossingen, verzadigd met Li_2SO_4 en $Li_2SO . H_2O_1$ worden voorgesteld door de kromme eA, die echter geheel in de nabijheid van het punt A eene discontinuiteit moet vertoonen. De kromme bestaat nl. uit twee takken van welke de rechter de oplossingen aangeeft, verzadigd met $Li_2SO_4 . H_2O$ en de linker die, verzadigd met anhydrisch Li_2SO_4.

De evenwichten in het ternaire stelsel water, lithiumsulfaat en ammoniumsulfaat worden voorgesteld door de kromme ab, bcd en de, die in het zijvlak $WLiAm$ van den tetraëder liggen. ab is de verzadigingslijn van het ammoniumsulfaat, bcd die van het dubbelzout $LiNH_4SO_4$, de die van het $Li_2SO_4 . H_2O$. Dit laatste is echter, naar ik meen, niet volkomen waar, want blijkens verschillende analysen schijnt het lithiumsulfaat zich, al is het dan ook maar voor enkele procenten, te mengen met het ammoniumsulfaat, zoodat tak de dan oplossingen aangeeft die met mengkristallen verzadigd zijn. In het vervolg zal ik echter, daar ik deze menging niet nauwkeurig onderzocht heb, steeds blijven spreken over het lithiumsulfaatmonohydraat nl. $Li_2SO_4 . H_2O$.

Beschouwen wij thans de evenwichten in het quaternaire stelsel Het vlak Am of $Aabb_1k_1b_2A$ stelt de oplossingen voor, die met vast ammoniumsulfaat zijn verzadigd; vlak D of $Ab_2k_2b_1bcdA$ de oplossingen, verzadigd met vast $LiNH_4SO_4$; de kromme Ac van dit vlak heeft eene bizondere beteekenis daar zij de oplosbaarheid van het $LiNH_4SO_4$ in wateralkoholmengsels aangeeft. De punten van het vlak D vóór de kromme Ac stellen oplossingen voor die in betrekking tot het dubbelzont een overmaat van $(NH_4)_2SO_4$ bevatten, de punten achter deze lijn geven oplossingen aan, die een overmaat van Li_2SO_4 bevatten.

De kromme Ac moet dus liggen in het vlak dat door AW gaat en het punt D der ribbe $LiAm$. Het vlak Li of Ade geeft de vloeistoffen aan, verzadigd met Li_2SO_4 of $Li_2SO_4H_2O$ of met de hiervoor besproken mengkristallen; het moet dus uit verschillende deelen bestaan, die echter in de teekening niet nader zijn aangegeven. Bij de hier besproken temperatuur van 6°5 kunnen ook stelsels van twee vloeistofphasen optreden; in de figuur zijn deze voorgesteld door het vlak L_1L_2 of $b_1K_1b_2K_2$ dat wij het binodale vlak kunnen noemen; dit binodale vlak wordt door de lijn K_1K_2 in twee deelen

L_1 en L_2 verdeeld, zoodanig dat elk punt van L_1 geconjugeerd is met een punt van L_2. Twee geconjugeerde punten geven twee oplossingen aan, die met elkaar in evenwicht zijn; met elke oplossing van het vlak L_1 kan dus eene bepaalde oplossing van vlak L_2 in evenwicht zijn.

In plaats van een kritisch punt, zooals bij ternaire mengsels bij constante temperatuur en druk optreedt, ontstaat hier een kritische lijn, die door K_1K_2 is voorgesteld. Elk punt dezer lijn stelt dus eene oplossing voor die ontstaat doordat in het stelsel van twee vloeistofphasen $L_1 + L_2$ de beide vloeistofphasen identiek worden. Beschouwen wij thans de doorsneden der verschillende vlakken; Ad stelt dan de oplossingen voor, verzadigd zoowel met $LiNH_4SO_4$ als met $Li_2SO_4H_2O$; Ab_2 en b_1b geven de vloeistoffen aan die met $LiNH_4SO_4$ en $(NH_4)_2SO_4$ verzadigd zijn.

De doorsnede van het binodale vlak met het vlak Am nl. de kromme $b_1K_1b_2$ geeft het stelsel: $L_1 + L_2 + (NH_4)_2SO_4$ aan nl. twee vloeistofphasen verzadigd met vast ammoniumsulfaat. Met elk punt der kromme b_1K_1 is een punt van b_2K_1 geconjugeerd. Elke vloeistof van b_1K_1 kan dus met eene bepaalde vloeistof van b_2K_1 in evenwicht zijn, terwijl beide met vast $(NH_4)_2SO_4$ zijn verzadigd.

De doorsnede van het binodale vlak met het vlak D nl. de kromme $b_1k_2b_2$ stelt de oplossingen van het stelsel $L_1+L_2+Li\,NH_4SO_4$ voor. Met elke vloeistof van b_1k_2 kan dus eene bepaalde andere van b_2k_2 in evenwicht zijn, terwijl beide met vast $Li\,NH_4SO_4$ zijn verzadigd.

De snijpunten b_1 en b_2 dezer beide krommen geven het stelsel: $L_1+L_2+(NH_4)_2SO_4+Li\,NH_4SO_4$ aan nl. twee vloeistoffen, beide verzadigd met ammoniumsulfaat en lithiumammoniumsulfaat, die met elkaar in evenwicht kunnen zijn.

De punten k_1 en k_2 hebben eene bizondere beteekenis; beide zijn kritische vloeistoffen, die zich echter van de andere kritische vloeistoffen der kritische kromme k_1k_2 daardoor onderscheiden, dat zij nog met eene vaste stof verzadigd zijn; k_1 is nl. verzadigd met ammoniumsulfaat en k_2 met lithiumammoniumsulfaat.

Verhoogt men de temperatuur dan breidt het heterogene gebied zich uit; bij $\pm$ 8° komt het punt k_1 op het zijvlak $AWAm$, zoodat boven deze temp. in het ternaire stelsel water-alkohol-ammoniumsulfaat ontmenging kan optreden.

Bij 30° heb ik de evenwichten, die in dit quaternaire stelsel optreden, weer nader onderzocht; de uitkomsten zijn voorgesteld door de schematische figuur 2.

Het verzadigingsvlak Am, dat bij 6°5 nog uit een samenhangend

gedeelte bestaat, bestaat thans (experimenteel) uit twee van elkaar gescheiden gedeelten; dit komt doordat het binodale vlak L_1L_2 thans op het zijvlak $AWAm$ in de kromme $a_1k_1a_2$ eindigt.

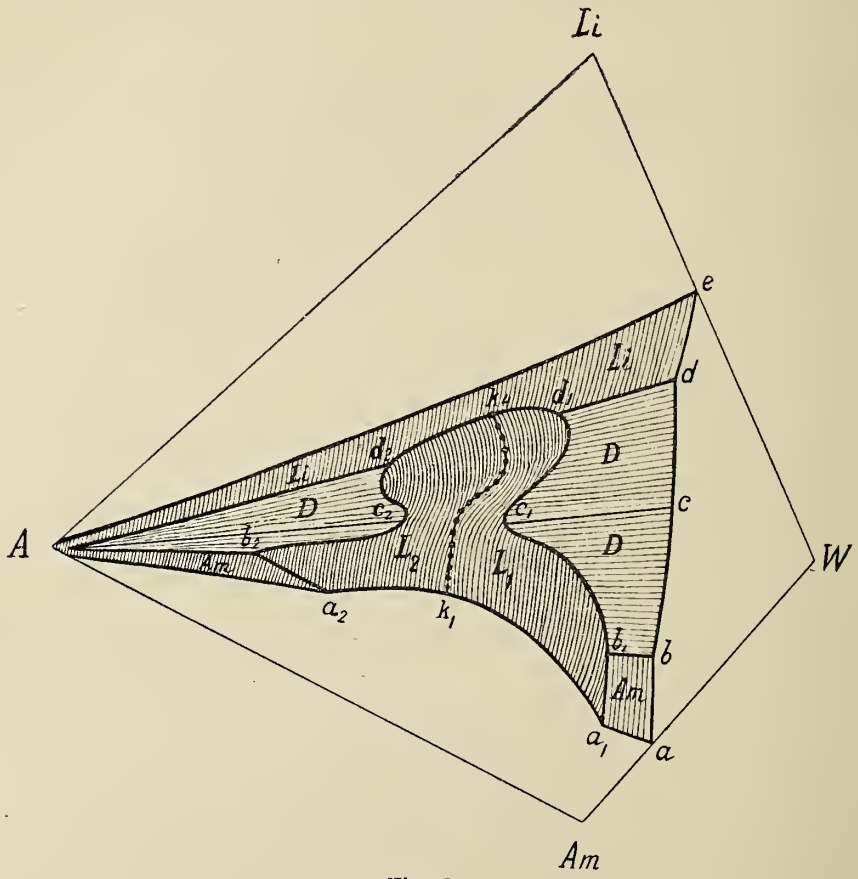


Fig. 3.

Van de kritische lijn k_1k_2 stelt het eindpunt k_1 eene ternaire kritische vloeistof voor; alle andere vloeistoffen dezer lijn zijn quaternaire kritische van welke k_2 met vast lithiumammoniumsulfaat is verzadigd.

Geheel onverwacht was het verschijnsel, dat er nog een tweede heterogeen gebied bij deze temperatuur bestaat; het is in de figuur door het binodale vlak $L_1^1L_2^1$ of $d_1k_4d_2k_3$ met de kritische lijn k_3k_4 voorgesteld. Ik heb niet nader onderzocht bij welke temperatuur dit ontstaat; bij $\pm$ 18° is het echter reeds zeker aanwezig.

Het binodale vlak L_1L_2 snijdt de verzadigingsvlakken Am en D; men heeft dus ééne reeks van twee vloeistofphasen, verzadigd met vast $(NH_4)_2SO_4$ en ééne reeks verzadigd met vast $LiNH_4SO_4$. Het binodale vlak $L_1^1L_2^1$ snijdt de twee verzadigingsvlakken D en Li.

Men heeft dus ééne reeks van twee vloeistofphasen verzadigd met $LiNH_4SO_4$ (kromme k_3d_1 en k_3d_2) en ééne reeks, verzadigd met $Li_2SO_4 . H_2O$ (kromme k_4d_1 en k_4d_2). Door d_1 en d_2 worden twee vloeistofphasen voorgesteld, die met elkaar in evenwicht zijn en verzadigd met $LiNH_4SO_4$ en $Li_2SO_4 . H_2O$, Van de reeks der kritische vloeistoffen, voorgesteld door de kromme k_3k_4 is k_3 verzadigd met $LiNH_4SO_4$ en k_4 met $Li_2SO_4 . H_2O$.

De kromme Ac, die de vloeistoffen aangeeft verzadigd met $LiNH_4SO_4$ zonder dat een der beide komponenten in overmaat aanwezig is, loopt tusschen de beide heterogene gebieden door. Hieruit volgt dat dit dubbelzout bij 30° met water-alkoholmengsels geen twee vloeistofphasen kan geven.

In het geheel hebben wij dus bij 30° de volgende evenwichten in het quaternaire stelsel:

vloeistoffen verzadigd met:

1. $(NH_4)_2SO_4$, voorgesteld door het vlak Am
2. $LiNH_4SO_2$, „ „ „ „ D
3. $Li_2SO_4H_2O$, „ „ „ „ Li
4. $(NH_4)_2SO_4$ en $LiNH_4SO_4$ „ „ de krommen: bb_1 en b_2A
5. $Li_2SO_4H_2O$ en $LiNH_4SO_4$ „ „ „ „ dd_1 en d_2A

stelsel van twee vloeistofphasen:

6. op zich zelf, voorgesteld door het vlak L_1L_2
7. „ „ „ „ „ „ „ $L_1'L_2'$
8. verzadigd met $(NH_4)_2SO_4$, voorgest. door de krommen a_1b_1 en a_2b_2
9. „ „ $LiNH_4SO_4$, „ „ „ „ b_1K_2 en b_2K_2
10. „ „ $LiNH_4SO_4$, „ „ „ „ d_1K_3 en d_2K_3
11. „ „ $Li_2SO_4H_2O$, „ „ „ „ d_1K_4 en d_2K_4

twee vloeistofphasen verzadigd met:

12. $(NH_4)_2SO_4$ en $LiNH_4SO_4$, voorgesteld door de punten: b_1 en b_2
13. $Li_2SO_4H_2O$ en $LiNH_4SO_4$, „ „ „ „ d_1 en d_2

kritische vloeistoffen:

14. eene reeks, voorgesteld door de kromme K_1K_2
15. „ „ „ „ „ „ K_3K_4
16. eene krit. vloeist., verzadigd met $LiNH_4SO_4$, voorgest. door punt K_3
17. „ „ „ „ „ $LiNH_4SO_4$, „ „ „ K_3
18. „ „ „ „ „ $Li_2SO_4H_2O$, „ „ „ K_4

Bij temperatuursverhooging boven 30° naderen de beide heterogene gebieden elkaar meer en meer en eindelijk vloeien zij te

zamen ; bij welke temperatuur dit gebeurt heb ik niet verder onderzocht, uit de proeven blijkt echter dat dit reeds beneden 40° het geval is; ook heb ik niet kunnen bepalen of dit punt van samensmelting vóór of achter de kromme *Ac* ligt, of misschien toevalligerwijze er op.

De bij 50° optredende evenwichten heb ik nader onderzocht en door figuur 3 voorgesteld ; na het voorgaande is eene bespreking

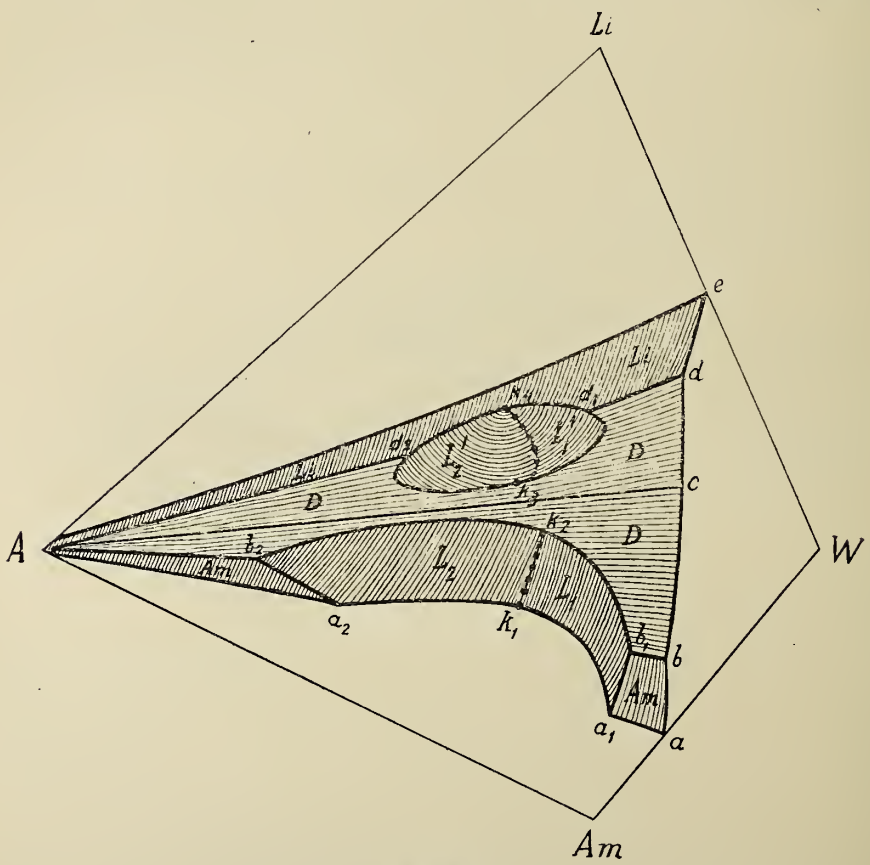


Fig. 2.

overbodig. Alleen wil ik nog iets opmerken over de punten c_1 en c_2 n.l. de snijpunten der kromme *Ac* met de verzadigingskromme der twee vloeistofphasen : b_1d_1 en b_2d_2. Op het eerste gezicht zou men kunnen denken dat deze beide vloeistoffen met elkaar in evenwicht kunnen zijn. Die mogelijkheid bestaat natuurlijk wel. Nemen wij nl. eens een water-alkoholmengsel van zulke samenstelling, dat bij het verzadigen met $LiNH_4SO_4$ twee vloeistofphasen optreden. Beide vloeistoffen zullen nu Li_2SO_4 en $(NH_4)_2SO_4$ bevatten en het is nu duidelijk dat er zich twee gevallen kunnen voordoen. Het kan nl. dat de

beide vloeistoffen de beide komponenten in dezelfde verhouding bevatten als zij in het dubbelzout voorkomen; het is dan als het ware, alsof het dubbelzout in de beide vloeistoffen onontleed oplost. Als dit het geval is, dan zullen de vloeistoffen c_1 en c_2 met elkaar in evenwicht zijn.

De tweede mogelijkheid is dat eene der vloeistoffen in betrekking tot het dubbelzout eene overmaat van Li_2SO_4 en de andere dus eene overmaat van $(NH_4)_2SO_4$ bevat; in dit geval kunnen c_1 en c_2 niet met elkaar in evenwicht zijn. De proef leert nu dat dit laatste het geval is. Verzadigde ik bij 50° een water-alcoholmengsel met $LiNH_4SO_4$ dan bevatte de alkoholische laag een kleine overmaat aan Li_2SO_4 en de waterige laag een kleine overmaat aan $(NH_4)_2SO_4$. Hieruit volgt dus dat de konjugatielijn niet met het vlak *DAW* samenvalt, maar dit snijdt; het rechter deel der lijn zal vóór, het linker deel achter dit vlak moeten liggen. De alkoholische oplossing c_2 van het dubbelzout zal dus niet in evenwicht kunnen zijn met de waterige oplossing c_1 van dit dubbelzout, maar wel met eene oplossing, die een overmaat van $(NH_4)_2SO_4$ bevat.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene voorloopige mededeeling aan over: „*De astronomische straalbreking volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit ballontochten afgeleid.*"

1. De verschillende theorieën omtrent de breking van het licht der hemellichamen in onzen dampkring berusten op de onderstelling dat de luchtlagen van gelijke dichtheid begrensd zijn door concentrische boloppervlakken, en dat hunne temperatuur of wel hunne dichtheid en daarmede hun brekingsvermogen op eene bepaald aangegeven wijze met de hoogte veranderen.

De verschillende betrekkingen tusschen de luchttemperatuur en de hoogte, welke aan de verschillende theorieën ten grondslag liggen, zijn zoo gekozen, dat zij 1°. niet te veel afwijken van hetgeen men tijdens het opstellen van de theorie voor de verdeeling van de temperatuur in onze atmospheer meende te mogen aannemen, 2°. dat de daaruit afgeleide formule voor de refractie in eene oneindig dunne laag, op eene willekeurige hoogte, geschikt integreerbaar was.

In de jaren, waarin de verschillende theorieën zijn uitgewerkt, was de verandering van de temperatuur met de hoogte uit de resultaten van enkele ballontochten en uit de waarnemingen op eenige bergstations nog slechts gebrekkig bekend. In het laatste tiental jaren zijn

echter de ballontochten, zoowel met personen als alleen met registreerende instrumenten, zeer in aantal toegenomen en is onze kennis van de temperatuursverdeeling in de atmospheer juister en uitgebreider geworden. Ik wensch na te gaan of uit de verkregen gegevens eene betere refractietheorie is af te leiden, of wel de uitkomsten der reeds bestaande theorieën zijn te verbeteren.

2. De werken waaruit ik de temperatuur op verschillende hoogten in onze atmospheer heb afgeleid zijn:

Ergebnisse der Arbeiten am aëronautischen Observatorium Tegel 1900—1902, Band I, II en III.

Travaux de la station Franco-scandinave de sondages aëriens à Halde par Teisserenc de Bord. 1902—1903.

Veröffentlichungen der internationalen Kommission für wissenschaftlichen Luftschiffahrt.

Van dit laatste werk heb ik alleen gebruikt de waarnemingen van December 1900 tot het eind van 1903.

Ik wenschte de temperatuursverdeeling tot in de hoogste deelen van de atmospheer te kennen, en heb daarom in mijn onderzoek alleen opgenomen de ballontochten bij welke eene hoogte van minstens 5000 meters bereikt was; verder heb ik, zooals HERGESELL aanraadt, alleen de temperaturen gebruikt die bij stijging zijn waargenomen, daar bij daling te veel kans bestaat dat waterdamp op de toestellen neerslaat.

Het is duidelijk, dat men ter bepaling van de straalbreking, die bij de herleiding van de uitkomsten der sterrekundige waarnemingen moet worden aangebracht, de temperatuursverandering in de opvolgende luchtlagen vooral bij *helder* weder moet kennen. De temperaturen zullen toch, vooral in de dicht bij de aarde gelegen lagen, bij helder en bij betrokken weder niet dezelfde zijn, daar de uitstraling van den grond bij helder weder de temperatuur van die luchtlagen zal doen dalen en eene abnormale temperatuursverdeeling zal doen ontstaan. Hierdoor kan zelfs in de onderste lagen de temperatuur met de hoogte rijzen in plaats van, zooals gewoonlijk, te dalen.

Om dezen reden heb ik de ballontochten in twee groepen verdeeld 1° bij bewolkte lucht, 2° bij heldere of weinig bewolkte lucht.

Bij de bewerking der waarnemingen heb ik ondersteld dat bij eene stijging van een kilometer de temperatuur evenredig met de hoogte verandert, en zoo, in navolging van andere schrijvers, van kilometer tot kilometer de temperatuursverandering bepaald. Daartoe werden uit de waarnemingen gedurende elken tocht de temperatuursbepalingen uitgezocht op hoogten die zoo na mogelijk met een vol

aantal kilometers overeenstemden, en door deeling de temperatuursverandering per kilometer opgemaakt.

De beschikbare hoogteverschillen waren, vooral bij de grootste hoogten, dikwijls kleiner dan een kilometer; in die gevallen werd aan de hieruit afgeleide temperatuursverandering een geringer gewicht toegekend. Somtijds zijn op hetzelfde station of op dicht bij elkander gelegen stations op denzelfden dag, spoedig na elkander, ballontochten ondernomen, die elk voor zich de temperatuursveranderingen op dezelfde hoogten deden kennen. In deze gevallen werd het gemiddelde der aldus verkregen uitkomsten gebruikt, doch werd het gewone gewicht 1 behouden, daar de waargenomen afwijkingen van de normale temperatuursverandering slechts voor een gering deel aan de waarnemingen, en voor het grootste deel aan meteorologische invloeden zijn te wijten.

TABEL I.

Temperatuursveranderingen bij eene stijging van 1 kilometer.
(T.V. temperatuursveranderingen per kilometer; A. aantal waarnemingen).

A. Helder weder.

	Winter.		Lente.		Zomer.		Herfst.		Gemidd.	
Kil	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.
0 – 1	+ 1.2	10	— 3.6	15	— 2.8	18	+ 0.6	15	— 0.6	58
1 – 2	— 4 2	10	— 5 4	15	— 4.3	18	— 3.2	15	— 4.3	58
2— 3	— 5.2	10	— 4.9	15	— 4.4	18	— 4.6	15	— 4.7	58
3— 4	— 5.4	10	— 5.8	15	— 5.4	18	— 5.3	15	— 5.5	58
4— 5	— 5.3	10	— 6 7	14.3	— 5.9	18	— 5.7	14.9	— 5.9	57.2
5— 6	— 5.6	8.9	— 7.1	13.6	— 6.0	18	— 7.3	13.8	— 6.5	54.3
6— 7	— 5.8	8	— 7 5	12.7	— 6.6	17.3	— 6.7	10.1	— 6.7	48.1
7— 8	— 6.8	7	— 7.8	10.8	— 7.5	14.6	— 8.0	8	— 7.5	40.4
8— 9	— 7.6	5	— 6.4	7.8	— 7.4	13.3	— 8.1	8	— 7.3	34.1
9—10	— 5.9	4	— 4.4	5.7	— 7.2	13	— 6.9	7	— 6.4	29.7
10—11	— 3.8	2.9	— 2.5	5	— 6.8	10.4	— 6.1	6.8	— 5.4	25.1
11—12	— 6.2	2	— 2.4	2.6	— 5.9	5.2	— 2.0	5.9	— 3.5	15.7
12—13	— 1.6	2	+ 2.0	1	— 1.1	2	— 1.0	4.9	— 0.7	9.9
13—14			+ 7.0	1	+ 1.0	2	— 4.0	1.6	— 0.8	4.6
14—15					+ 0.7	1.6	— 5.1	1	— 1.5	2.6
15—16					+ 0.8	1			+ 0.8	1

B. Bewolkt weder.

	Wiuter.		Lente.		Zomer.		Herfst.		Gemidd.	
Kil.	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.	T.V.	A.
0— 1	— 1.8	27	— 5.5	33	— 3.7	24	— 3.9	40	— 3.8	124
1— 2	— 3.0	27	— 5.6	32.5	— 5.1	24	— 3.7	49	— 4.3	123.5
2— 3	— 4.5	27	— 4.8	33	— 5.1	24	— 4.3	40	— 4.5	124
3— 3	— 5.8	27	— 5.5	33	— 5.1	23.8	— 5.8	39.5	— 5.6	123.3
4— 5	— 6.8	27	— 6.7	33	— 6.1	23	— 6.1	39	— 6.4	12.2
5— 6	— 6.9	26	— 6.7	30.7	— 6.7	21.5	— 6.2	36.5	— 6.6	114.7
6— 7	— 6.8	25.4	— 6.7	25	— 6.6	17.7	— 7.3	27.8	— 6.9	95.9
7— 8	— 6.9	19.7	— 7.2	20.3	— 7.2	16.8	— 5.9	21.6	— 6.8	78.4
8— 9	— 6.1	14.2	— 6.0	16.2	— 7.9	14.1	— 7.9	13	— 6.9	57.5
9—10	— 6.2	12.3	— 3.9	12.9	— 8.4	12.1	— 7.5	11.4	— 6.5	48.7
10—11	— 5.4	9.4	— 1.8	9.6	— 5.9	8.1	— 5.4	8.5	— 4.5	35.6
11—12	— 2.5	7.6	+ 1.0	8.3	— 2.1	5.1	— 1.9	6.8	— 1.2	27.8
12—13	— 1.3	5	+ 1.2	6.7	+ 0.2	1.9	— 0.5	4.1	+ 0.1	17.7
13—14	— 0.9	2.7	— 3.9	1			+ 1.7	1.4	— 0.8	5.1
14—15	+ 1.9	1.9	— 3.2	1					+ 0.2	2.9
15—16	— 0.6	1	— 3.2	0.5					— 1.5	1.5
16—17	+ 0.1	0.8							+ 0.1	0.8

3. Het waarnemingsmateriaal, waarvan ik mij bediend heb, was het volgende:

Uit het werk I, 31 ballontochten, waarvan 12 die twee aan twee op denzelfden dag waren verricht, zoodat men 25 uitkomsten verkrijgt; uit het werk II, 38 ballontochten alle op verschillende dagen; en uit het werk III, 170 ballontochten verdeeld over 119 verschillende dagen; de waarnemingen die in dit werk als onzeker zijn opgegeven werden door mij verworpen.

In het geheel verkreeg ik dus de uitkomsten van 182 verschillende dagen, waarvan 58 bij helder, 124 bij betrokken weer.

De temperatuurgradienten werden hieruit voor elke maand opgemaakt en, om de nauwkeurigheid te vergrooten, daarna telkens voor drie opvolgende maanden saamgevoegd, December, Januari en Februari (winter), Maart, April en Mei (lente), Juni, Juli en Augustus (zomer), September, October en November (herfst).

C. Helder en betrokken weder.

	Winter.			Lente.			Zomer.			Herfst.			Gemidd.		
	T.V.	A.	Hann.	T.V.	A.	Hann.	T.V.	A.	Hann.	T.V.	A.	Hann.	T.V.	A.	Hann.
0— 1	—1.0	37	+0.5	—3.8	48	—3 1	—3.3	42	—4.1	—2.7	55	—2.1	—2.8	182	—2.2
1— 2	—3.3	37	—2.2	—5.6	47.5	—5.5	—4.7	42	—5.6	—3.6	55	—4.1	—4.3	181.5	—4.4
2— 3	—4.7	37	—5.0	—4.9	48	—5.1	—4.8	42	—5.1	—4.4	55	—4.8	—4.7	182	—5.0
3— 4	—5.7	37	—5.8	—5.6	48	—5.8	—5.2	41.8	—5.6	—5.6	54.5	—5.8	—5.5	181.3	—5.7
4— 5	—6.4	37	—6.7	—6.7	47.3	—6.7	—6.0	41	—5.9	—6.0	53.9	—5.9	—6.2	179.2	—6.3
5— 6	—6.7	34.9	—6.7	—6.8	44.3	—7.3	—6.4	39.5	—6.4	—6.5	50.3	—6.8	—6.6	169	—6.8
6— 7	—6.6	33.4	—6.7	—7.0	37.7	—7.2	—6.6	35	—7.2	—7.1	37.9	—7.1	—6.9	144	—7.0
7— 8	—6.9	26.7	—7.2	—7.4	31.1	—6.3	—7.4	31.4	—7.7	—6.4	29.6	—7.3	—7.3	118.8	—7.1
8— 9	—6.5	19.2	—6.9	—6.1	24	—6.4	—7.6	27.4	—7.6	—7.9	21	—7.6	—7.1	91.6	—7.1
9—10	—6.2	16.3	—6.4	—4.0	18.6	—4.8	—7.8	25.1	—6.9	—7.4	18.4	—6.6	—6.5	78.4	—6.3
10—11	—5.0	12.3	—3.9	—2.0	14.	—0.9	—6.4	18.5	—5.0	—5.7	15.3	—6.1	—4.9	60.7	—4.0
11—12	—2.6	9.6	0.0	—0.2	10.·	+0.5	—4.0	10.3	—2.4	—1.9	12.7	—2.7	—2.1	43.5	—1.2
12—13	—1.2	7		+1.3	7.7		—0.5	3.9		—0.5	9		—0.2	27.6	
13—14	—0.9	2.7		—1.6	2		+1.0	2		—1.3	3		—0.8	9.7	
14—15	+1.9	1.9		—3.2	1		+0.7	1.6		—5.1	1		—0.6	5.5	
15—16	—0.6	1		—3.2	0.5		+0.8	1					—0.6	2.5	
16—17	+0.1	0.8											+0.1	0.8	

Wij mogen uit deze tabellen afleiden dat de gemiddelde temperatuursverandering bij helder en bij betrokken weder alleen in de onderste lagen merkbaar verschilt, maar in de hooge luchtlagen vrij wel dezelfde is.

Ten einde met deze temperatuursverschillen de temperaturen zelve van kilometer tot kilometer te kunnen bepalen, zijn de gemiddelde temperaturen aan de aardoppervlakte uit de opgaven afgeleid. Ik vond :

	betrokken lucht	heldere lucht
Winter	+ 0.°1	— 0.9
Lente	+ 6. 4	+ 5.1
Zomer	+ 14. 4	+ 14.7
Herfst	+ 9. 0	+ 7.9

Met deze aanvangstemperaturen en met de gradienten die, om een

meer vloeiend verloop te verkrijgen, op enkele punten een weinig afwijken van die welke in de tabellen I zijn opgenomen, zijn voor helder weer van kilometer tot kilometer de temperaturen opgemaakt, die in de volgende tabel voorkomen.

TABEL II.

Temperaturen op hoogten van 0 tot 16 kilometer bij helder weder.

	Winter.		Lente.		Zomer.		Herfst.		Gemidd.	
Hoogte.	Temp.	Versch.	Temp.	Versch.	Temp.	Versch.	Temp.	Versch.	Temp.	Versch.
0	— 1.9		+ 5.1		+14.7		+ 7.9		+ 6.4	
		+1.2		—3.6		—2.8		+0.6		—1.1
1	— 0.7		+ 1.5		+11.9		+ 8.5		+ 5.3	
		—4.2		—5.4		—4.3		—3.2		—4.3
2	— 4.9		— 3.9		+ 7.6		+ 5.3		+ 1.0	
		—5.2		—4.9		—4.4		—4.6		—4.8
3	—10.1		— 8.8		+ 3.2		+ 0.7		— 3.8	
		—5.4		—5.8		—5.4		—5.6		—5.5
4	—15.5		—14.6		— 2.2		— 4.9		— 9.3	
		—5.8		—6.7		—5.9		—6.1		—6.1
5	—21.3		—21.3		— 8.1		—11.0		—15.4	
		—6.0		—6.7		—6.0		—6.9		—6.4
6	—27.3		—28.0		—14.1		—17.9		—21.8	
		—6.2		—6.9		—6.6		—7.2		—6.7
7	—33.5		—34.9		—20.7		—25.1		—28.5	
		—6.8		—7.3		—7.3		—7.7		—7.3
8	—40.3		—42.2		—28.0		—32.8		—35.8	
		—7.3		—6.9		—7.6		—7.6		—7.4
9	—47.6		—49.1		—35.6		—40.4		—43.2	
		—6.4		—5.4		—7.2		—6.9		—6.4
10	—54.0		—54.5		—42.8		—47.3		—49.6	
		—4.9		—2.5		—6.8		—6.1		—5.1
11	—58.9		—57.0		—49.6		—53.4		—54.7	
		—2.1		—1.0		—4.0		—2.0		—2.3
12	—61.0		—58.0		—53.6		—55.4		—57.0	
		—1.0		—1.0		—1.0		—1.0		—1.0
13	—62.0		—59.0		—54.6		—56.4		—58.0	
		—0.6		—0.6		—0.6		—0.6		—0.6
14	—62.6		—59.6		—55.2		—57.0		—58.6	
		—0.4		—0.4		—0.4		—0.4		—0.4
15	—63.0		—60.0		—55.6		—57.4		—59.0	
		—0.2		—0.2		—0.2		—0.2		—0.2
16	—63.2		—60.2		—55.8		—57.6		—59.2	

De nauwkeurigheid van de door mij aangenomen temperaturen boven 13 kil. is niet groot, toch geloof ik uit de waarnemingen te mogen afleiden, dat op die hoogte de temperatuur slechts langzaam met de hoogte vermindert. Daar de straalbreking in die hoogere luchtlagen slechts een klein gedeelte van de door mij berekende straalbreking vormt, ongeveer $^1/_{10}$, zal eene fout in de aangenomen temperatuursverdeeling vermoedelijk slechts een geringen invloed op mijne uitkomsten hebben.

Ik merk nog op dat de waarnemingen bijna alle overdag, vooral 's morgens volbracht zijn. Zeker zal de temperatuursverandering, vooral dicht bij het aardoppervlak, over dag en over nacht niet dezelfde zijn, doch het waarnemingsmateriaal was niet groot genoeg om dit verschil met zekerheid te kunnen bepalen. Eindelijk zijn de verschillende ballontochten van uit verschillende stations verricht: Halde (in Denemarken), Berlijn, Parijs, Straatsburg en Weenen, zoodat de door mij opgegeven getallen niet gelden voor eene bepaalde plaats maar voor het gemiddelde van de streek door die stations ingesloten.

Nadat ik de in tabel II vermelde temperaturen had opgemaakt, maakte ik kennis met twee verhandelingen, waarin ten deele hetzelfde onderwerp behandeld is, en wel: J. Hann, Ueber die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 Km. nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege. Sitzungsberichte der mathematisch naturwissenschaftlichen Klasse der K. Akademie der Wissenschaften Wien. Band 93, Abth. II a, S. 571, en S. Grenander, Les gradients verticaux de la température dans les minima et les maxima barométriques. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 2, Hefte 1—2. Upsala, Stockholm.

De uitkomsten voor elke maand tot eene hoogte van 12 kil., door Hann in zijne verhandeling medegedeeld, heb ik telkens voor 3 maanden gemiddeld en die gemiddelden in tabel I naast de door mij verkregen waarden gesteld; de overeenstemming van beide uitkomsten, die voor een groot deel uit verschillende waarnemingen zijn afgeleid, is zeer bevredigend.

Grenander beschouwt in zijne verhandeling vooral de betrekking tusschen de temperatuursveranderingen en de barometerstanden, zijne uitkomsten zijn dus niet onmiddellijk met de mijne te vergelijken; vermoedelijk is men echter het meest gerechtigd de temperatuursveranderingen bij barometermaxima te vergelijken met die, welke ik voor helder weder heb opgemaakt. Op groote hoogten, tot omstreeks 16 kil., verkrijgt Grenander ook bij toenemende hoogten eene geringe temperatuursdaling.

Het is moeilijk te bepalen met welke nauwkeurigheid de door mij in tabel II opgegeven temperaturen werkelijk de gemiddelde waarden in de verschillende jaargetijden voorstellen; de afwijkingen, vooral op groote hoogten, kunnen wellicht enkele graden bedragen, maar zeker stellen zij de gemiddelde temperatuursverdeeling beter voor dan de waarden die men bij de verschillende refractietheorieën heeft aangenomen, en zal men er dus juistere waarden van de straalbreking uit kunnen afleiden.

4. Het is niet wel mogelijk eene eenvoudige formule op te maken die het verband voorstelt tusschen de temperaturen in tabel II en de hoogten, en alzoo eene geschikt integreerbare differentiaalbetrekking tusschen de straalbreking en de luchtdichtheid op eene willekeurige hoogte bij verschillende zenitsafstanden op te maken.

Ter bepaling van de straalbreking bij de door mij aangenomen temperatuursverdeeling heb ik dan ook een anderen weg gevolgd.

Volgens de notatie van RADAU (Essai sur les réfractions astronomiques. Annales de l'observatoire de Paris. Mémoires Tome XIX) is, met verwaarloozing van kleine grootheden, de differentiaal van de straalbreking:

$$ds = \alpha'' \frac{\left(1 - \frac{l_0}{R}(y - 3\,\varepsilon\omega)\right) d\omega}{\sqrt{\left\{\cot^2 z + 2\frac{l_0}{R}(y - \varepsilon\omega) - \left(\frac{l_0}{R}y - 2\frac{l_0}{R}\varepsilon\omega\right)^2\right\}}} \quad . \quad (I)$$

Hierin is:

R aardstraal voor eene breedte van 45°,
r_0 aardstraal voor een willekeurig punt,
h hoogte boven het aardoppervlak,
$r = r_0 + h$,
μ_0 brekingsindex aan aardoppervlak,
μ ,, op hoogte h,
ϱ_0 dichtheid van de lucht aan het aardoppervlak,
ϱ dichtheid op eene hoogte h,
t_0 temperatuur aan het aardoppervlak,
l_0 hoogte van eene overal even dichte luchtzuil op eene breedte van 45°, bij eene temperatuur van t_0, op welke de zwaartekracht in elk punt met dezelfde intensiteit (die van het aardoppervlak) werkt, en waarvan de druk gelijk is aan die van een atmospheer. Volgens de constanten van REGNAULT is $l_0 = 7993\ (1 + \alpha t_0)$ meter, als α de uitzettingscoëfficient van de lucht voorstelt.

Tusschen die grootheden heeft men nog de volgende betrekkingen:

$$\mu^2 = 1 + 2c\varrho \text{ (waarin } c \text{ constant is)}, \quad \omega = 1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

$$\alpha = \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0} \qquad \alpha'' = \frac{\alpha}{\sin 1''} \qquad \varepsilon = \frac{R}{l_0}\alpha \qquad y = \frac{Rh}{(r_0 + h)l_0}.$$

Ter bepaling van de waarde van ds op elke hoogte is nog eene betrekking tusschen ω en y of tusschen ω en h noodig, welke kan opgemaakt in de twee volgende onderstellingen: 1° dat de temperatuur verandert volgens de theorie van IVORY, 2° dat de tempe-

ratuur verandert op de wijze die in tabel II is voorgesteld. In die beide onderstellingen kunnen, voor elke hoogte, de waarden van ds, en dus ook hun verschil, worden berekend, en door mechanische kwadratuur het verschil Δs van de straalbreking s volgens IVORY's theorie en volgens tabel II worden bepaald.

5. In een willekeurig horizontaal aanvangsvlak op een afstand r_0 van het aardmiddelpunt zij de druk p_0, de temperatuur t_0 en de dichtheid van de lucht ϱ_0; in een ander horizontaal vlak, h boven het eerste gelegen, zij de druk p, de temperatuur t en de afstand tot het aardmiddelpunt r, zoo is (zie ook RADAU):

$$l_0\, d\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\varrho}{\varrho_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 dh = -\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{R}{r_0}\, d\left(\frac{Rh}{r}\right), \text{ of } \frac{r_0}{R}\, d\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\varrho}{\varrho_0}\, d\left(\frac{Rh}{l_0 r}\right)$$

stellende $\frac{\varrho}{\varrho_0} = \eta$ en $\frac{Rh}{(r_0+h)\, l_0} = y$ zoo is:

$$\frac{r_0}{R}\, d\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\eta\, dy; \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

verder is

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1+at}{1+at_0}\,\eta = \left(1 - \frac{a\,(t_0-t)}{1+at_0}\right)\eta = (1-\vartheta)\,\eta, \quad \ldots \text{(III)}$$

indien $\frac{a\,(t_0-t)}{1+at_0} = \vartheta$ wordt gesteld.

Deelen wij de beide vergelijkingen II en III op elkander, zoo is:

$$\frac{r_0}{R}\frac{d\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\frac{p}{p_0}} = -\frac{dy}{1-\vartheta},$$

terwijl door logarithmisch differentieeren van III verkregen wordt:

$$\frac{d\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\frac{p}{p_0}} = -\frac{d\vartheta}{1-\vartheta} + \frac{d\eta}{\eta}.$$

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt:

$$dy = \frac{r_0}{R}\left\{d\vartheta - (1-\vartheta)\frac{d\eta}{\eta}\right\} = \frac{r_0}{R}\left\{d\vartheta + (1-\vartheta)\frac{d\omega}{1-\omega}\right\}. \quad \ldots \text{(IV)}$$

Volgens de theorie van IVORY is $\vartheta = f\omega$, waarin f eene standvastige waarde heeft (volgens RADAU 0,2); voert men die betrekking in de vergelijking (IV) zoo verkrijgt men na integratie

$$y = 0{,}4\,\frac{r_0}{R}\,\omega - 1{,}8420681\,\frac{r_0}{R}\,Br.\,log\,(1-\omega) \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

Door de substitutie van (V) in (I) kan dus voor elke waarde van ω de waarde van ds volgens IVORY's theorie berekend worden.

6. Ik zal nu de betrekking bepalen tusschen ω en y volgens de temperatuurstabel II.

Van twee horizontale vlakken ligt het eerste n kil. (n een geheel getal) het tweede hooger gelegene n' kil. ($n' =$ of $< n+1$) boven het aardoppervlak; hunne afstanden tot het aardmiddelpunt zijn r_n en $r_{n'}$, hunne temperaturen t_n, $t_{n'}$ en de waarden van y, y_n en $y_{n'}$. De temperatuur verandert tusschen n en n' kil. regelmatig met de hoogte en voor de eenvoudigheid der formules onderstel ik dat $t_n - t_{n'}$ evenredig is met $y_{n'} - y_n$, zoodat, als $\vartheta_n = \frac{a\,(t_n - t_{n'})}{1+at_n}$ is:

$$\frac{R}{r_n}\,(y_{n'} - y_n) = c_n\,\vartheta_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Hieruit volgt $\frac{R}{r_n}\,dy = c_n\,d\vartheta$ en na substitutie van dy in IV en integratie

$$(c_n - 1)\,lg\,(1 - \vartheta_n) = lg\,(1 - \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

waarin $1 - \omega$ de verhouding is tusschen de dichtheden in de beide horizontale vlakken.

Zoo men voor n', $n+1$ stelt, kan men in de tabel II de temperaturen in die beide vlakken vinden en dus ook ϑ_n; daar tevens y_n en y_{n+1} bekend zijn vindt men uit (VI) de waarde van c_n en uit VII de verhouding tusschen de dichtheden in die beide vlakken op hoogten van n en $n+1$ kil. Door achtereenvolgens voor n, 0, 1, 2, enz. te nemen, kan men een tabel samenstellen die de verhoudingen bevat van de dichtheden van de lucht, D_1, D_2, D_3 enz. in vlakken 1, 2, 3, enz. kil. boven den grond, ten opzichte van de dichtheid aan het aardoppervlak, die gelijk een wordt aangenomen.

Gemakkelijk kan men uit deze tabel de hoogte bepalen van eene luchtlaag van eene gegeven dichtheid d. Zoo d ligt tusschen D_n en D_{n+1}, moet de laag gelegen zijn tusschen n en $n+1$ kil., en men behoeft nu nog slechts te weten op welke wijze, binnen dezen kilometer, de dichtheid met de hoogte h boven het onderste vlak verandert.

Met groote benadering mag gesteld worden:

$$\frac{d}{D_n} = 10^{-ah}.$$

Voor $h = 1$ kil., is $d = D_{n+1}$, dus $a = -lg \frac{D_{n+1}}{D_n}$.

Daar a bekend is kan, voor elke waarde van d, h en derhalve ook y bepaald worden.

Door substitutie in I vindt men dan voor elke waarde van ω de waarde van ds.

7. Men kan nu de verschillen vormen van ds volgens de theorie van IVORY en volgens de temperatuurstabel II, voor waarden van ω die van 0 tot 1 met gelijk bedrag opklimmen, en vervolgens door kwadraturen het geheele verschil van de straalbreking in beide gevallen bepalen.

Voor groote waarden van z en kleine waarden van y en ω, zal de coëfficient van $d\omega$ in (I) vrij groot worden, hetgeen niet gunstig is voor de nauwkeurigheid der uitkomsten. De nauwkeurigheid vermindert ook zoo men de verschillen tusschen de opvolgende waarden van ω groot neemt; kleine verschillen zijn dus wenschelijk, doch hierdoor wordt de berekening langer.

Deze beide bezwaren kan men voor een deel verminderen, indien men, volgens eene opmerking van RADAU, in plaats van ω, $\sqrt{\omega}$ als veranderlijke grootheid invoert; de waarde van ds wordt dan:

$$ds = \frac{a''}{\sqrt{\frac{l_0}{2R}}\sqrt{\left\{\frac{\frac{R}{2l_0}\cot^2 z + y}{\omega} - \varepsilon - \frac{l_0}{2R\omega}(y - 2\varepsilon\omega)^2\right\}}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{l_0}{R}(y - 3\varepsilon\omega)\right) d\sqrt{\omega}}{} \quad \text{(VIII)}$$

of bij benadering:

$$ds = \frac{a''}{\sqrt{\frac{l_0}{2R}}\sqrt{\left\{\frac{\frac{R}{2l_0}\cot^2 z + y}{\omega} - \varepsilon\right\}}} \cdot \frac{d\sqrt{\omega}}{}$$

Het is duidelijk dat voor kleine waarden van ω de coëfficient van $d\sqrt{\omega}$ in (VIII) kleiner is dan die van $d\omega$ in (I), en dat tevens de straalbreking in de onderste luchtlagen met behulp van de eerste formule nauwkeuriger zal worden gevonden dan met behulp van de laatste.

Laat men toch in formule (VIII) $\sqrt{\omega}$ en in formule (I) ω van nul af met gelijke bedragen toenemen, dan is, van ω gelijk nul tot ω gelijk 0,2, het aantal waarden in het eerste geval tweemaal grooter dan in het tweede, zoodat de integratie door kwadraturen in het eerste geval juistere uitkomsten zal opleveren.

Om deze redenen heb ik mij van de formule (VIII) bediend, en

de coëfficient van $d\sqrt{\omega}$ berekend voor waarden van $\sqrt{\omega}$, die telkens met 0,05 toenemen, te beginnen met $\sqrt{\omega} = 0$.

De dichtheid van de lucht overeenstemmende met $\sqrt{\omega}$ gelijk 0,95 wordt gevonden op eene hoogte van gemiddeld 18 kilometers. Uit de door mij gebruikte waarnemingen konden geen betrouwbare waarden van de temperatuur op hoogten boven 16 kilometers worden afgeleid; ik meende echter bij benadering te mogen aannemen, dat op die hoogte de temperatuur slechts weinig verandert, en stelde haar op hoogten van 17 en 18 kilometers gelijk aan die, welke ik op 16 kilometers heb gevonden.

Op deze wijze zijn door mechanische kwadratuur en eene benaderde berekening der straalbreking tusschen $\sqrt{\omega}$ gelijk 0.925 en 0.95 de verschillen Δs bepaald van de breking welke de lichtstralen volgens de theorie van IVORY en volgens de temperatuurstabel II ondergaan in de luchtlaag gelegen tusschen het aardoppervlak en een vlak dat omstreeks 18 kil. hooger ligt en waar $\sqrt{\omega} = 0.95$ is.

Deze berekening heb ik uitgevoerd voor zenitsafstanden van 85°, 86°, 87°, 88°, 88°30′, 89°, 89°20′, 89°40′ en 90°.

Een opzettelijk onderzoek heeft mij geleerd, dat de termen $\frac{lo}{R}(y - 3\varepsilon\omega)$ in den teller en $\frac{lo}{2R\omega}(y - 2\varepsilon\omega)^2$ in den noemer mogen verwaarloosd worden voor alle zenitsafstanden met uitzondering van $z = 90°$; in dit geval heb ik ze dan ook in rekening gebracht.

De door mij verkregen uitkomsten voor de verschillen, Δs = IVORY—temperatuurstabel, zijn de volgende:

TABEL III.

Straalbreking volgens IVORY — Straalbreking volgens temperatuurstabel II.

Zenits-afstand	Winter	Lente	Zomer	Herfst	Jaarge-middelde	Jaar-gemid. — Winter	Jaar-gemid. — Lente	Jaar-gemid. — Zomer	Jaar-gemid. — Herfst
85°	+ 0″21	+ 0″78	+ 0″66	+ 0″31	+ 0″49	+ 0″28	− 0″29	− 0″17	+ 0″18
86°	+ 0.13	+ 1.26	+ 0.95	+ 0.30	+ 0.66	+ 0 53	− 0.60	− 0 29	+ 0.36
87°	− 0.47	+ 2.08	+ 1.31	− 0.20	+ 0 66	+ 1 13	− 1.42	− 0.65	+ 0.86
88°	− 3 93	+ 3.10	+ 0.95	− 3.29	− 0.83	+ 3 10	− 3.93	− 1.78	+ 2.46
88°30′	− 9.64	+ 3.06	− 0 67	− 8.51	− 3.95	+ 5.69	− 7.01	− 3.28	+ 4.56
89°	−23.69	+ 1.08	− 5.45	−21.15	−12.31	+11.38	−13.39	− 6 86	+ 8.84
89°20′	−43.80	− 3.17	−12 68	−38.77	−24.51	+19 29	−21 34	−11.83	+14.26
89°40′	−1′ 21″97	−13.07	−25.25	−1′ 11″16	−27.74	+34.23	−34.67	−22.49	+23.42
90°	−2 32.4	−33.1	−52.9	−2 9.6	−1′30″9	+1′ 1″5	−57.8	−38.0	+38.7

Als controle voor de berekeningen kan dienen de vergelijking van het gemiddelde der waarden van Δs voor de vier jaargetijden, en de daarvan onafhankelijk berekende waarde van Δs in de 6e kolom voor de gemiddelde jaartemperaturen, die op weinig na gelijk zijn aan de gemiddelde der temperaturen in de vier jaargetijden. Alleen voor $z = 89°40'$ en $z = 90°$ vertoonen deze waarden afwijkingen grooter dan 0".1.

Uit tabel III blijkt 1° dat bij eene temperatuursverdeeling, zooals die door mij uit de waarnemingen is afgeleid, de straalbreking merkbaar afwijkt van die welke uit IVORY's theorie wordt gevonden, 2° dat de verschillen in de straalbreking in de verschillende jaargetijden van ongeveer dezelfde orde zijn als de afwijkingen zelve. Uitdrukkelijk wijs ik er echter op, dat 1° de aangenomen temperatuursverdeeling boven 13 kil. en vooral van 16 tot 18 kil. vrij onzeker is, en 2° dat buiten rekening is gelaten de straalbreking in de lagen die meer dan 18 kil. boven het aardoppervlak liggen, of juister, waar de dichtheid met betrekking tot die aan het aardoppervlak kleiner dan $1 - 0{,}95^2$, of kleiner dan 0,0975 is.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den heer J. BÖESEKEN: *„Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus"*.

(Mede aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

I.

Uit de onderzoekingen van HITTORF (Pogg. Ann. 126 pag. 193) LEMOINE (Ann. Ch. Ph. [4] 24. 129) TROOST en HAUTEFEUILLE (Ann. Ch. Ph. [5] 2 pag. 153), R. SCHENCK (B. Ch. G. 1902 p. 351 en 1903 p. 970) en de verhandelingen van NAUMANN (B. Ch. G. 1872 p. 646), SCHAUM (Lieb. Ann. 1898. 300 p. 221), WEGSCHEIDER en KAUFLER (Cent. Blatt 1901 I p. 1035) en ROOZEBOOM (Das heterogene Gleichgewicht I p. 171 en 177) volgt met zeer groote waarschijnlijkheid, dat de roode phosphor een polymeer is van de gele, welke polymerie echter uitsluitend gebonden is aan den vloeibaren en den vasten toestand: de damp bestaat (beneden 1000°) steeds uit het monomeer P_4.

Daarenboven volgt uit genoemde beschouwingen, dat de gele phosphor bij alle temperaturen beneden het smeltpunt der roode phosphorus (630°) metastabiel is; men kan dus verwachten, dat zij beneden 630° in de roode zal trachten over te gaan.

Hoewel er vele gevallen zijn, dat een dergelijke overgang evenals bij phosphorus bij lage temperatuur, uiterst langszaam geschiedt, is de snelheid in dit geval toch treffend klein. Zelfs bij 200°, waarbij de metastabiele stof reeds een aanzienlijke dampspanning bezit, is zij nog onmeetbaar, ook al is er roode phosphorus aanwezig. [1]) Deze buitengewone traagheid, ondands de aanzienlijke warmte hoeveelheden, die er bij den overgang vrij komen en de totale verandering van eigenschappen, die daarmede samenhangt, hebben dus *wel* reeds lang de overtuiging gevestigd dat de beide phosphormodificatie elkanders polymeeren zijn, en dat de roode dan een veel complexer molekuul heeft dan de gele, maar de eigenlijke oorzaak van die traagheid, is daarmede niet opgehelderd.

Op de vraag *hoe* deze condensatie plaats grijpt heeft SCHENCK (l.c.) langs experimenteelen weg het eerst een antwoord trachten te geven. Door koken van gele phosphor met een overmaat PBr_3, gelukte het hem bij 172° haar met meetbare snelheid in roode te veranderen en uit zijn eerste onderzoekingen leidde hij af, dat de orde dezer reactie een bi-molekulaire was:

$$2\,P_4 \rightarrow P_8.$$

Dit zou de eerste phase voorstellen, want er werd door SCHENK op gewezen, dat de roode P zeker een hooger molekulair-gewicht had dan P_8, welke verdere condensatie dan met zeer groote snelheid zoude verloopen, m.a.w. hij kwam tot het vrij onwaarschijnlijk resultaat, dat de condensatie van P_8 tot P_n aanzienlijk veel sneller zou plaats vinden, dan der eenvoudige P_4 molekulen tot P_8.

Bij een herhaling dezer meetingen in gemeenschap met een zijner leerlingen (E. BUCK), komen zij dan ook tot de overtuiging, dat de reactie mono-molekulair is (B. Ch. G. 1903 p. 5208). Hij zegt daaromtrent „Daraus geht mit Sicherheit hervor, dass die Reaction der omwandlung des weissen Phosphors in rothen monomolekular verläuft."

Hij laat daar echter op volgen „Daraus könnte man den Schluss ziehen, dass die Molekular-gewichte des weissen und rothen Phosphors identisch sind."

Het komt mij voor dat SCHENK hier een minder gelukkig besluit trekt. Uit het constateeren van een mono-molekulaire reactie behoeven wij niet af te leiden, dat het *geheele* proces zich zoodanig afspeelt.

---

[1]) ROOZEBOOM (l.c.) vergelijkt dit met de krystallisatie-vertraging van sterk onderkoelde smelten, daar 200° meer dan 400° ligt beneden het smeltpunt van de roode P; het komt mij echter voor dat hieraan bij een relatief hooge temperatuur en vooral in de zeer bewegelijke gele P (ROOZEBOOM l.c. pag. 89) niet gedacht moet worden en dat de oorzaak daarvan elders moet gezocht worden (z. o.)

Integendeel wij mogen en moeten, zooals bij zoovele andere chemische omzettingen aannemen, dat hetgeen gemeten wordt, slechts geldt voor een onderdeel van de geheele reactie en wel voor datgene met de geringste snelheid.

Het ligt nu zeer voor de hand, om in dit geval te vermoeden, dat de snelheidsbepalingen van SCHENCK en BUCK gelden voor de ontleding van het P_4 molekuul [1]) in eenvoudiger stukken (P_2 of P), die zich dan momentaan tot de roode modificatie condenseeren, zoodat wij ons het geheele proces bijv. aldus kunnen voorstellen:

$$P_4 \text{ (geel)} \rightarrow 2P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$nP_2 \rightarrow P_{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarbij de reactiesnelheid van (2) zeer veel grooter is dan van (1).

(Men zou hierbij ook een omzetting van de metastabiele phosphorus in een *labiele* P_4 als primaire reactie kunnen accepteeren, dit acht ik echter niet zoo waarschijnlijk, omdat een *splitsing* bij de bepaling van de dampdichtheid boven 1000° inderdaad is geconstateerd.

Dat deze ontledingssnelheid bij 200°, (zonder katalysator) nog uiterst gering zal zijn, kan, gegeven de groote stabiliteit van P_4 in dampvorm geen verwondering wekken en als deze ontleding, zooals ik veronderstel, de condensatie vooraf moet gaan, dan zal de afscheiding der roode phosphorus bij die temperatuur, minstens even langzaam verloopen.

Ook de snelle overgang der gedissocieerde P_2 of P in rooden phosphorus heeft niets onwaarschijnlijks.

Dat de allotrope omzetting vooral onder invloed van zonlicht plaats vindt, is zeker niet in strijd met de opvatting van een primaire splitsing; immers wij weten, dat de actinische stralen, vooral de ontledingen in de hand werken (bijv. van HJ, AgBr, C_2J_2, enz.).

Ik wijs er overigens op, dat een primaire splitsing ook bij andere monomoleculaire reacties is aangenomen o. a. bij de ontleding van AsH_3 (VAN 'T HOFF's Vorlesungen) van CO (SCHENCK B. Ch. G. 1903 pag. 1231 en SMITS en WOLFF (Kon. Akad. v. W. 1902 p. 417). [2])

De monomolekulaire splitsing van C_2J_2 in C en C_2J_4 (SCHENCK

---

[1]) Hoewel de grootte van het molekuul der vloeibare gele phosphor niet met zekerheid bekend is, is toch de identiteit met die van den damp zeer waarschijnlijk; aan het betoog doet dit overigens niets af.

[2]) Ik noem hier met opzet niet de fraaie onderzoekingen van M. BODENSTEIN, hoewel hij o. a. bij de vereeniging van S en H ook tot het resultaat komt, dat een primaire splitsing van het S_8 molekuul aan de vereeniging met H_2 voorafgaat, omdat men hier met heterogene systemen te doen heeft, waarbij oplossingssnelheden een belangrijke rol spelen.

und LITZENDORFF B. 1905 p. 3459) kan ook het eenvoudigst worden geinterpreteerd door de opeenvolging der reacties.

$$C_2J_2 \rightarrow C + CJ_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$nC \rightarrow C_n \text{ en } 2\ CJ_2 \rightarrow C_2J_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

II.

De metingen van SCHENCK en BUCK zijn verricht bij het kookpunt van PBr_3. Daar dit bij 172° ligt, blijkt, dat door het oplosmiddel een aanzienlijke versnelling op de omzetting wordt uitgeoefend; daar zuivere gele phosphor bij 200° zoo goed als onveranderd blijft.

Het oplosmiddel werkt dus katalytisch; een nog veel krachtiger invloed heeft $AlCl_3$. Brengen wij dit met gesmolten phosphor in geëvacueerde buizen samen, dan heeft de omzetting reeds beneden 100° plaats.

De katalysator bedekt zich direct met een laag licht roode phosphor, die vrij moeilijk door schudden te verwijderen is, zoodat men van tijd tot tijd een nieuwe hoeveelheid $AlCl_3$ moet toevoegen. Veel gelijkmatiger is de inwerking wanneer men benzol (en vooral PCl_3) als oplosmiddel toevoegt. Bij het kookpunt daarvan is de omzetting na enkele uren (resp. minuten) afgeloopen; het produkt is de SCHENCK'sche scharlakenroode P, ook in dit geval sterk verontreinigd, met benzol en condensatie-produkten, die uiterst hardnekkig worden vastgehouden.

In verband met de uiteenzetting in het eerste gedeelte dezer mededeeling, geloof ik, dat de waarnemingen van SCHENCK en mij eenig licht werpen op katalytische werkingen in 't algemeen.

Het is nml. zeer waarschijnlijk (z. b) dat er bij deze allotrope omzetting eerst een splitsing intreedt — wij zien dat de omzetting, dus ook de splitsing door PBr_3 of $AlCl_3$ versneld wordt. Zal dit bij katalyse niet meestal geschieden? Daar aan de meeste reacties een dissociatie moet vooraf gaan, is het waarschijnlijk dat deze vraag bevestigend moet beantwoord worden. (Ik wijs er hier overigens met nadruk op, dat wij met het oplossen van deze vraag niet doordringen in het eigenlijke wezen der katalyse. *Waarom* de dissociatieversnelling intreedt, of dit samenhangt met het tijdelijk in verbinding treden van den katalysator met de werkzame molekulen, of dat door den katalysator de oorzaak, die de dissociatie belemmert, wordt opgeheven, blijft onopgehelderd en kan te dezer plaatse buiten bespreking blijven).

Zoover ik heb kunnen nagaan is deze opvatting niet met de waargenomen feiten in strijd, integendeel er zijn tal van gevallen bekend,

waarbij een katalysator *direkt* een splitsing teweeg brengt of aanzienlijk versterkt.

Platina bijv. werkt de ontleding van H_2O_2, ozoon, salpeterzuur, hydrazine, enz. krachtig in de hand.

Aluminiumchloride werkt direkt splitsend op de homologen van benzol, op de zeer stevige polyhalogeen-derivaten, op aromatische aethers, op sulfurylchloride, enz. Het aantal dezer ontledingen is zoo aanzienlijk, dat wij ook in andere gevallen, waarin wij geen direkte dissociatie door den katalysator kunnen aantoonen, mogen aannemen, dat zij wel primair plaats vindt, of juister, dat een reeds plaats vindende uiterst geringe dissociatie versneld wordt, zoodanig, dat een systeem den stabieleren evenwichtstoestand veel sneller bereikt dan zonder katalysator.

De groote warmteontwikkeling bij het proces

$$HCCl_3 + 3\,C_6H_6 + (AlCl_3) = (C_6A_5)_3\,CH + 3\,HCl + (AlCl_3)$$

wijst er op, dat het systeem rechts een stabieler toestand is dan links. Dat zij zonder $AlCl_3$ geen merkbaren voortgang heeft, wijt ik dus aan de geringe dissociatie-snelheid van chloroform ; de katalysator versnelt nu deze dissociatie, waardoor de stabiele evenwichtstoestand in weinig tijd wordt bereikt Deze reactie wordt voortdurend heviger (bij constant houden van de temperatuur). Dit verschijnsel kan gemakkelijk verklaard worden als men in 't oog houdt, dat de reactie in verschillende gedeelten verloopt (er ontstaan achtereenvolgens $C_6H_5CHCl_2$, $CHCl(C_6H_5)_2$ en $CH(C_6H_5)_3$) en dat de chloorhoudende tusschenprodukten veel gemakkelijker ontleed worden dan $CHCl_3$.

Wanneer zwavel met benzol en aluminiumchloride gekookt wordt, ontstaan bijna uitsluitend $(C_6H_5)_2S$, $(C_6H_4)_2S_2$ en H_2S. Zonder den katalysator heeft zoo goed als geen inwerking plaats, omdat de dissociatie van S_8 in oplossing van benzol bij 80° minimaal is ; (bij koken met toluol ontstaat er reeds zonder $AlCl_3$, H_2S en condensatie producten door het aluminiumchloride wordt de reactie $S_8 \rightarrow 4S_2$ versneld en daardoor de vorming der condensatieproducten. Deze verklaring is dus volkomen gelijk aan die welke wij voor de reactie van P_4 met benzol en aluminiumchloride gegeven hebben ; het eenige verschil is dat bij deze laatste als tweede gedeelte der reactie de condensatie van P_2 tot roode phosphor, bijna uitsluitend plaats vindt, een condensatie, waaraan de zwavel niet in die mate onderhevig schijnt te zijn, zoodat de gedissocieerde zwavel met benzol de bovengenoemde produkten vormt.

Het vormen van een verbinding van den katalysator met een der reageerende stoffen, acht ik alleen in zoover belangrijk voor het plaats vinden van de reactie, dat zich één phase kan vormen,

overigens werkt het de reactie eerder tegen, omdat de katalysator tot op zekere hoogte wordt geparalyseerd. Een der krachtigste katalysatoren, het platina, is juist gekenmerkt, doordat het zich *niet* (of tenminste zeer moeilijk) met de reageerende molekulen vereenigt, daarentegen wel een soort van vaste oplossingen vormt. Het koolstoftetrachloride, dat geen verbinding met aluminiumchloride vormt, wordt zeker niet minder gemakkelijk door benzol in tegenwoordigheid van dezen katalysator aangegrepen, dan het benzoylchloride dat wel een additie-produkt vormt, terwijl toch het chlooratoom in het zuurchloride zeker niet minder „bewegelijk" is, dan dat van het CCl_4.

Gustavson stelt zich voor, dat de vorming van verbindingen, zooals $C_6H_3(C_2H_5)_3 Al_2Cl_6$ noodzakelijk is voor de inwerking van C_2H_5Cl op benzol; deze werden afgescheiden uit de onderste vloeistoflaag, die zich bij de inwerking van C_2H_5Cl op benzol en aluminiumchloride vormt; wanneer men echter het vormen dezer tweede laag zooveel mogelijk voorkomt, wordt het rendement aan geaethyleerd benzol beter, *noodzakelijk* acht ik haar vorming dus zeker niet; dat zij misschien wel gunstig kan werken, komt omdat zoowel de katalysator als de beide op elkander inwerkende molekulen er in oplosbaar zijn, waardoor zij in geconcentreerde oplossing op elkander kunnen inwerken.

Zooals boven opgemerkt ligt in het aannemen van tusschen-reacties, voor de verklaring van katalytische verschijnselen iets onbevredigends; ik wil dit nog nader trachten te preciseeren.

Zooals bekend is, kunnen wij de reactie-snelheid van de een of andere toestandsverandering evenredig stellen aan het product $= \frac{\text{drijvende kracht}}{\text{weerstand}}$; waarbij de drijvende kracht voor die toestandsverandering een bepaalde grootte bezit, waaraan een katalysator niets kan veranderen; de weerstand echter is afhankelijk van grootendeels nog onbekende invloeden. Deze moet dus door den katalysator verminderd worden en de vraag, die men tracht op te lossen luidt: „Waarop berust deze weerstandsvermindering?"

Wanneer wij aannemen, dat daarbij tusschenreacties plaats vinden, dan verdeelen wij het proces in een reeks andere, waarvan, elk afzonderlijk beschouwd, door een geringere drijvende kracht wordt voortbewogen, dan de geheele verandering; de weerstand van elk dier deelprocessen, moet dus veel geringer zijn, en de vraag moet dus bij deze veronderstelling luiden: Hoe komt het dat die tusschenreacties veel sneller verloopen, dan de hoofdreactie, wat feitelijk niets anders is dan een omschrijving van de eerste vraag: hoe komt het dat de katalysator den oorspronkelijken weerstand vermindert?

Wij zijn door het aannemen van tusschenproducten dus niet heel veel wijzer geworden, integendeel wij hebben het probleem ingewikkelder gemaakt, omdat wij in plaats van de verklaring eener enkele snelheidsvermeerdering, moeten zoeken naar die van minstens twee.

Ik herinner hierbij aan de opvatting van OSTWALD, die zich elk proces voorstelt als een opeenvolging van toestandsveranderingen; welke alle mogelijk zullen zijn, als zij onder potentiaal vermindering geschieden. Wanneer echter de eerste dier veranderingen alleen kan aanvangen onder opname van vrije energie, zal het proces niet plaats vinden, tenzij er een katalysator bij gevoegd wordt; deze opent dus een anderen weg. Nu wordt er naar mijne meening te veel op de mijlpalen op dien weg, en te weinig op het openen zelf gelet.

Dit is vooral een gevolg daarvan, dat wij van de zoogenaamde „passieve weerstanden" zoo weinig weten, bijv. geen voldoende verklaring kunnen geven van het feit, dat jodium veel sneller bij lage temperatuur op metalen inwerkt dan zuurstof, hoewel het potentiaal verval veel geringer is. Toch dunkt mij, dat wij dat vooral moeten zoeken in de gemakkelijke splitsbaarheid van het jodiummolekuul, waarbij dan de veronderstelling wordt ingevoerd dat atomen sneller reageeren dan molekulen, een veronderstelling die trouwens reeds bijna een eeuw oud is.

Is dit inderdaad zoo, dan zoude de werking van een katalysator gezocht moeten worden in de vermeerdering dezer dissociatie.

Nu zijn er tal van reacties gevonden, waarbij de katalysator ongetwijfeld een verbinding vormt met een der reageerende molekulen welk additie-produkt zich met het tweede molekuul omzet tot het eindprodukt onder vrijkoming van den katalysator, maar zelfs in zulk een geval, dat door velen pseudo-katalyse (WAGNER, Z.phys. Ch, 28 p. 78) genoemd wordt, beschouw ik het *vormen* van deze verbinding niet als iets essentieels, zonder hetwelk de versnelling niet zou plaats hebben.

Zonder beteekenis acht ik de vorming van een dergelijk additieproduct zeker niet, daar het een aanwijzing is, dat de katalysator op één der molekulen een bijzonderen invloed uit kan oefenen; de eigenlijke snelheidsvermeerdering ligt naar 't mij voorkomt eerder in dien invloed dan in de vorming van het additie-produkt, en met het oog op 't geen hieraan voorafgaat bestaat die invloed vermoedelijk uit een vermeerdering van de dissociatie (en daardoor van de „actieve" massa).

Het spreekt dan van zelf, dat een katalysator des te krachtiger zal werken, naarmate de additie-producten labieler zijn. Boven heb ik platina genoemd, ik wijs hier ook op de H-ionen, waarvan de

vorming van additie-producten bijv. bij de versnelling van de verzeeping toch verre van waarschijnlijk is. Als een zeer doorzichtig voorbeeld noem ik den verschillenden katalytischen invloed, die I en $AlCl_3$ uitoefenen op de bovengenoemde omzetting van gele in roode P.

Uit de onderzoekingen van Brodie (Ann. de Ch. Ph. 1853 pag. 592) die ik volkomen bevestigd heb gevonden, kan met een geringe hoeveelheid I een groote hoeveelheid witte P reeds bij 140° zeer snel in rooden worden omgezet (dat hier een grens bestaat, komt zooals in zoovele andere gevallen, doordat de katalysator door de ontstane colloidale P wordt gepraecepiteerd).

De snelheid is bij gewone temperatuur zeer gering, wordt echter reeds duidelijk merkbaar bij 80°. Wij hebben hier ongetwijfeld met een voorbeeld te doen, waarbij de katalysator zich verbindt met den phosphorus tot P_2I_4; dit lichaam begint nu bij 80° meetbaar te dissocieeren {zoodat de dampdichtheid alleen bij lage temperatuur kon worden bepaald (Troost C.R. **95**. 293)} onder afzetting van *rooden* phosphorus. Wij kunnen dus hier een vrij positief antwoord geven op de vraag. Hoe komt het dat het tweede deel-proces sneller verloopt dan het oorspronkelijke? Omdat het P_2I_4 zeer veel sneller dissocieert, dan P_4.

Maar dit is ten slotte niet anders dan een gelukkige omstandigheid; de eigenlijke oorzaak moeten wij zoeken in het feit, dat om tot P_2J_4 te komen het P_4 molecuul gedissocieerd moet worden. Bij het $AlCl_3$ heb ik een additieprodukt niet kunnen vinden, wel eenige aanwijzingen, dat er behalve de allotrope omzetting, nog een spoor PCl_3 gevormd wordt (zelfs bij volkomen droge stoffen wees de manometer na eenige uren op 100° verhitten, een geringe toename van de dampspanning aan).

[Dat de ontstane roode P in hooge mate de eigenschap heeft den katalysator mee te praecipitereen zou er misschien op kunnen wijzen, dat er toch tusschen den gelen P en het $AlCl_3$ een verbinding ontstond; uit het bovenstaande volgt, dat er wel een zekere wisselwerking[1]) mogelijk is, maar dit mee-praecipiteeren schrijf ik toe aan de colloïd-eigenschappen van den rooden P, die bij zijn ontstaan uit alle oplosmiddelen, ook onder invloed van lichtstralen een zekere hoeveelheid meesleept], maar ook al wordt er een additieprodukt gevonden, dan is evenmin als bij het P_2J_4 het bestaan van dit lichaam de oorzaak van de versnelling.

Integendeel het ontstaan eener verbinding van den katalysator

---

[1]) Een dergelijke wisselwerking heb ik o. a. ook gevonden bij de inwerking van C_2H_5Br op $AlCl_3$, waarbij $AlCl_3$ en C_2H_5Cl ontstaan; zij wijst ongetwijfeld op een dissociatie.

beschouw ik als een „vergiftiging," bewerkt door een der reageerende molekulen, evenals arsenicum en blauwzuur vergiften zijn voor het platina, omdat zij, door zich er mede te verbinden het intreden van O_2 en H_2 (resp. SO_2) beletten ; evenals aether een vergift is voor het $AlCl_3$, omdat het zich er mee vereenigt tot een stevige verbinding, die eerst boven 100° begint te ontleden, de temperatuur, waarbij de katalysator zich weer herstelt.

Nu wil ik niet ontkennen, dat wij met deze dissociatie-opvatting nog niet veel verder zijn (ook is zij absoluut niet nieuw), want de vraag van zooeven luidt nu : Hoe komt het dat een katalysator de dissociatie versnelt? Maar mijn doel was er op te wijzen, dat het vormen (en eventueel het aannemen van de vorming) van tusschenprodukten zeker nooit tot een verklaring van de katalytische verschijnselen kan leiden.

2e Chem. Lab. der Rijksuniversiteit te Groningen.

Dierkunde. — De Heer Hubrecht biedt eene mededeeling aan van den Heer J. Boeke over: *„Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei".*

(Mede aangeboden door den Heer Max Weber).

1. Het gastrulatieproces bij teleostei wordt in het algemeen nog meestal zoo opgevat, dat zich door omslag en gedeeltelijke delaminatie aan den rand van het blastoderm een naar binnen omgebogen celmassa vormt, die zoowel het materiaal voor chorda en mesoderm als dat voor het darmentoderm in zich bevat. Slechts door Waclaw Berent, M. v. Kowalewski (in zijne verhandeling van 1885), F. B. Sumner en schrijver dezes is een meer of minder onafhankelijke oorsprong van mesoderm (+ chorda) en entoderm beschreven. Voor de studie van deze processen bieden de eieren der muraenoiden, die, in een groot aantal exemplaren te Napels verzameld, mij het materiaal voor mijn onderzoek leverden, en ook aan Dr. Sumner zijne meest bewijzende praeparaten verschaften, een in vele opzichten zeer veel gunstiger materiaal aan dan de zoo dikwijls bestudeerde eieren der Salmoniden [1]). De vorming van chorda en mesoderm uit den omslag van het kiemvlies en van het entoderm uit de met de deklaag en met den periblast samenhangende prostomaalverdikking is bij de

[1]) Noch Henneguy, noch Kopsch of Jablonowski, om slechts enkelen te noemen, zagen iets van deze differentiatie. Sumner geeft daarentegen van Salvelinus zeer duidelijke beelden. Arch. f. Entwicklungsmechanik. Bd. 17. 1903.

muraenoiden-eieren tot aan de sluiting van den dooierblastoporus duidelijk te zien (cf. SUMNER 1903, pag. 145) en mijne in mijn vorig opstel [1]) uitvoerig beschreven uitkomsten kon ik dan ook nu, na een herhaald onderzoek dezer eieren [2]), volkomen bevestigen.

In verband met de nieuwe juistere opvattingen omtrent het gastrulatieproces bij de vertebrátae moet echter ook bij de teleostei dit proces scherper worden omlijnd. Werd reeds in den laatsten tijd een onderscheid gemaakt tusschen de eerste phase van het gastrulatieproces, waardoor het darmentoderm, en de tweede phase, waardoor het mesoderm (+ chorda) werd gevormd, [1]) thans moet de grenslijn nog scherper worden getrokken, en het geheele tweede gedeelte van het proces van de eigenlijke gastrulatie worden gescheiden.

Onder gastrulatie verstaan wij dan volgens de definitie van HUBRECHT het proces, waardoor een darmentoderm tegenover een huidectoderm wordt gedifferentieerd, en derhalve uit de eenbladige kiemaanleg zich eene uit twee lagen cellen bestaande vormt. Het zich aan deze gastrulatie aansluitend proces van de vorming van chorda en mesoderm (notogenese HUBRECHT) is eene voor de chordatae karakteristieke secundaire complicatie van het proces, die er niet mede mag worden vereenzelvigd.

De meest primitieve vormingswijze van het entoderm is volgens HUBRECHT die door delaminatie en niet die door invaginatie. Het komt echter vooral op het eindresultaat, de vorming van twee kiembladen, aan. Zoodra deze in aanleg gevormd zijn, is het eigenlijke gastrulatie-proces afgeloopen.

Dit is bijv. bij amphioxus reeds geschied op het mutsvormige stadium, waarbij de twee lagen (ectoderm en entoderm) tegen elkaar zich aanleggen, de blastulaholte derhalve verdwenen is, doch de blastoporus nog de wijdte van den diameter der oorspronkelijke blastula bezit. Al wat hierop volgt tot aan de sluiting van den blastoporus (Rückenmund van HUBRECHT) is notogenese en leidt slechts tot de vorming van rug (chorda) en mesodermplaten, en tot de omvorming van de gastrula bij het verdwijnen van den gastrulamond.

Brengt men dit over op de teleostei, dan komt men tot de slot-

---

[1]) PETRUS CAMPER, Deel 2, pag. 135—210.

[2]) Gedurende de laatste 2 à 3 jaren schenen Muraenoiden-eieren in de golf van Napels bijna geheel te ontbreken. Nu (zomer 1906) kon ik er weder een vrij groot aantal verzamelen. Bij het vergelijken van de verschillende maten (van eikapsel, dooierspheer, oliedruppels enz.) dezer eieren met die der vroeger door mij verzamelde bleek het aantal scherp van elkaar te onderscheiden soorten nog grooter te zijn dan ik vroeger meende en minstens 10 te bedragen. Dr. SANZO kwam te Messina tot hetzelfde resultaat.

som, dat hier de gastrulatie reeds afgeloopen is, zoodra de prostomaalverdikking gevormd is, dat is dus reeds bij het begin van de dooieromgroeiing. Dan is reeds het entoderm in aanleg voorhanden, dan treedt ook de omslag van de ectodermale cellen op, die leidt tot de vorming van chorda en mesoderm, en begint de concentratie van de cellen van het kiemschild naar de mediaanlijn, die tot de vorming van het smalle embryo uit het breede korte kiemschild leidt. Dan is ook de blastulaholte, zoo die bestond (zie bl. 5), als zoodanig verdwenen; alles wat hierop volgt, groei van het embryo in de lengte, omgroeiing van den dooier door den blastodermring, sluiting van den dooierblastoporus, behoort bij de notogenese en mag evenmin tot de gastrulatie worden gerekend als bijv. de omgroeiing van den dooier door entoderm bij sauropsiden. Gedurende dit proces wordt wel het embryo langer, worden dus ook van uit de prostomaalverdikking steeds nieuwe entodermcellen geproduceerd en naar binnen voortgeschoven, doch dit ligt reeds buiten het eigenlijk proces der gastrulatie. Het is bekend, hoe de snelheid, waarmede de dooiermassa door het blastoderm wordt omgroeid, van verschillende factoren, waaronder ook de grootte der dooierkogel eene rol speelt, afhangt. Bij muraenoiden is de dooierblastoporus reeds gesloten, als het embryo nog slechts 5—10 paar oerwervels vertoont. terwijl de voorlarven later 58 tot 75 abdominaalsegmenten bezitten. Bij salmoniden, die later 57 tot 60 oerwervels vertoonen, zijn op het oogenblik dat de blastoporus zich sluit, daarvan 18 tot 28 gevormd. Ook in den graad van ontwikkeling der overige organen bestaan groote verschillen. De gastrulatie gedurende dit geheele proces te laten voortduren, is m. i. onjuist. Ik kom hier later nog op terug.

Beschouwen wij nu deze processen bij de teleostei nader, dan rijst in de eerste plaats de vraag: op welk tijdstip begint de gastrulatie bij de dooierrijke meroblastische eieren?

Door Brachet [1]) is in den laatsten tijd de aandacht gevestigd op een proces, dat hij „clivage gastruléen" noemt, en dat bij de eieren van amphibien (rana fusca) bestaat in het vormen van een groeve aan den basalen rand van de segmentatieholte, rondom de dooiermassa, voordat zich aan den buitenkant van het ei een spoor van een blastoporus (Rusconische gleuf) vertoont. Brachet beschrijft dit proces in de volgende woorden [2]): „immédiatement avant que la gastrulation ne commence, la cavité de segmentation, sphérique ou à peu près, occupe l'hémisphère supérieur de l'oeuf (de Rana fusca).... Bientôt, sur tout le pourtour du plancher de la cavité de segmenta-

[1]) Archives de Biologie Tome 19 1902 en Anatom. Anzeiger. Bd. 27 1905.
[2]) Anat. Anzeiger Bd. 27, pag. 215.

tion, une fente se produit par clivage; cette fente 's enfonce entre les cellules de la zône marginale et les divise en deux couches: l'une, superficielle, prolonge directement la voûte de la cavité de segmentation, mais est formé par des cellules plus volumineuses et plus claires qu' au pôle supérieur; l'autre, profonde, fait corps avec les éléments du plancher. C'est ce clivage, que j'ai appelé „clivage gastruléen", c'est lui, qui caractérise la première phase de la gastrulation, parce qu'il amène, en dessous de l'équateur de l'oeuf, la formation d'un feuillet enveloppant et d'une masse cellulaire enveloppée, d'un ectoblaste et d'un endoblaste." En vervolgens: „lorsque ce clivage est achevé, il est clair, qu'a sa limite inférieure, l'ectoblaste et l'endoblaste se continuent l'un dans l'autre, comme le faisaient antérieurement la voûte et le plancher de la cavité de segmentation."

Deze lijn van samenhang noemt Brachet „blastopore virtuel"; spoedig wordt deze virtueele blastoporus reëel door het optreden van de gleuf, die de vorming van de oerdarmholte inleidt. Deze gleuf vormt zich door delaminatie. Tot op dit oogenblik is er nog geen spoor van invaginatie. Deze treedt eerst op in wat Brachet noemt de tweede phase van de gastrulatie, die tot de vorming van de oerdarmholte in hare geheele uitgestrektheid leidt, doch reeds in tijd samenvalt met het proces van notogenese, van de vorming van den rug van het embryo „quand les lêvres blastoporales se soulèvent, quand de virtuelles elles deviennent réelles, c'est que le blastopore va commencer à se fermer, c'est que le dos de l'embryon va commencer à se former" (loc. cit. 1902, pag. 225).

Tot zoover is Brachet juist. Ook daar, waar hij een scherp onderscheid maakt tusschen den geheel en al embryogenen blastoporus der holoblastische eieren en den in twee gedeelten, een embryogenen blastoporus en een dooierblastoporus verdeelden oermond der meroblastische dooierrijke eieren.

Waar hij dan echter ook die processen, die bij selachei en teleostei zich gedurende de omgroeiing van de groote dooiermassa en de sluiting van den dooierblastoporus afspelen, nog tot de gastrulatie rekent, de geheele dooieromgroeiing „clivage gastruléen" noemt, en den omgroeiingsrand in zijn geheel „blastopore virtuel" noemt, gaat hij, naar het mij toeschijnt, te ver, en verliest de beteekenis van de processen, die zich bij het einde der klieving en de vorming van den periblast als zoodanig afspelen, uit het oog.

Voor de beantwoording der vraag, wanneer begint de gastrulatie bij de teleostei, is echter zijne analyse van dit proces bij de anuren van groot belang.

De klieving van het beenvischei verloopt niet geheel regelmatig. Combineeren wij de uiterst nauwkeurige waarnemingen van KOPSCH hierover met elkaar, dan zien wij, dat in de zich klievende kiemschijf op een zeer bepaald oogenblik, ongeveer dat der tiende deeling van de embryonaalcellen, een groote verandering optreedt.

Tot aan het einde van deze deeling (bij Belone) verloopen de deelingen van de verschillende klievingscellen volkomen synchroon; bij Torpedo vond RÜCKERT synchronie tot de 9de deeling. Door de tiende deeling wordt verder (bij Gobius, Crenilabrus, Belone) de dooierzakentoblast gevormd, doordat de beide kernen van de randsegmenten, door deze deeling gevormd, in het ongedeelde protoplasma blijven liggen; waar deze vorming niet bij de tiende deeling begint, is de afwijking toch slechts gering (bij Cristiceps argentatus voor een klein gedeelte reeds gedurende de 9de deeling, bij Trutta fario eerst gedurende de 11de deeling). Tegelijkertijd met de dooierzakentoblast differentieert zich bij de 10de deeling de deklaag. Na de 10de deeling verandert de kiemschijf plotseling van vorm; zij wordt meer heuvelachtig, hooger en geringer van omvang; de celmassa concentreert zich, de deklaag wordt nog scherper als omhulling van de overige kiemcellen zichtbaar. Juist deze gelijktijdige differentiatie van de deklaag, de laag, die de kiemschijf naar buiten afsluit en de eenige weg is, waarlangs de zich ontwikkelende cellen de zuurstof uit de perivitelline vloeistof kunnen opnemen, en den dooierzakentoblast, die de middellaar is tusschen de voedende dooiermassa en den zich ontwikkelenden kiem, schijnt mij van groote beteekenis te zijn, en terecht wordt zij dan ook door KOPSCH met nadruk vermeld. Hierdoor wordt een nieuwe phase in het ontwikkelingsproces ingeleid, en is de overgang begonnen, die de gastrulatie inleidt.

Al spoedig wordt de kiemschijf platter, in 't eerst omdat de deklaag als het ware zich iets samentrekt en de kiemschijf meer in den dooier wegzinkt (fig. 8), doch daarna omdat de celmassa, platter wordend, zich uitbreidt (fig. 9). De cellen leggen zich vaster tegen elkaar aan, en al spoedig wordt de eenzijdige verdikking aan de kiemschijf zichtbaar, die het uiterlijk waarneembare begin der embryovorming is.

Het is hierbij hetzelfde, of eene blastula-holte wordt gevormd, of niet. Zooals ik vroeger beschreef, wordt bij verschillende muraenoiden op dit stadium een duidelijke blastulaholte gevormd, reeds aan het levende ei zichtbaar. Daarop volgt dan de afplatting van de kiemschijf. Zooals mij nu evenwel bij het onderzoek van jonge stadien van eieren van muraena no. 7 [1]) bleek, wordt bij deze eieren geen

[1]) Men vergel. PETRUS CAMPER, Deel 2, pag. 150.

blastulaholte gevormd, en blijft hier de kiemschijf, die juist dezelfde spitse konische vorm aanneemt als bij de andere muraenoiden, uit een nagenoeg soliede massa van slechts los tegen elkaar aanliggende cellen bestaan. Het verdere verloop van de ontwikkeling, de afplatting van de kiem enz., is hetzelfde als bij de andere soorten (men vergel. fig. 1—3 op plaat 1).

Deze afplatting van de kiemschijf, volgende op het juist beschreven stadium, samengaande met de concentratie van de blastodermcellen naar de zijde waar zich later het embryo vormt, en voorafgaande aan de eigenlijke invaginatie (met gedeeltelijke delaminatie) van de kiemcellen, die tot het ontstaan van chorda en mesoderm aanleiding geeft, schijnt mij nu reeds tot de gastrulatie te moeten worden gerekend, en te moeten worden vergeleken met de „clivage gastruléen" bij de anuren.

Onmiddellijk hieraan sluit zich de vorming van de prostomaalverdikking, daar waar de deklaag aan den periblast stoot, uit de oppervlakkige cellen van den periblast [1]) (fig. 4, 5 en 6 op plaat 1) terwijl vermoedelijk ook nog iets meer naar binnen entodermcellen in aansluiting hieraan door delaminatie zich uit den periblast afzonderen (fig. 5 *e*). Men vindt hier derhalve, zooals bij vele vertebraten, entodermvorming door delaminatie. Op het oogenblik, dat de prostomaalverdikking zich differentieert (fig. 2, 4) vindt men nog geen mesoderminvaginatie, slechts eene verdikking van de celmassa vóór de met de deklaag samenhangende cellen der prostomaalverdikking. Direct na dit stadium vindt men evenwel een duidelijke differentiatie van het mesoderm. Dan is evenwel de notogenese reeds begonnen, en is de gastrulatie afgeloopen. Voor het verdere verloop van de ontwikkeling kan ik volstaan met naar mijne vroegere beschrijving te verwijzen. Dat zich hierbij slechts een weinig promineerende „staartknop" vormt en geen ver naar achteren over de gastraalholte uitstekende „staartlappen" worden gevormd zooals bij de selachei, vindt zijne oorzaak in de eigenaardige verhoudingen van de deklaag, die op de geheele ontwikkeling haren stempel drukken („développement massif" van Henneguy).

2. Om de richting, waarin de dooiermassa door den blastodermring wordt omgroeid, vast te stellen, ging ik bij het onderzoek der

---

[1]) Sumner (l.c. pag. 145) zag bij Salvelinus beelden, die hem op denzelfden oorsprong van de cellen der prostomaalverdikking schenen te wijzen, doch niet bij Noturus en Schilbeodes. Over de toestanden bij de laatste twee vormen kan ik niet oordeelen, doch ik wil er alleen op wijzen, dat de figuren, door den schrijver gegeven, van veel te late ontwikkelingsstadiën zijn genomen, om bewijzend te kunnen zijn.

muraenoiden-eieren in mijn vorig opstel uit van de stelling, dat aan de zich in de dooiermassa bevindende oliedruppels een vaste plaats kan worden toegekend en ontwierp op grond hiervan een schema van de dooieromgroeiing bij deze eieren [1]). Door SUMNER en KOPSCH werd de juistheid dezer onderstelling en dientengevolge van het schema betwijfeld, door SUMNER op grond van het feit, dat men bij Fundulus heteroclitus de oliedruppels, bij omkeering van het ei in een compressorium, van plaats kan doen veranderen. SUMNER heeft hierin volkomen gelijk. Ook bij verschillende marine pelagische eieren kan men, niet alleen in het ei, maar ook nog in de vrij zwemmende larve de oliedruppels, door ei of larve in een abnormalen stand te brengen, zich door de vloeibare dooiermassa naar een andere plaats zien bewegen. Bij de eieren der Muraenoiden is dit echter geenszins het geval. De reeds vroeger door mij uitvoerig beschreven structuur van den periblast en den dooier verhindert het verplaatsen van de oliedruppels volkomen. Zoo liggen bijv. bij de eieren van Muraena No. 4 een groot aantal vrij groote oliedruppels op vrij regelmatige afstanden van elkaar aan de oppervlakte van den dooier verspreid. Gedurende de geheele omgroeiing van den dooier blijft nu de onderlinge afstand van deze oliedruppels geheel dezelfde en ondergaat alleen tengevolge van de vormverandering van den dooier tengevolge van de insnoering door den blastodermring bij de omgroeiing (fig. 4 plaat 2) een kleine verandering, die echter zoodra de insnoering voorbij is, weer voor den vroegeren toestand plaats maakt. Lagen deze oliedruppels los in den dooier, dan zouden zij zich alle aan de bovenzijde van het ei verzamelen, of zou in elk geval hun onderlinge afstand gedurende het aangroeiingsproces moeten veranderen. Eerst als later de dooiermassa in het zich ontwikkelende embryo sterk van vorm verandert en peervormig wordt, veranderen de oliedruppels natuurlijk hunne onderlinge ligging. Ook dan blijven zij echter nog over de oppervlakte van den dooier verspreid.

Ook experimenteel kan men de constante vaste ligging der oliedruppels in de dooierspheer aantoonen. Als men door voorzichtig met een fijne naald door de eikapsel te prikken, een of meer dezer oliedruppels of kleine stukjes van den dooier uit het ei licht, blijven de overige oliedruppels volkomen op dezelfde plaats liggen. Zulke eieren ontwikkelen zich doorgaans volkomen normaal en worden tot normaal gebouwde larven. Voert men de operatie voorzichtig uit, zoodat het losgemaakte stukje nog door een dun draadje met den periblast in verbinding blijft, dan kan men zien, hoe ook dit stukje, dat dan toch wel zeer zeker als een vast punt

[1]) l. c. pag. 142.

van de ei-oppervlakte kan worden beschouwd, zijn plaats ten opzichte van de overige oliedruppels gedurende de dooieromgroeiing behoudt, totdat het door den er langs groeienden blastodermring van het ei-oppervlak afgesnoerd wordt. Gedurende den zomer van 1906 heb ik dergelijke waarnemingen bij verschillende eieren kunnen doen, en daar zij alle tot dezelfde uitkomst leidden, meen ik het door mij voor de muraenoiden-eieren opgestelde schema nog voor juist en de feiten nauwkeurig weergevend te moeten houden. Het blijft echter een schema, en er komen vrij groote individueele variaties voor. Trouwens, vergelijkt men dit schema met dat van KOPSCH voor het forellen-ei, dan blijkt de afwijking niet groot te zijn en de verplaatsing van het staarteinde bij beide schemata ongeveer dezelfde te zijn [1]). Wel wijk ik daarin van genoemden onderzoeker af, dat ik het vooreinde van den kop niet als een vast punt beschouw. Daarin bevind ik mij evenwel in volkomen overeenstemming met SUMNER, die uit zijne uiterst nauwkeurige en talrijke experimenten de conclusie trekt, dat „the head end also grows, or at least moves, forward, though to a much smaller extent" [2]).

Uit verschillende experimenten van dezen auteur blijkt bovendien (operatie Nos. 6, 10, 18 (ten deele), 26 en 35) dat een vrij sterk naar voren uitgroeien van het kopgedeelte van het embryo kan optreden, en uit operatie No. 6 (tafel VIII) bijvoorbeeld blijkt, dat onder bepaalde verhoudingen de richting van den groei geheel en al kan omkeeren, en het staarteinde van het embryo op dezelfde plaats blijft, terwijl het kopgedeelte over het dooieroppervlak wordt voortgeschoven [3]).

Dat dus bij de kogelronde eieren der muraenoiden bij de dooieromgroeiing het kopgedeelte van het embryo naar voren wordt voortgeschoven en, al is het ook slechts tot op zekere hoogte, den ventralen rand van den blastodermring volgt, wat vooral in de latere perioden van de dooieromgroeiing geschiedt, behoeft ons volstrekt niet te bevreemden. Gedurende de eerste stadien is het vooral het achtereinde van het embryonaallichaam, dat van plaats verandert (men vergelijke fig. 1—3 op plaat 2). KOPSCH heeft m. i. volkomen terecht daar ter plaatse den sterksten groei van het embryo in de lengte gelocaliseerd. Ook al wordt hierbij het kopgedeelte naar voren verplaatst, de zich in het embryo afspelende processen blijven volkomen dezelfde.

---

[1]) In den tekst heb ik mij evenwel onduidelijk uitgedrukt en mij te veel aan OELLACHER aangesloten. Uit het schema blijkt evenwel, dat mijne opvatting van die van OELLACHER vrij sterk afwijkt.

[2]) l. c pag. 115.

[3]) Ook het door KOPSCH op bl. 95 van zijn in 1904 verschenen onderzoek „Ueber die morphologische Bedeutung des Keimhautrandes und die Embryobildung bei der Forelle" beschreven experiment toont aan, dat een dergelijke omkeer van de groeirichting bij de forel mogelijk is.

PLAAT 2.

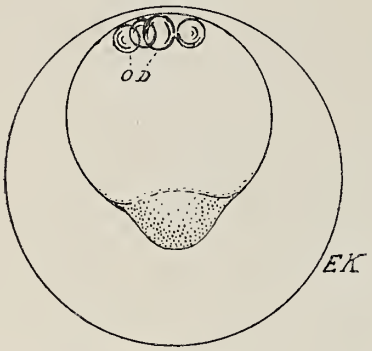


Fig. 1*a*.

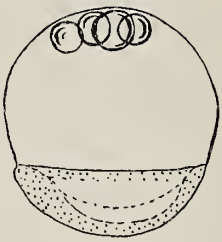


Fig. 1*b*.

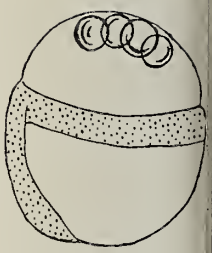


Fig. 1*c*.

Fig. 1*d*.

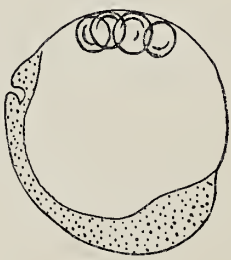


Fig. 1*e*.

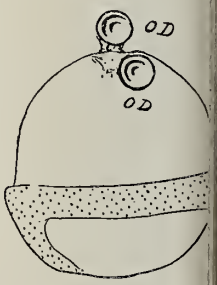


Fig. 2*a*.

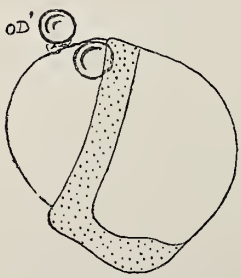


Fig. 2*b*.

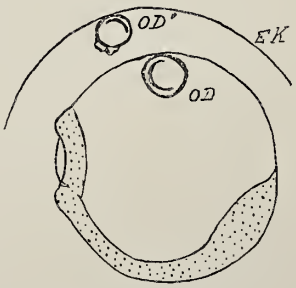


Fig. 2*c*.

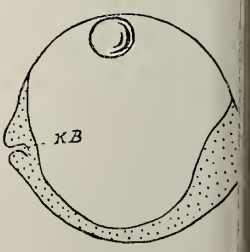


Fig. 2*d*.

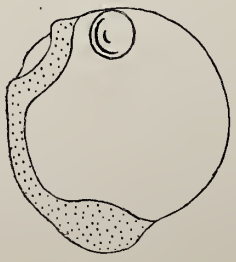


Fig. 3.

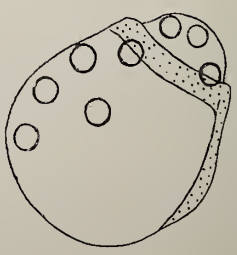


Fig. 4.

J. Boeke del.

3. Aan het einde van de dooieromgroeiing, op het oogenblik, dat de dooierblastoporus zich sluit, vormt zich de KUPFFER'sche blaas op de vroeger door mij uitvoerig beschreven wijze. Zij mondt dan tijdelijk door een nauwe gang in de perivitelline ruimte uit. Door SWAEN en BRACHET [1]) wordt deze gang met het canalis neurentericus gehomologiseerd, m. i. ten onrechte. De KUPFFER'sche blaas is een ventrale vorming. Dorsaal wordt zij begrensd door de cellen der prostomaalverdikking, een open canalis neurentericus bestaat ook bij deze vormen niet. Reeds in mijn vorig opstel bracht ik op physiologische gronden haar in verband met den allantois der amnioten, en het schijnt mij een zeer gelukkige gedachte van HUBRECHT, de vergelijking van deze blaas met de allantois ook morphologisch door te voeren, en zoo de oude KUPFFER'sche benaming van dit orgaan weer in eere te herstellen.

VERKLARING DER FIGUREN OP PLAAT 1 EN 2.

Plaat 1.

Fig. 1 tot 4. Mediane doorsneden door eieren van Muraena No. 1 op verschillende stadiën van gastrulatie. In fig. 3 is de gastrulatie reeds geëindigd en de notogenese begonnen. 40-malige vergrooting. In fig. 2 is de structuur van den dooier mede aangegeven. Fig. 4*a*, 5 en 6 geven mediane doorsneden door de zich ontwikkelende prostomaalverdikking bij sterker vergrooting weer.

Fig. 7 tot 9. Afplatting van de kiem bij eieren van Muraena No. 7. vergrooting 40-maal.

Plaat 2.

Alle figuren van deze plaat zijn zoo nauwkeurig mogelijk naar het levende object geteekend.

Fig. 1*a* tot 1*e*. Omgroeiing van den dooier bij een ei van Muraena No. 1.

Fig. 2*a* tot 2*d*. Omgroeiing van den dooier bij een ei van Muraena No. 1 waarbij door middel van een fijne naald een der oliedruppels (O D[1]) voorzichtig was losgemaakt en nu, nog door een periblastdraad met het ei verbonden, naast den zich nog in den dooier bevindenden droppel bleef liggen. In fig. 2*c* is deze losgemaakte oliedruppel door den voorbijgroeienden blastodermrand van de dooieroppervlakte losgeraakt en ligt nu los tegen de eikapsel EK. In fig. 2*d* (sluiting van den blastoporus) is deze druppel niet meer in de figuur geteekend.

Fig. 3. Sterke verplaatsing van het achtereinde van het embryo gedurende de omgroeiing van den dooier, terwijl het kopeinde ongeveer op de plaats, waar vroeger het centrum van de kiemschijf zich bevond, gelegen is.

Fig. 4. Sterke vormverandering van de dooierspheer door den blastodermring bij een ei van Muraena No. 4, waarbij toch de oliedruppels hun onderlinge afstanden bijna volkomen hadden bewaard.

OD = oliedruppel.
pv = prostomaalverdikking.
per = periblast.
Bl = blastoderm.
D* = deklaag.

Leiden, 17 Januari 1907.

[1]) Archives de Biologie T. 20, 1904, pag. 601.

J. BOEKE. „Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei".

PLAAT I

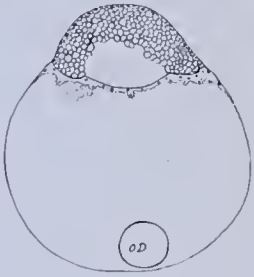


Fig. 1.

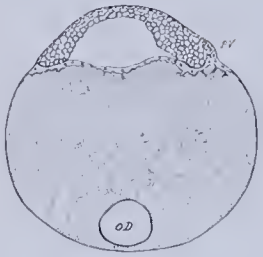


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4

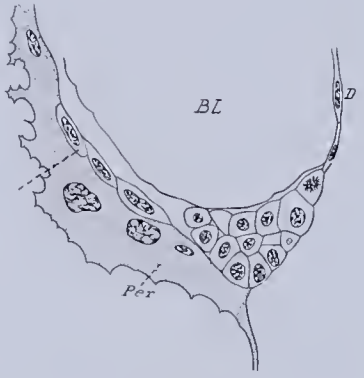


Fig. 5.

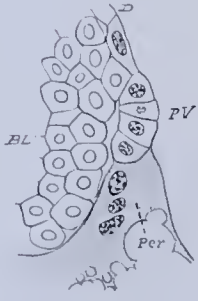


Fig. 6.

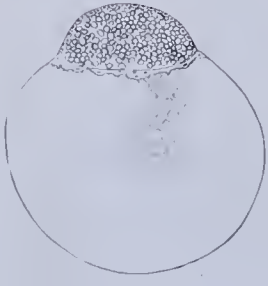


Fig. 7.

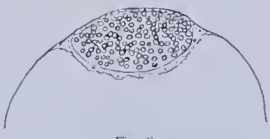


Fig. 8.

Fig. 9

J. Boeke del.

3. Aan het einde van de dooieromgroeiing, op het oogenblik, dat de dooierblastoporus zich sluit, vormt zich de KUPFFER'sche blaas op de vroeger door mij uitvoerig beschreven wijze. Zij mondt dan tijdelijk door een nauwe gang in de perivitelline ruimte uit. Door SWAEN en BRACHET [1]) wordt deze gang met het canalis neurentericus gehomologiseerd, m. i. ten onrechte. De KUPFFER'sche blaas is een ventrale vorming. Dorsaal wordt zij begrensd door de cellen der prostomaalverdikking, een open canalis neurentericus bestaat ook bij deze vormen niet. Reeds in mijn vorig opstel bracht ik op physiologische gronden haar in verband met den allantois der amnioten, en het schijnt mij een zeer gelukkige gedachte van HUBRECHT, de vergelijking van deze blaas met de allantois ook morphologisch door te voeren, en zoo de oude KUPFFER'sche benaming van dit orgaan weer in eere te herstellen.

VERKLARING DER FIGUREN OP PLAAT 1 EN 2.

Plaat 1.

Fig. 1 tot 4. Mediane doorsneden door eieren van Muraena No. 1 op verschillende stadiën van gastrulatie. In fig. 3 is de gastrulatie reeds geëindigd en de notogenese begonnen. 40-malige vergrooting. In fig. 2 is de structuur van den dooier mede aangegeven. Fig. 4*a*, 5 en 6 geven mediane doorsneden door de zich ontwikkelende prostomaalverdikking bij sterker vergrooting weer.

Fig. 7 tot 9. Afplatting van de kiem bij eieren van Muraena No. 7. vergrooting 40-maal.

Plaat 2.

Alle figuren van deze plaat zijn zoo nauwkeurig mogelijk naar het levende object geteekend.

Fig. 1*a* tot 1*e*. Omgroeiing van den dooier bij een ei van Muraena No. 1.

Fig. 2*a* tot 2*d*. Omgroeiing van den dooier bij een ei van Muraena No. 1 waarbij door middel van een fijne naald een der oliedruppels (O D[1]) voorzichtig was losgemaakt en nu, nog door een periblastdraad met het ei verbonden, naast den zich nog in den dooier bevindenden druppel bleef liggen. In fig. 2*c* is deze losgemaakte oliedruppel door den voorbijgroeienden blastodermrand van de dooieroppervlakte losgeraakt en ligt nu los tegen de eikapsel EK. In fig. 2*d* (sluiting van den blastoporus) is deze druppel niet meer in de figuur geteekend.

Fig. 3. Sterke verplaatsing van het achtereinde van het embryo gedurende de omgroeiing van den dooier, terwijl het kopeinde ongeveer op de plaats, waar vroeger het centrum van de kiemschijf zich bevond, gelegen is.

Fig. 4. Sterke vormverandering van de dooierspheer door den blastodermring bij een ei van Muraena No. 4, waarbij toch de oliedruppels hun onderlinge afstanden bijna volkomen hadden bewaard.

OD = oliedruppel.
pv = prostomaalverdikking.
per = periblast.
Bl = blastoderm.
D* = deklaag.

Leiden, 17 Januari 1907.

[1]) Archives de Biologie T. 20, 1904, pag. 601.

Geophysica. — De Heer WIND biedt eene mededeeling aan, ook namens de Heeren A. F. H. DALHUISEN en W. E. RINGER: *„Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee. (Eerste Mededeeling).”*

In 1904 is door den destijds bij het Rijksinstituut voor Onderzoek der Zee gedetacheerden luitenant ter zee A. M. VAN ROOSENDAAL, op voorstel en onder leiding van de Nederlandsche gedelegeerden bij den Permanenten Internationalen Raad voor het Onderzoek der Zee, een begin gemaakt met nauwkeurige stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee [1]).

Door hem werden een viertal apparaten beproefd, nl. twee exemplaren van den stroommeter van PETTERSSON [2]), verder een van NANSEN [3]) en een van EKMAN [4]), alle bestemd tot het bepalen van richting en sterkte van den stroom op willekeurige diepten.

De onderzoekingen werden gedeeltelijk op het lichtschip „Haaks” uitgevoerd, waar daaraan ook werd deelgenomen door Dr. J. P. VAN DER STOK, die als directeur van de afdeeling „Waarnemingen ter Zee” van het Kon. Nederl. Meteorologisch Instituut aan boord vertoefde. Andere waarnemingen werden in de haven van Nieuwediep gedaan en verder in de open Noordzee op een station (H_2) der Nederlandsche termijnvaarten [5]), gelegen op 53°44′ N.B. en 4°28′ O.L., van boord van den „Wodan”, het onderzoekingsvaartuig van bovenvermeld Rijksinstituut.

Het ter beschikking staande apparaat naar NANSEN bleek voor de metingen op de Noordzee niet geschikt; het was niet berekend op de daar voorkomende sterke getijstroomingen (b.v. 60—100 cm/sec.), en ook het uitbrengen van het apparaat was bij ongunstig weer niet doenlijk zonder gevaar voor het instrument. In rustiger water schijnt het overigens een zeer bruikbaar toestel te zijn.

De apparaten van PETTERSSON en EKMAN bleken wel geschikt voor de waarnemingen ook in de open Noordzee. Door VAN ROOSENDAAL en WIND werden eenige verbeteringen aangebracht of voorgesteld, waar-

---

[1]) Cons. Perm. Intern. p. l'expl. de la mer, Publications de circonstance No. 26: A. M. VAN ROOSENDAAL und C. H. WIND, Prüfung von Strommessern und Strommessungsversuche in der Nordsee. Copenhague, 1905.

[2]) Publ. de circ. No. 25.

[3]) „ „ „ No. 34.

[4]) „ „ „ No. 24.

[5]) Driemaandelijksche zeetochten der aan het internationale zeeonderzoek deelnemende landen, langs vastgestelde routen, waarop steeds op bepaalde plaatsen of „stations” waarnemingen worden gedaan.

door ze nog aan bruikbaarheid wonnen. Voor eene beschrijving van de inrichting der bedoelde stroommeters en de daarmee opgedane ervaringen kan naar de opgegeven literatuur worden verwezen. Hier zij daaromtrent nog het volgende medegedeeld.

Het bleek, dat tamelijke slingeringen, b.v. 15° naar beide zijden om de langsscheepsche as, de metingen nog niet onmogelijk maakten. Bij 32 van de bijna 200 waarnemingen van VAN ROOSENDAAL moest voor zeegang het cijfer 4 worden opgeteekend, in 40 tot 50 gevallen bedroegen de slingeringen tot 10 à 20° naar beide zijden, en toch waren slechts bij uitzondering de nauwkeurigheid en zekerheid dezer metingen onvoldoende.

Bij parallelwaarnemingen met de toestellen van PETTERSSON en EKMAN bleek de overeenstemming in aanwijzing der stroomsnelheden in 't algemeen bevredigend. Zoo bedroegen b.v. bij een reeks van 23 metingen de verschillen gemiddeld 4.8 cM./sec., terwijl het geringste verschil 3.1, het grootste 6.3 was.

Ook de aanwijzing van stroomrichting was bij beide instrumenten niet zeer verschillend. Bij het apparaat van EKMAN heeft men reeds eene contrôle, doordat, dank zij de eigenaardige inrichting van het instrument, elke waarneming een reeks van met kleine tusschenpoozen gedane richtingsbepalingen omvat. Bij verreweg de meeste der verrichte waarnemingen liepen deze afzonderlijke bepalingen niet ver uiteen. Van 128 gevallen kon de stroomrichting uit deze afgeleid worden op

minder dan 10°	nauwkeurig in	105 gevallen,
10—20		15
20—30		2
30—40		0
40—50		2
meer dan 50°		4.

Vergeleken bij de waarschijnlijkste richting volgens het instrument van EKMAN, week die, welke met het instrument van PETTERSON was bepaald,

in 65 gevallen	minder dan 10° af,
37	10—20
15	20—30
5	30—40
1	40—50
8	meer dan 50.

VAN ROOSENDAAL en WIND leidden uit de verrichte bepalingen de waarschijnlijkste waarden voor stroomrichting en -snelheid op verschillende diepten af voor het station H_2 en stelden de uitkomsten

grafisch voor. Zij construeerden voor de verschillende waarnemingsreeksen, die elk ½ à 1 etmaal omvatten, in de eerste plaats, door van een vast punt de achtereenvolgens bepaalde stroomingen als vectoren uit te zetten en de uiteinden daarvan te verbinden, *centrale vectordiagrammen* en in de tweede plaats, door de voor de achtereenvolgende volle uren geïnterpoleerde stroomvectoren achter elkaar uit te zetten, *progressieve vectordiagrammen*. In de eerste treden de periodieke stroomingen, in de tweede de resulteerende stroomen het duidelijkst aan den dag.

De metingen werden later door VAN ROOSENDAAL en verder door DALHUISEN, die hem in zijne detacheering opvolgde, op het station H_2 tijdens de gewone termijnvaarten van het Rijksinstituut voortgezet. Als apparaat werd bij de latere metingen steeds gebruikt de stroommeter van EKMAN.

De volgende tabel geeft de data der waarnemingsreeksen en het aantal der verrichte metingen [1]).

No.	Tijd.	Aantal metingen	Diepte (M.)	Apparaat.	Waarnemer.
1.	van 16 Aug. '05 4.12 p.m. tot 17 „ „ 4.61 »	56	5,20,35	EKMAN.	VAN ROOSENDAAL.
2.	van 7 Nov. '05 7.48 a.m. tot 8 „ „ 12.34 p.m.	53	» » »	»	VAN ROOSENDAAL en DALHUISEN.
3.	van 7 Febr. '06 7.20 p.m. tot 8 „ „ 5.53 a.m.	18	» » »	»	DALHUISEN.
4.	van 2 Mei '06 6.35 a.m. tot 3 „ „ 6.41 »	54	» » »	»	»

Bij deze waarnemingen waren wind en zee over 't algemeen gunstig; voor den wind werd in een paar gevallen hoogstens 7 genoteerd; bij deze windkracht moesten echter in Februari de waarnemingen worden gestaakt [2]).

[1]) Eene meer uitvoerige beschrijving dezer waarnemingen zal den inhoud vormen van een volgend nummer der „Publications de circonstance" (No. 36).

[2]) De betrouwbaarheid der nieuwe waarnemingen is ongetwijfeld grooter dan die der vroegere, aangezien in Augustus en November 1905 en in Februari en Mei 1906 de „Wodan" vertuid lag, waardoor zijne beweging aanmerkelijk geringer was dan bij de vroegere proefnemingen, toen hij slechts voor één anker lag.

Vermeld moge nog worden, dat werd begonnen aan een onderzoek, experimenteel en theoretisch, van den invloed van de bewegingen van het schip op de aanwijzingen der stroommeters, hetwelk echter nog niet tot een bevredigend einde kon worden gebracht.

Op de bijgevoegde plaat zijn in centrale en progressieve vectordiagrammen de nieuwe metingen grafisch voorgesteld; ook de centrale diagrammen zijn ditmaal met behulp van voor de volle uren geïnterpoleerde waarden geconstrueerd; door stippen zijn daarin echter tevens de direct gemeten stroomwaarden aangegeven.

Het is voornamelijk om een duidelijken indruk te geven van de variabiliteit in richting en grootte der stroomen, dat de diagrammen dezer nieuwe waarnemingsreeksen hier volledig zijn weergegeven.

Vergelijken wij de aan de oppervlakte en in de diepte gevonden bedragen der stroomsterkte, dan zien wij, dat deze in drie van de vier gevallen vrij duidelijk afnemen bij toenemende diepte. Ook bij de vroegere waarnemingsreeksen op H_2 (3—4 Aug., 8—9 Aug. en 2—3 Nov. 1905 [1]), alsmede 8—9 Febr. 1905 [2])) was hetzelfde gevonden.

Ook verschillen in phase worden er in de meeste gevallen bij de periodieke stroomen opgemerkt tusschen de oppervlakte en de diepte, doch een duidelijke regelmaat valt daarin niet onmiddellijk te onderkennen.

Het sterk in het oog vallende verschil in amplitude van de getijstroomen bij de waarnemingen van Augustus 1905 en Februari 1906 eenerzijds en die van November 1905 en Mei 1906 anderzijds hangt samen met den ouderdom van het getij; immers het was bij de eerstgenoemde nagenoeg springtij ($15^1/_2$ en 14 dagen na N. M.), bij de laatstgenoemde dichter bij doodtij (10 en 0).

Het geringe aantal beschikbare waarnemingsreeksen veroorlooft natuurlijk geenszins, reeds te denken aan eene berekening der getijconstanten, noch, een goed beeld te ontwerpen van het gemiddelde verloop der stroomingen. De niet te miskennen overeenstemming tusschen de verschillende stroomdiagrammen wettigt echter voldoende het beproeven van eene samenvatting van deze. Daar ongetwijfeld het maan-getij de voornaamste rol zal hebben gespeeld, hebben wij gemeend het best te doen door voor de achtereenvolgende volle maan-uren bij de verschillende waarnemingsreeksen stroomwaarden met behulp van de diagrammen te interpoleeren en deze waarden voor elk uur samen te stellen. De aldus verkregen gemiddelden werden in nieuwe diagrammen vereenigd, die men op de plaat in de laatste kolom van figuren ziet weergegeven, en wel door de *getrokken* kromme lijnen.

---

[1]) Publ. de Circ. N°. 26.

[2]) „ „ „ N°. 36.

Ter aanvulling en vergelijking werden uit de ten vorige jare verrichte waarnemingen op H_2 (zie boven) op dezelfde wijze gemiddelde diagrammen afgeleid en werden deze in dezelfde figuren door *gestippelde* krommen weergegeven.

De in deze figuren getrokken pijlen wijzen aan: in de centrale diagrammen de richting van den stroom bij maansdoorgang, in de progressieve diagrammen den totalen reststroom gedurende een halven maan-dag.

Eene vergelijking van de gemiddelde stroomdiagrammen voor verschillende diepten of ook van de nieuwere met de oudere geeft aanleiding tot velerlei opmerkingen. Het ware echter, wegens het geringe aantal van de gegevens, waarop de diagrammen berusten, voorbarig die alle hier te vermelden. Wij bepalen ons derhalve tot de volgende.

De getijkromme vertoont niet alleen in verschillende diepten, doch ook bij de oudere en nieuwere waarnemingen, vrijwel steeds eenzelfden *vorm*. Hare *grootte* daarentegen blijkt, zoowel bij de oudere als bij de nieuwere waarnemingen, nabij den bodem geringer dan nabij de oppervlakte. Ook hare *ligging* en haar *beginpunt* (bij

Phaseverschil van het getij op verschillende diepten.

	Augustus 1905 – Mei 1906		Augustus—November 1904	
	20 M.—5 M.	35 M.—20 M.	20 M.—70 M.	30 M.—20 M.
☾ Doorgang	18°	5°	0	3°
1 uur na »	24	— 6	—13	14
2 »	23	— 3	— 8	5
3 »	20	5	— 3	6
4 »	25	— 2	5	14
5 »	26	0	18	— 5
6 »	25	8	3	22
5 » voor »	19	17	0	17
4 »	25	15	— 9	17
3 »	8	— 6	— 3	25
2 »	4	10	— 6	24
1 »	6	11	— 6	11
Gemiddeld	13°85′	4°30′	—1°50′	12°45′

maansdoorgang), of ook in 't algemeen de *phase* van den getijstroom, schijnt bij het toenemen der diepte in een bepaalden zin te veranderen. Het laatste zij in het bijzonder toegelicht door de voorgaande tabel.

Men ziet: het getij toont zich in het algemeen in de diepte versneld, vergeleken bij de hoogere lagen; doch de tabel wijst aan, dat het verschijnsel afhankelijk moet zijn van veranderlijke invloeden, en dat het dus b.v. niet enkel door den vorm van den zeebodem, met of zonder medewerking van de aardrotatie, kan worden veroorzaakt.

De resulteerende stroom is geenszins standvastig; bij de nieuwe waarnemingen is hij veel sterker geweest dan bij de oude; hij vertoont trouwens ook bij vergelijking van de progressieve diagrammen der verschillende waarnemingsdagen aanmerkelijke fluctuatiën. Bij de nieuwe waarnemingen was deze reststroom gemiddeld sterker aan de oppervlakte dan in diepere lagen; dit moet grootendeels worden toegeschreven aan doorstaande winden, die althans bij de waarnemingen in Augustus 1905 en Mei 1906 een ook uit de afzonderlijke diagrammen zeer duidelijk blijkenden invloed hebben gehad.

Uit de nieuwe waarnemingen volgt voor den reststroom:

Diepte.	Richting.	Sterkte.
5 M.	N 3 4°	$^1/_4$ zeem. p. uur.
20	317	$^1/_8$
35	309°	$^1/_9$

uit de oude:

7[1]) M.	N 319°	$^1/_{19}$ zeem. p. uur.
20	295°	$^1/_{26}$
30	323°	$^1/_{18}$

Men vergelijke hiermee de volgende tabel van waarden, voor het jaargemiddelde van den reststroom aan den Noord-Hinder (51°35'.5 N.B., 2°37' O.L.) berekend door VAN DER STOK[2]) uit stroomschattingen, aan de oppervlakte gedurende 5 opvolgende jaren elk uur van den dag gedaan.

Hier blijkt de reststroom, die — het zij terloops opgemerkt — op deze plaats eene geheel andere richting heeft dan in H_2, ook in opvolgende jaren volstrekt niet gemiddeld eene zelfde sterkte te

[1]) Gemiddelde van diepten van op 1, 4, 5, 6, 10 M.; op 35 M. zijn door VAN ROOSENDAAL alleen in Februari 1905 metingen gedaan.

[2]) J. P. VAN DER STOK, Etudes des Phénomènes de Marée sur les côtes néerlandaises; Kon. Ned. Met. Inst. No. 90, II. p. 67, 1905.

Jaar.	Richting.	Sterkte.
1890	N 16° E	0 024 zeem. p. uur.
91	15	62
92	16	35
93	29	47
94	27	47
Gemiddeld	N 21° E	0.044 zeem. p. uur.

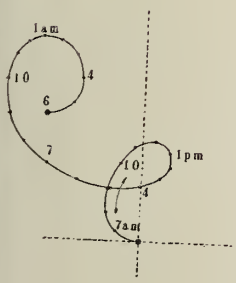
vertoonen, hetgeen waarschijnlijk wel in verband staat met verschillend sterke toevloeiing van Atlantisch water door het Kanaal.

Men kan zich de vraag stellen, of en in hoe verre de resultaten, verkregen bij de in het voorafgaande beschreven stroommetingen, afwijken van hetgeen uit de gangbare zeekaarten omtrent de stroomingen ter plaatse van het station H_2 bekend is. Onderstaande tabel veroorlooft eene vergelijking met opgaven, ontleend aan eene kaart, uitgegeven door de Engelsche Admiraliteit [1]), en doet zien, dat de afwijkingen de grenzen van nauwkeurigheid der opgaven, resp. waarnemingen, ten deele niet onbelangrijk overschrijden.

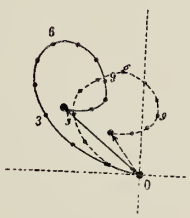
Uur.	Uit de kaarten.		Waargenomen.	
	Richting, rw.	Snelheid (zeem. p. uur)	Richting, rw.	Snelheid (zeem. p. uur)
5 voor H.W. Dover	N 90° O	0,3—0.2	N 73° O	0,4
4	110	0.5—0 3	115	0,4
3	135	0,9—0,6	147	0,4
2	160	0,6—0,4	189	0,3
1	180	0,3—0,2	227	0.4
Hoogwater Dover	—	0	266	0,5
1 na H.W. Dover	260	0.3—0,2	280	0 5
2	300	0,6—0,4	296	0,6
3	300	1,0—0,7	331	0,5
4	315	0,6—0,4	342	0,4
5	0	0,3—0,2	9	0,4
6	50	—	40	0,4

[1]) Tidal Streams North Sea

2—3 Mei 1906.



Gemiddelden
(naar maan-uren).



Jaar.	Richting.	Sterkte.
1890	N 16° E	0.024 zeem. p. uur.
91	15	62
92	16	35
93	29	47
94	27	47
Gemiddeld	N 21° E	0.044 zeem. p. uur.

vertoonen, hetgeen waarschijnlijk wel in verband staat met verschillend sterke toevloeiing van Atlantisch water door het Kanaal.

Men kan zich de vraag stellen, of en in hoe verre de resultaten, verkregen bij de in het voorafgaande beschreven stroommetingen, afwijken van hetgeen uit de gangbare zeekaarten omtrent de stroomingen ter plaatse van het station H_2 bekend is. Onderstaande tabel veroorlooft eene vergelijking met opgaven, ontleend aan eene kaart, uitgegeven door de Engelsche Admiraliteit [1]), en doet zien, dat de afwijkingen de grenzen van nauwkeurigheid der opgaven, resp. waarnemingen, ten deele niet onbelangrijk overschrijden.

Uur.	Uit de kaarten.		Waargenomen.	
	Richting, rw.	Snelheid (zeem. p. uur)	Richting, rw.	Snelheid (zeem. p. uur)
5 voor H.W. Dover	N 90° O	0,3—0.2	N 73° O	0,4
4	110	0.5—0 3	115	0,4
3	135	0,9—0,6	147	0,4
2	160	0,6—0,4	189	0,3
1	180	0,3—0,2	227	0.4
Hoogwater Dover	—	0	266	0,5
1 na H.W. Dover	260	0,3—0,2	280	0 5
2	300	0,6—0,4	296	0,6
3	300	1,0—0,7	331	0,5
4	315	0,6—0,4	342	0,4
5	0	0,3—0.2	9	0,4
6	50	—	40	0,4

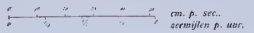
[1]) Tidal Streams North Sea

STROOMWAARNEMINGEN op H. (53°44′ N.B., 4°28′ O.L.).

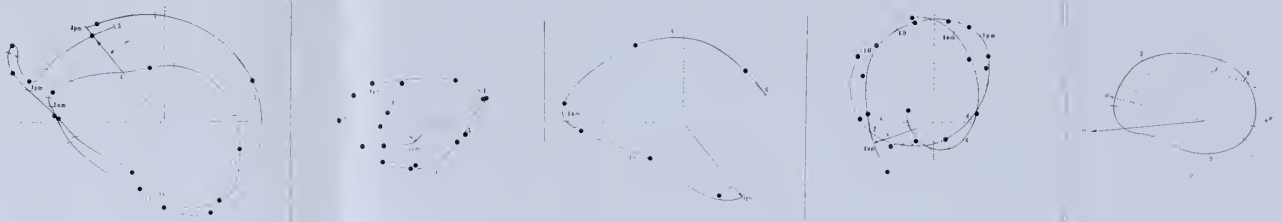
(Rechtwijzend.)

16—17 Augustus 1905.	7—8 November 1905.	7—8 Februari 1906.	2—3 Mei 1906.	Gemiddelden (naar maan-uren).

CENTRALE DIAGRAMMEN.

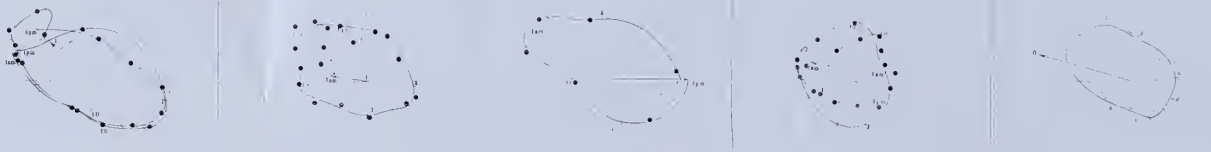


5 M.



20 M.

35 M.



PROGRESSIEVE DIAGRAMMEN.

5 M.

20 M.

35 M.

Opgemerkt moet worden, dat de zeekaarten betrekking hebben op stroomingen aan de oppervlakte, terwijl de aan onze waarnemingen ontleende waarden der tabel op eene diepte van 5 M. betrekking hebben.

Ten slotte kan worden vermeld, dat de waarnemingen op het station H_2 tot dusverre zijn voortgezet geworden, d. w. z. nog steeds om de drie maanden, telkens voorzoover mogelijk gedurende een etmaal, geschieden, doch dat buitendien, dank zij de welwillende medewerking van Z.Exc. den Minister van Marine, op het lichtschip „Noord-Hinder" een stroommeter naar PETTERSSON is geplaatst, met welken sedert November 1906 dagelijks, voorzoover de weersgesteldheid het niet verhindert, met tusschenpoozen van 3 uur metingen in verschillende diepten worden verricht door het gewone personeel van het lichtschip. De waarnemingsstaten worden opgezonden aan het Rijksinstituut voor het onderzoek der Zee en beloven een belangrijk materiaal te leveren, voornamelijk voor het onderzoek van de wijze, waarop de getij- en resulteerende stroomingen verschillen in lagen van verschillende diepte.

Physiologie. — De Heer SPRONCK biedt eene mededeeling aan van den Heer P. NIEUWENHUIJSE, cand. arts: „*Over het ontstaan van de anthracose der longen.*" (Uit het Pathologisch Instituut te Utrecht).

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Zooals bekend is, bestrijden VON BEHRING en CALMETTE de leer, volgens welke de long-tuberculose bij den mensch in verreweg de meeste gevallen door inhalatie of aspiratie van tuberkelbacillen ontstaat. Zij meenen, dat de tractus intestinalis de porte d'entrée van het virus zou zijn.

In verband met deze nieuwe hypothese hebben VANSTEENBERGHE en GRISEZ [1]) in het laatst van 1905 in het laboratorium van CALMETTE eenige proeven genomen omtrent het ontstaan der long-anthracose. Zij vermengden het voedsel van volwassen caviae met roet, Chineesche inkt of karmijn en lieten de dieren een groote quantiteit hiervan opeten. Reeds 24 uur later vonden zij in de longen zwarte resp. roode vlekken, vooral in de bovenkwabben en langs den rand van de onderkwabben.

[1]) Annales de l'Institut Pasteur, 1905, p. 787.

Uit deze bevindingen trokken VANSTEENBERGHE en GRISEZ de conclusie, dat de fijne deeltjes in den darm opgenomen, met den lymphstroom door de mesenteriale klieren heengegaan en na aldus in het bloed gekomen te zijn, door de longen vastgelegd waren.

Ook het in de lucht gesuspendeerde stof zou volgens hen niet ingeademd, maar doorgeslikt worden en langs den darm de longen bereiken.

De theorie der enterogene long-anthracose was bijna een halve eeuw geleden het eerst verkondigd door VILLARET [1]); zij had evenwel weinig opgang gemaakt en was na de zorgvuldige onderzoekingen van ARNOLD [2]) over de inhalatie van fijne deeltjes, geheel in vergetelheid geraakt.

Waar nu VANSTEENBERGHE en GRISEZ, op grond van proeven, de theorie van VILLARET weer trachtten te verdedigen, en niemand minder dan VON BEHRING twijfel had geuit omtrent de juistheid van de algemeen gehuldigde opvatting, spreekt het van zelf, dat critiek zich niet lang zou laten wachten.

Terwijl ik mij in het laboratorium van Prof. SPRONCK, wien ik hier mijn dank betuig voor zijn voortdurende belangstelling in dit onderzoek, bezig hield met een herhaling van de proeven van VANSTEENBERGHE en GRISEZ, verschenen er reeds eenige verhandelingen over dit onderwerp.

Het eerst sprak ASCHOFF [3]) de meening uit, dat er bij de proeven van VANSTEENBERGHE en GRISEZ technische fouten in het spel moesten geweest zijn en eenigen tijd later kon hij zich door eigen experimenten van de onjuistheid hunner meening overtuigen [4]).

MIRONESCO [5]) kon bij konijnen na het inbrengen van fijne deeltjes in de maag, geen afzetting hiervan in de longen aantoonen.

In Augustus 1906 werd evenwel door VANSTEENBERGHE en SONNEVILLE [6]) een nieuwe proevenreeks beschreven, die de resultaten van de proeven van VANSTEENBERGHE en GRISEZ bevestigde.

Bij deze nieuwe proeven werden fijne deeltjes, die met een sonde in den mond waren gebracht, reeds na verloop van 5 à 6 uur in de longen teruggevonden.

---

[1]) VILLARET: Cas rare d'anthracosis, Paris, 1862, ref. in Schmidt's med. Jahrb. 1862, Bd. 116.

[2]) ARNOLD: Untersuchungen ueber Staubinhalation und Staubmetastase, Leipzig, 1885

[3]) Sitzungsber. der Gesellschaft zur Bef. der Ges. Naturwissenschaft, Marburg, 13 Juni, 1906.

[4]) BRAUER's Beiträge zur Klinik der Tuberculose, 1906, Bd VI, Heft 2.

[5]) Compt. rend. de la Soc. de Biol. 1906, T. 61, N°. 27.

[6]) Presse médicale, 11 Août 1906.

Spoedig daarna werd de meening van VANSTEENBERGHE en GRISEZ weer van twee zijden bestreden. SCHULZE[1]) kwam in een voorloopige publicatie tot het resultaat, dat de long-anthracose niet kan ontstaan door opname van fijne deeltjes uit het darmkanaal, terwijl ook Prof. SPRONCK kort daarna op de 5e Internationale Tuberculose-Conferentie de resultaten mededeelde van eenige der hieronder te beschrijven proeven, welke de uitkomsten van VANSTEENBERGHE en GRISEZ niet hadden bevestigd.

In een uitvoeriger verhandeling wees SCHULZE[2]) er vervolgens op, hoe stoffen, zoowel bij het inbrengen met de maagsonde als bij gewoon opeten, lichtelijk in de longen worden geaspireerd. Bij een konijn echter, dat binnen twee maanden in toto 200 gram vermiljoen door een gastrostomie-opening in de maag had ontvangen, was in de longen geen spoor vermiljoen aan te toonen.

Ten andere schaarden zich evenwel ook enkele onderzoekers aan de zijde van VANSTEENBERGHE en GRISEZ, met name PETIT[3]), die kooldeeltjes in de maag bracht bij een zestal kinderen met vergevorderde tuberculose of athrepsie, en post mortem in 3 gevallen pigment in de longen vond, en HERMANN[4]), die op grond van proeven een enterogene long-anthracose mogelijk, maar tegenover de inhalatie-anthracose van ondergeschikte beteekenis acht.

Daarop werden de resultaten van VANSTEENBERGHE en GRISEZ evenwel van verschillende zijden met klem weersproken (COHN[5]), REMLINGER[6]), BASSET[7]), KÜSS et LOBSTEIN[8]), BEITZKE[9])).

Sommigen beschouwden de normale anthracose bij de proefdieren als een bron van vergissingen, waarmede VANSTEENBERGHE en GRISEZ inderdaad geen rekening hadden gehouden, terwijl anderen ook de aspiratie als een factor beschreven, die tot onjuiste conclusies aanleiding kan geven.

Intusschen bleven VANSTEENBERGHE en GRISEZ, gesteund door CALMETTE[10]), hunne meening handhaven. De negatieve resultaten van

---

[1]) Münchener Med. Wochenschr. 1906, N° 35.
[2]) Zeitschrift für Tuberculose, October 1906.
[3]) Presse médicale, 13 Octobre 1906.
[4]) Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique, Séance du 27 Octobre 1906.
La Semaine médicale, 1906, N° 44.
[5]) Berliner Klin. Wochenschr. 1906, N° 44 und 45.
[6]) La Semaine médicale, 1906, N° 45.
[7]) La Semaine médicale, 1906, N° 47.
[8]) Bulletin médical du 21 Novembre 1906.
La Semaine médicale, 1906, N° 48.
[9]) Virchow's Archiv, Bd. 187, Heft 1.
[10]) Compt. rend. des séances de l'Académie de Sciences, T. 143. p. 866.
Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 61, p. 548.
La Semaine médicale, 1906, N° 50.

hun tegenstanders worden door hen aldus verklaard: sommigen zouden te veel tijd hebben laten voorbijgaan tusschen het inbrengen van de kooldeeltjes in de maag en het dooden van de proefdieren, want na 48 uur zou het pigment weer bijna geheel uit de longen verdwenen zijn; anderen hadden konijnen of te jonge caviae als proefdieren gebruikt, waarbij de fijne deeltjes bijna geheel teruggehouden zouden worden in de mesenteriale klieren.

Juist met het oog op deze laatste repliek wensch ik de volgende proeven te publiceeren, omdat daarbij zoowel met den leeftijd van proefdieren als met den tijd, die verliep tusschen het inbrengen van de fijne deeltjes en het dooden van het dier, rekening is gehouden.

Ook mij bleek, dat de physiologische anthracose een factor is, waarmede rekening is te houden, want bij al mijn proefdieren, zoowel bij caviae als konijnen, bevond zich zwart pigment in de longen. Bij sommige dieren was deze spontane anthracose vrij sterk, bij andere daarentegen zeer gering. Bij mijn konijnen waren over het algemeen de longen minder gepigmenteerd dan bij de caviae.

De physiologische anthracose bemoeilijkt, zooals vanzelf spreekt, het experimenteeren met zwarte stoffen. Behalve karmijn, vermiljoen en ultramarijn, heb ik desniettemin toch ook Chineesche inkt en roet gebezigd, omdat bij microscopisch onderzoek bleek, dat de eerstgenoemde stoffen, ook nadat ik ze geruimen tijd in een mortier had gewreven, nog niet zoo fijn waren als de kooldeeltjes der laatstgenoemde.

Om de proeven van Vansteenberghe en Grisez te controleeren, werden de proefdieren reeds 5—48 uren na de toediening van de genoemde stoffen gedood.

Eenige caviae (Proef n°. 1—5) hadden brood te eten gekregen, vermengd met roet, Chineesche inkt of karmijn. Bij de sectie vertoonden de longen dezer dieren macro- en microscopisch enkel de gewone, physiologische anthracose, doch karmijn was noch in de longen, noch in de bronchiale klieren te ontdekken.

Een van deze dieren (Proef n°. 4) had blijkbaar roet geaspireerd, want in vele bronchi en correspondeerende alveolen zag men duidelijk spijspartikels en roet in groote hoeveelheid liggen.

Ook na het inbrengen van verschillende stoffen met de maagsonde bij konijnen (Proef n°. 6—10) werd éénmaal aspiratie waargenomen (Proef n°. 10), terwijl bij de overige dieren enkel de normale pigmentatie aanwezig was.

Ten einde aspiratie met zekerheid te voorkomen, werd bij een drietal konijnen tracheotomie verricht en daarna een suspensie van

karmijn met de sonde in de maag gebracht (Proef n°. 11—13); bij eenige caviae spoot ik voor dit doel de gekleurde deeltjes in het distale gedeelte van den doorgesneden oesophagus, die daarna werd afgebonden (Proef n°. 14—18). Bij de sectie was noch in de longen, noch in de bronchiale klieren eenig spoor van de gekleurde stoffen te vinden.

Bij verschillende caviae werden voorts de fijne deeltjes na laparotomie direct in den darm gebracht (Proef n°. 19—35). Ook hier was in het longweefsel en in de bronchiale klieren niets van de gekleurde stoffen te vinden, terwijl overal het beeld van de normale anthracose met wisselende intensiteit te constateeren was.

Bij enkele proeven bemerkte ik, dat gekleurde deeltjes, die direct in den darm waren gespoten, later ook te vinden waren in de maag, in den oesophagus en in den pharynx, soms in vrij groote hoeveelheden (Proef n°. 21, 22, 29 en 30). In het slijm uit de trachea kon men soms bij microscopisch onderzoek duidelijk de gekleurde deeltjes waarnemen (Proef n°. 21 en 29), terwijl éénmaal (Proef n° 29) de gemakkelijk te herkennen ultramarijnkorrels zelfs in het slijm van de hoofdbronchi te zien waren. Het is wel waarschijnlijk, dat de dieren in agone deze stoffen uit den pharynx geaspireerd hadden; immers volgens NENNIGER[1]) e. a. worden ook vaak bacteriën in agone uit den pharynx geaspireerd.

Het was nu echter de vraag, hoe de stoffen uit den darm in den pharynx waren gekomen. Was dit door een beweging van de fijne deeltjes in proximale richting, zooals o. a. GRÜTZNER[2]) dit voor deeltjes in den darm beschrijft en KAST[3]) ook voor den oesophagus heeft aangetoond, óf hadden de dieren de eigen faeces opgegeten?[4])

Ten einde deze vraag te beantwoorden, werden vier caviae, nadat ultramarijn na laparotomie in den darm was gebracht, zorgvuldig in een verband gewikkeld, zoodat opeten van faeces niet mogelijk was (Proef n°. 32—35). Het bleek nu, dat het ultramarijn wel een eindweegs proximaal van de plaats van inspuiting opgestegen was, maar in den oesophagus, in den pharynx en in de groote luchtwegen was geen ultramarijn te vinden.

Hieruit schijnt dus te volgen, dat het ultramarijn eenvoudig door

---

[1]) Zeitschr. f. Hygiene u. Infectionskrankheiten, Bd. 38.

[2]) Archiv. f. d. Ges. Physiol. (Pflüger). Bd. 71.

[3]) Berliner Klin. Wochenschr. 1906, N° 28.

[4]) Bij hongeren eten caviae en konijnen geregeld hun eigen faeces op; zij doen dit ook vaak als ze voldoende voedsel hebben.

SWIRSKI: Archiv f. exper. Path. und Pharm. 1902, Bd. 48.

het opeten van faeces in den pharynx was gekomen en niet door een proximaalwaarts gerichte beweging van de fijne deeltjes. [5])

Op grond van mijn proeven meen ik derhalve te mogen besluiten, dat de anthracose van de longen niet ontstaat door opname van fijne deeltjes uit het darmkanaal. Het moge à priori aannemelijk zijn, dat fijne deeltjes in het darmslijmvlies opgenomen *kunnen* worden en na passage van de mesenteriale lymphklieren langs ductus thoracicus en rechter hart in de longen *kunnen* geraken, zoo is daaraan voor het ontstaan der long-anthracose toch geenszins zulk een beteekenis toe te kennen als VANSTEENBERGHE en GRISEZ hebben gedaan. Blijkbaar hebben deze onderzoekers, niet of niet in voldoende mate gelet op de physiologische anthracose der proefdieren, alsmede op de aspiratie der gekleurde deeltjes, die, zooals boven vermeld, zelfs door directe inspuiting in den darm niet geheel is uit te sluiten.

Indien de physiologische anthracose door opname van kooldeeltjes in den darm ontstond, zouden bij dieren en menschen niet alleen de mesenteriale klieren, maar ook het beendermerg en de milt veel koolpigment moeten bevatten. Ten eerste toch is niet in te zien, hoe kooldeeltjes de talrijke mesenteriale klieren zouden passeeren zonder er duidelijke sporen van hun doortocht in achter te laten en ten andere is er geen reden aan te wijzen, waarom niet de kooldeeltjes voor een groot deel door de capillairen der longen zouden heengaan en zich in beendermerg en milt afzetten.

Beschrijving van de proeven.

1. Cavia 650 gram.

Eerst 24 uur zonder voedsel, daarna 24 uur lang uitsluitend brooddeeg met roet, daarna gedood.

Resultaat: Macroscop. darmkanaal veel roet, longen grijs met zwarte vlekjes vooral in de bovenkwabben, bronchiale klieren sterk gepigmenteerd.

Microscop. In de interstitiën van het longweefsel zijn vele stofcellen, vooral onder de pleura. Zeer enkele stofcellen bevinden zich ook in de alveolen en in de bronchi. De bronchiale klieren bevatten zeer vele cellen met zwart pigment.

---

[5]) Een sterke proximaalwaarts gerichte beweging nam UFFENHEIMER waar als hij een suspensie van bacillus prodigiosus bij konijnen in het rectum bracht; de bacillen stegen omhoog tot in den pharynx, van waar uit ze geaspireerd werden. Deutsche Med. Wochenschr. 1906, N°. 46.

2. Cavia 200 gram.

Gedurende 48 uur uitsluitend brooddeeg met roet, daarna gedood.

Resultaat: Macroscop. darm veel roet, longen en bronchiale klieren bleek; microscop. longen en bronchiale klieren weinig stofcellen.

3. Cavia 760 gram.

Eerst 24 uur zonder voedsel, daarna 5 ccm. Chineesche inkt in brooddeeg, daarna gedood.

Resultaat: als bij proef 1.

4. Cavia 350 gram.

Eerst 24 uur zonder voedsel, daarna gedurende 48 uur uitsluitend brooddeeg met roet, daarna gedood.

Resultaat: Macroscop. darmkanaal veel roet, longen vele zwarte vlekken en puntjes op doorsnede, bronchiale klieren bleek; microscop. in vele bronchi en alveolen bevinden zich spijspartikeltjes, met roet vermengd. Voor een deel is het roet reeds in cellen ingesloten, terwijl vele cellen reeds in de wanden van de alveolen zijn binnengedrongen. In de bronchiale klieren zijn geen stofcellen te zien.

(Bij deze proef is de aspiratie dus tijdens het leven tot stand gekomen; niet in agone.)

5. Cavia 400 gram.

Eerst 24 uur zonder voedsel, daarna 0,5 gram karmijn in brooddeeg; 48 uur later gedood.

Resultaat: Buiten het darmkanaal is in het lichaam geen karmijn te vinden.

6. Konijn 1.75 K.G.

Gedurende 3 dagen wordt totaal 100 mgr. roet door middel van een sonde in de maag gebracht; 24 uur daarna gedood.

Resultaat: Macroscop. longen en bronchiale klieren bleek; microscop. weinig stofcellen te zien in de interstitiën van het longweefsel.

7. Konijn 2 K.G.

Gedurende 3 dagen wordt totaal 2.9 gram roet met de sonde in de maag gebracht; 24 uur later gedood.

Resultaat: als bij proef 6.

8. Konijn 2 K.G.

Een suspensie van 2 gram karmijn in water wordt met de sonde in de maag gebracht; 48 uur daarna gedood.

Resultaat: Buiten het darmkanaal is nergens in het lichaam karmijn te vinden.

9. Konijn 2.75 K.G.

50 gram houtskoolpoeder, in water gesuspendeerd, worden met de sonde in de maag gebracht; 24 uur later gedood.

Resultaat: als bij proef 6.

10. Konijn 3 K.G.

Een suspensie van 40 gram houtskoolpoeder in water wordt met de sonde in de maag gebracht; 24 uur daarna gedood.

Resultaat: Macroscop. longen vertoonen zwarte vlekken vooral op doorsnede, de bronchiale klieren zijn zwak gepigmenteerd; microscop. zijn in vele alveolen fijne kooldeeltjes te zien en daarnaast grovere koolstukjes. In de grootere bronchi is geen kool aan te toonen, evenmin in de trachea; de bronchiale klieren vertoonen eenige stofcellen.

De aanwezigheid van de grovere kooldeeltjes in de alveolen maakte het stellen van de diagnose „aspiratie" al zeer gemakkelijk; macroscop. was dit reeds waarschijnlijk door het vleksgewijze voorkomen van de kool.

11. Konijn 5 K.G.

Na tracheotomie wordt 9 gram karmijn met de sonde in de maag gebracht. Ongeveer 18 uur later stikt het dier, doordat zich slijm in de canule heeft opgehoopt.

12. Konijn 4.25 K.G.

Na tracheotomie wordt 8 gram karmijn met de sonde in de maag gebracht; na 24 uur wordt het dier gedood.

13. Konijn 3.5 K.G.

Na tracheotomie wordt 8 gram karmijn met de sonde in de maag gebracht.

Gedood na 48 uur.

Resultaat van de proeven 11, 12 en 13: Buiten het darmkanaal is bij microscopisch onderzoek nergens in het lichaam karmijn te vinden; wel zijn in de longen en bronchiale klieren stofcellen aanwezig met zwart pigment.

14. Cavia 400 gram.

De oesophagus werd aan den hals vrijgepraepareerd en doorgesneden. Door het onderste stuk werden 5 gram vermiljoen in de maag gebracht. Het onderste deel van den oesophagus werd daarna afgebonden, terwijl het bovenste deel met zijn opening in de huidwonde werd gehecht.

Gedood na 5 uur.

15. Cavia 720 gram.

10 gram vermiljoen als bij proef 14 ingebracht.

Gedood na 6 uur.

16. Cavia 720 gram.

7 ccm. van een suspensie van vermiljoen in arabische gom worden als bij proef 14 ingebracht.

Gedood na 5 uur.

17. Cavia 400 gram.

2 gram karmijn als bij proef 14 ingebracht.

Gedood na 5 uur.

18. Cavia 860 gram.

4 gram karmijn als bij proef 14 ingebracht.

Gedood na 6 uur.

19. Cavia 790 gram.

Na laparotomie werden ¼ gram vermiljoen (in suspensie) in een darmlis gebracht.

Gedood na 18 uur.

20. Cavia 620 gram.

6 ccm. suspensie van vermiljoen in arabische gom als bij proef 19 in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 19 uur.

21. Cavia 750 gram.

10 ccm. suspensie van vermiljoen in arabische gom als bij proef 19 in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 18 uur door chloroform.

22. Cavia 610 gram.

5 ccm. suspensie van vermiljoen in arabische gom als bij proef 19 in den dikken darm gebracht.

Gedood na 18 uur, door met één snede den kop van den romp te scheiden om agonaal braken te voorkomen.

Resultaat van de proeven 14 tot en met 22: In het longweefsel en in de bronchiale klieren was geen vermiljoen resp. karmijn te vinden.

Bij proef 21 was het vermiljoen ook aan te toonen in de maag, in den oesophagus en in den pharynx, terwijl enkele korreltjes in het slijm van de trachea gevonden werden. Bij proef 22 was in maag, oesophagus en pharynx eveneens vermiljoen te vinden, terwijl in de trachea geen vermiljoen kon worden aangetoond. (Bij proef 19 en 20 werden maag, pharynx enz. niet onderzocht).

23. Cavia 700 gram.

Na laparotomie worden 5 ccm. Chineesche inkt in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: als bij proef 1.

24. Cavia 880 gram.

Na laparotomie worden 5 ccm. Chineesche inkt in den blinden darm gebracht.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: als bij proef 1. (de pigmentatie is iets minder sterk).

25. Cavia 750 gram.

Na laparotomie wordt 5 ccm. Chineesche inkt in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: Longen en bronchiale klieren macroscop. bleek; microscop. weinig pigmentcellen.

26. Cavia 700 gram.

Na laparotomie wordt 5 ccm. Chineesche inkt in den blinden darm gebracht.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: als bij proef 1. (de pigmentatie is hier nog sterker).

27. Cavia 730 gram.

Na laparotomie wordt 5 ccm. Chineesche inkt in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: als bij proef 25; één van de mesenteriale klieren bevat kooldeeltjes, ook macroscopisch te zien.

28. Cavia 750 gram.

Na laparotomie wordt 5 ccm. Chineesche inkt in het colon gebracht op 20 cm. afstand van den anus.

Gedood na 18 uur.

Resultaat: als bij proef 1.

29. Cavia 650 gram.

Na laparotomie wordt 4 ccm. van een suspensie van ultramarijn in 0.9 % NaCl in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 18 uur door chloroform.

Resultaat. Het ultramarijn bevindt zich in den darm, in de maag, in den oesophagus en in den pharynx, terwijl enkele korreltjes kunnen worden aangetoond in het slijm van de trachea en in dat van de hoofdbronchi.

Het longweefsel en de bronchiale klieren zijn vrij van ultramarijn.

30. Cavia 850 gram.

Na laparotomie wordt 4 ccm. van een suspensie van ultramarijn in 0.9 % NaCl in den dunnen darm gebracht.

Gedood na 17 uur door chloroform.

Resultaat: als bij proef 29; in het slijm van de trachea en van de bronchi was echter geen ultramarijn te vinden.

31. Cavia 820 gram.

4 ccm. ultramarijn ingebracht als bij proef 30.

Gedood na $16^1/_2$ uur.

Resultaat: Behalve in den dikken en in den dunnen darm is nergens ultramarijn te vinden.

32. Cavia 360 gram.

½ ccm. ultramarijn in den darm gebracht als bij proef 30.

Daarna wordt het dier zorgvuldig ingewikkeld, zoodat het geen faeces in den mond kan krijgen en zich niet kan aflikken.

Na 6 uur wordt de kop door één snede van den romp gescheiden om agonaal braken te voorkomen.

Resultaat: Het ultramarijn bevindt zich in den dunnen darm en in den dikken darm, ook iets proximaal van de plaats van inspuiting. In de maag, in den oesophagus, in den pharynx en in het slijm van de groote luchtwegen is geen ultramarijn aan te toonen.

33. Cavia 750 gram.

Als bij proef 32 behandeld.

Gedood na 16 uur.

Resultaat: als bij proef 32; in de maag bevinden zich hier eenige ultramarijnkorrels.

34. Cavia 475 gram.

Als bij proef 32 behandeld.

Gedood na 12 uur.

Resultaat: als bij proef 32.

35. Cavia 540 gram.

Als bij proef 32 behandeld.

Gedood na 6 uur.

Resultaat: als bij proef 32.

Wiskunde. – De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan van Dr. F. SCHUH, getiteld: *„Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen.*

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

1. Zijn (V_i) $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een operatieruimte R^n van n afmetingen en zij r_i de graad der variëteiten V_i van den bundel (V_i). Zij verder a_i het aantal niet noodzakelijk in basisvariëteiten gelegen snijpunten der n variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots, V_{n+1}$.

Bij de beschouwing der meetkundige plaats van puntenparen P, P', waardoor een variëteit van ieder der bundels gaat, hebben we uitsluitend het oog op paren, waarvan geen der beide punten noodzakelijk op een basisvariëteit van een der bundels ligt, en noemen de zoo verkregen meetkundige plaats de *eigenlijke meetkundige plaats M.*

Den graad van M bepalen we uit hare snijpunten met een willekeurige rechte l. Daartoe nemen we op l een willekeurig punt $Q_{12\ldots n}$ aan en leggen daardoor variëteiten $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, die $a_{n+1} - 1$ buiten $Q_{12\ldots n}$ en de basisvariëteiten gelegen snijpunten hebben. Door ieder dier punten brengen we een V_{n+1} aan en krijgen zoo $a_{n+1} - 1$ variëteiten V_{n+1}, die te zamen de lijn l in $(a_{n+1} - 1)\, r_{n+1}$ punten Q_{n+1} snijden. Met $Q_{12\ldots n}$ correspondeeren dus $(a_{n+1} - 1)\, r_{n+1}$ punten Q_{n+1}.

Om omgekeerd te vinden hoeveel punten $Q_{12\ldots n}$ met Q_{n+1} correspondeeren, nemen we op l de punten $Q_{i+1}, Q_{i+2}, Q_{i+3}, \ldots, Q_{n+1}$ willekeurig aan en leggen door die punten resp. een $V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}, \ldots, V_{n+1}$. We stellen nu de vraag hoeveel punten $Q_{123\ldots i}$ op l gelegen zijn zoodanig, dat de genoemde variëteiten $V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots, V_{n+1}$ en de door $Q_{123\ldots i}$ gaande variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_i$ een buiten de basisvariëteiten gelegen gemeenschappelijk punt hebben. Voor $i < n$ is het antwoord : $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_i r_i$.

Om dit te bewijzen beginnen we met op te merken, dat de juistheid hiervan onmiddellijk duidelijk is voor $i = 1$. Nemen we nu de juistheid aan voor $i = j$, dan hebben we nog slechts aan te toonen, dat de formule ook geldt voor $i = j + 1$. Zijn gegeven de punten $Q_{j+2}, Q_{j+3}, \ldots, Q_{n+1}$. Om nu het aantal punten $Q_{123\ldots j+1}$ te bepalen nemen we op l een willekeurig punt $Q_{123\ldots j}$ aan, leggen daardoor variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_j$ en brengen door ieder der a_{j+1} buiten de basisvariëteiten gelegen snijpunten van deze $V_1, V_2, \ldots, V_j$ en de resp. door $Q_{j+2}, Q_{j+3}, \ldots, Q_{n+1}$ gaande variëteiten $V_{j+2}, V_{j+3}, \ldots, V_{n+1}$ een variëteit V_{j+1} aan; deze a_{j+1} variëteiten V_{j+1} snijden l in $a_{j+1} r_{j+1}$ punten Q_{j+1}. Met $Q_{123\ldots j}$ correspondeeren dus $a_{j+1} r_{j+1}$ punten Q_{j+1} en (volgens de onderstelling, dat de formule juist is voor $i = j$) omgekeerd met Q_{j+1} $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_j r_j$ punten $Q_{123\ldots j}$. Er zijn dus $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_j r_j + a_{j+1} r_{j+1}$ coincidenties $Q_{123\ldots j}\, Q_{j+1}$; dit zijn de bij de gegeven punten $Q_{j+2}, Q_{j+3}, \ldots, Q_{n+1}$ behoorende punten $Q_{12\ldots j\, j+1}$, waarmede de juistheid der formule voor $i = j + 1$ is aangetoond.

Bij de vraag naar het aantal met Q_{n+1} correspondeerende punten $Q_{12\ldots n}$ is $i = n$, zoodat de formule daarvoor $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n$ geeft. Dit aantal moet echter nog met r_{n+1} verminderd worden, daar ieder der snijpunten van l met de door Q_{n+1} gaande V_{n+1} een coincidentiepunt $Q_{123\ldots n-1}\, Q_n$ maar niet een der gezochte punten $Q_{12\ldots n}$ is.

Op l bestaat dus tusschen de punten $Q_{12\ldots n}$ en Q_{n+1} een $(a_{n+1} r_{n+1} - r_{n+1},\ a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n - r_{n+1})$-correspondentie. De $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_{n+1} r_{n+1} - 2 r_{n+1}$ coincidenties zijn de

snijpunten van l met de gezochte meetkundige plaats M en de snijpunten van l met de $(n-1)$-dimensionale aanrakingsvariëteit $RV_{12\ldots n}$ der bundels $(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$; met die *aanrakingsvariëteit* is bedoeld de meetkundige plaats der punten, waar de er door heen gaande variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_n$ een gemeenschappelijke raaklijn hebben, dus waar de $(n-1)$-dimensionale raakruimten dier variëteiten elkaar volgens een lijn snijden.

2. Om den graad van $RV_{12\ldots n}$ te bepalen merken we op, dat $RV_{12\ldots n}$ de meetkundige plaats is van de raakpunten der variëteiten V_n met de snijkrommen $C_{12\ldots n-1}$ der variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$. De vraag is dus teruggebracht tot die naar den graad der aanrakingsvariëteit van een stelsel van ∞^1 $(n-1)$-dimensionale variëteiten en een stelsel van ∞^{n-1} krommen. Dien graad bepalen we uit de snijpunten met een willekeurige rechte l.

In een snijpunt van l met een variëteit van het stelsel brengen we de $(n-1)$-dimensionale raakruimte R^{n-1} aan en in een snijpunt van l met een kromme van het stelsel de ∞^{n-2} raakruimten R^{n-1}. Doen we hetzelfde voor alle variëteiten en krommen der beide stelsels, dan leveren de raakruimten der variëteiten een *1-dimensionale omhullende* O_1 (dus een kromme) *van de klasse* $\mu + \nu$ (zooals blijkt uit hare osculatieruimten R^{n-1} door een willekeurig punt van l) *met* ν *door* l *gaande osculatieruimten* R^{n-1}; hierin is μ het aantal door een willekeurig punt gaande, ν het aantal aan een willekeurige rechte rakende variëteiten van het stelsel. De raakruimten der krommen in de snijpunten met l hebben een *$(n-1)$-dimensionale omhullende* O_2 *van de klasse* $\varphi + \psi$ *met* l *als* ψ*-voudige rechte,* waarin φ het aantal door een willekeurig punt gaande krommen van het stelsel is en ψ het aantal krommen, die een willekeurig gegeven ruimte R^{n-1} in een punt van een gegeven rechte dier ruimte aanraken; immers brengen we door een punt Q van l een willekeurige R^{n-2} aan, dan geeft ieder der φ door Q gaande krommen van het stelsel een door deze R^{n-2} gaande raakruimte R^{n-1}, terwijl de door l en R^{n-2} bepaalde ruimte R^{n-1} (evenals iedere andere door l gaande R^{n-1}) ψ-maal raakruimte der omhullende is.

Beide omhullenden hebben dus $(\mu + \nu)(\varphi + \psi)$ gemeenschappelijke raakruimten R^{n-1}. Ieder der ν door l gaande osculatieruimten R^{n-1} van O_1 is een ψ-voudige raakruimte van O_2 en telt dus voor ψ gemeenschappelijke raakruimten, zoodat er $\mu\varphi + \mu\psi + \nu\varphi$ niet door l gaande gemeenschappelijke raakruimten overblijven; deze wijzen door hunne snijpunten met l de snijpunten van l met de aanrakingsvariëteit aan, zoodat we vinden:

De $(n-1)$*-dimensionale aanrakingsvariëteit van een* ∞^1 *stelsel van* $(n-1)$*-dimensionale variëteiten, waarvan er* μ *door een gegeven punt gaan en* ν *een gegeven rechte aanraken, en een* ∞^{n-1} *stelsel van krommen, waarvan er* φ *door een gegeven punt gaan en* ψ *een gegeven ruimte* R^{n-1} *in een punt van een gegeven rechte dier ruimte aanraken, is van den graad*

$$\mu\psi + \nu\varphi + \mu\varphi.$$

3. Met behulp van dit resultaat laat zich gemakkelijk de graad der aanrakingsvariëteit (meetkundige plaats der punten met gemeenschappelijke raaklijn) van n enkelvoudig oneindige stelsels (μ_1, ν_1), $(\mu_2, \nu_2), \ldots, (\mu_n, \nu_n)$ van $(n-1)$-dimensionale variëteiten bepalen. Deze graad is

$$\mu_1 \mu_1 \ldots \mu_n \left(\frac{\nu_1}{\mu_1} + \frac{\nu_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\nu_n}{\mu_n} + n - 1 \right),$$

zooals zich door volledige inductie laat aantoonen. De formule is juist voor $n = 2$. We nemen nu de juistheid der formule aan voor $n = i$ en hebben daaruit de juistheid aan te toonen voor $n = i + 1$.

De aanrakingsvariëteit voor $i + 1$ stelsels in R^{i+1} is de aanrakingsvariëteit van het variëteitenstelsel (μ_1, ν_1) en het krommenstelsel, dat gevormd wordt door de doorsneden der i overige variëteitenstelsels. Men heeft dan:

$$\mu = \mu_1 \quad , \quad \nu = \nu_1 \quad , \quad \varphi = \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_{i+1}.$$

De raakpunten van de krommen van het stelsel met een gegeven ruimte R^i vormen de $(i-1)$-dimensionale aanrakingsvariëteit der doorsneden van R^i met de stelsels (μ_2, ν_2), $(\mu_3, \nu_3), \ldots, (\mu_{i+1}, \nu_{i+1})$; deze doorsneden zijn eveneens stelsels $(\mu_2, \nu_2), \ldots, (\mu_{i+1}, \nu_{i+1})$, maar van $(i-1)$-dimensionale variëteiten. De genoemde aanrakingsvariëteit is volgens de onderstelling van den graad

$$\mu_2 \mu_3 \ldots \mu_{i+1} \left(\frac{\nu_2}{\mu_2} + \frac{\nu_3}{\mu_3} + \ldots + \frac{\nu_{i+1}}{\mu_{i+1}} + i - 1 \right).$$

Daar de snijpunten dier aanrakingsvariëteit met een rechte l van R^i de punten van l zijn, waar R^i door krommen van het stelsel wordt aangeraakt, zoo heeft men:

$$\psi = \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_{i+1} \left(\frac{\nu_2}{\mu_2} + \frac{\nu_3}{\mu_3} + \ldots + \frac{\nu_{i+1}}{\mu_{i+1}} + i - 1 \right).$$

Volgens de formule $\mu\psi + \nu\varphi + \mu\varphi$ wordt dus de graad der i-dimensionale aanrakingsvariëteit der $i + 1$ variëteitenstelsels

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{i+1} \left(\frac{\nu_1}{\mu_1} + \frac{\nu_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\nu_{i+1}}{\mu_{i+1}} + i \right),$$

waarmede de juistheid derzelfde formule voor $n = i + 1$ is aangetoond. We vinden dus:

Bij n ∞^1 *stelsels* $(\mu_1, \nu_1), (\mu_2, \nu_2), \ldots, (\mu_n, \nu_n)$ *van* $(n-1)$*-dimensionale variëteiten is de meetkundige plaats der punten, waar de er door heen gaande variëteiten der stelsels een gemeenschappelijke raaklijn bezitten, een* $(n-1)$*-dimensionale variëteit* (*aanrakingsvariëteit*) *van den graad*

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n \left(\frac{\nu_1}{\mu_1} + \frac{\nu_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\nu_n}{\mu_n} + n - 1 \right).$$

Zijn de stelsels bundels, dan is

$$\mu_i = 1 \quad , \quad \nu_i = 2\,(r_i - 1),$$

dus de graad der aanrakingsvariëteit $RV_{12\ldots n}$:

$$2\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) - n - 1.$$

4. Tot de correspondentie tusschen de punten $Q_{12\ldots n}$ en Q_{n+1} terugkeerend vindt men dus voor het aantal coincidenties, die snijpunten van l met de gezochte meetkundige plaats M zijn, dus voor den graad van M:

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_{n+1} r_{n+1} - 2\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_{n+1}) + n + 1 = \sum_{i=1}^{i=n+1} \{(a_i - 2)\, r_i + 1\}.$$

Men ziet gemakkelijk, dat een basisvariëteit B_i van den bundel (V_i) een $(a_i - 1)$-voudige variëteit van M is. De raakruimten R^{n-1} van M in een punt P van B_i zijn de raakruimten in P der variëteiten V_i, die aangebracht zijn door telkens een der $a_i - 1$ buiten B_i en de basisvariëteiten gelegen snijpunten der door P gaande variëteiten $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n$.

We vinden dus:

Gegeven zijn $n+1$ *bundels* (V_i) $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *van* $(n-1)$*-dimensionale variëteiten in een operatieruimte* R^n. *Zij* r_i *de graad der variëteiten van den bundel* (V_i) *en* a_i *het aantal der buiten de basisvariëteiten gelegen snijpunten van willekeurige variëteiten der bundels* $(V_1), (V_2), \ldots, (V_{i-1}), (V_{i+1}), \ldots, (V_n)$. *De eigenlijke meetkundige plaats der puntenparen, die op variëteiten van ieder der bundels liggen, is een* $(n-1)$*-dimensionale variëteit van den graad*

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \{(a_i - 2)\, r_i + 1\},$$

die de $(n-2)$*-dimensionale basisvariëteit van den bundel* (V_i) *als* $(a_i - 1)$*-voudige variëteit heeft.*

Is $n > 3$, dan zullen, ook in het algemeene geval, de basisvariëteiten der verschillende bundels elkaar snijden. Op soortgelijke wijze als we bij oppervlakkenbundels gedaan hebben [1]) kan nu ook de multipliciteit der gemeenschappelijke punten, krommen enz. van basisvariëteiten bepaald worden.

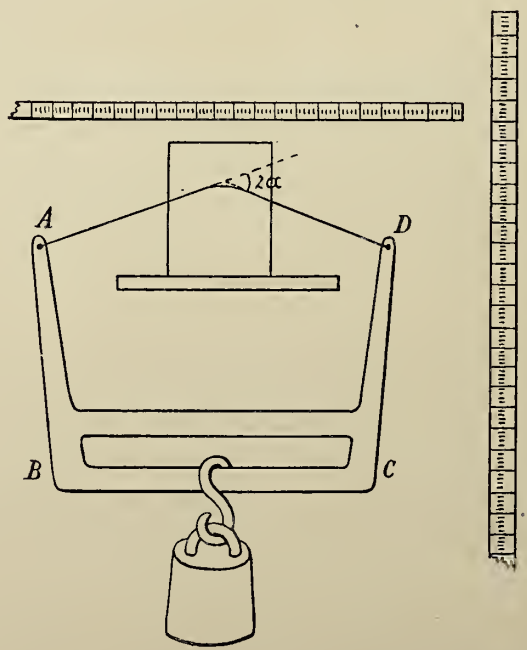
Sneek, 14 Jan. 1907.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. H. MEERBURG: *„Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijs."*

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES.)

In dezen en den vorigen winter werden door mij eenige metingen verricht ter toetsing der formules betreffende de snelheid van daling van een metaaldraad door een ijsblok, die door den Heer L. S. ORNSTEIN [2]) uit de regelatie-theorie werden afgeleid.

Bij mijne proeven was de metaaldraad aan beide einden aan de



[1]) Deze Verslagen, 29 Dec. 1906.

[2]) L. S. ORNSTEIN. Verslagen Kon. Acad. v. Wet. 1906, pag. 629.

beenen A en D van een ijzeren beugel, die ter meerdere stevigheid uit een ijzeren plaat gesneden was, bevestigd. De dalingen van den draad werden, bij de eerste metingen, met een afleeskijkertje waargenomen, dat om een horizontale en om een vertikale as draaibaar was en bepaald op een meetlat, die naast den beugel was opgesteld. De breedte van het ijsblok werd evenzoo op een horizontaal gestelde meetlat afgelezen. Bij de latere proeven werd een kathetometer gebezigd, die mij door de Hoogleeraren der Tech. Hoog. ter beschikking gesteld was. Ook te dezer plaatse dank ik die Heeren, in het bijzonder Prof. DE HAAS, voor hunne welwillendheid. De dalingen werden steeds afgeleid uit de verandering van het hoogteverschil tusschen den top van den draad en den bovenrand van een blaasje, dat zich ergens in het binnenste van het stuk ijs bevond. Telkens na 10 minuten of, bij snellere dalingen, na 5 minuten werd het hoogteverschil gemeten, om na te gaan of de daling regelmatig was. Elke proef duurde 20 à 40 minuten.

Het gebezigde ijs was kunstijs uit den handel. Uit een grooter blok werd een helder blokje gezaagd, waarin zich enkele blaasjes moesten bevinden om als merkteekens te dienen. De zijvlakken werden, door ze tegen een metaalplaat te drukken, vlak afgesmolten, waardoor fouten tengevolge van onregelmatige lichtbreking vermeden werden.

Warmtetoevoer langs den draad werd tegengegaan, door stukjes ijs ter weerszijden van het ijsblok over den draad te hangen. Toch ontstonden, bij de langzame dalingen, nog wel groefjes.

De proeven werden gedaan met staaldraden, nieuw-zilverdraden en zilverdraden. De dikte dier draden werd gemeten met een diktepasser, die metingen tot op 0,01 mM. toeliet. Deze dikten waren 0,5, 0,4 en 0,3 mM. Afwijkingen van deze getallen tot eenige honderdste millimeters deden zich echter wel voor.

Voor het geval, zooals dat bij mijne proeven verwezenlijkt werd, waarin de beide rechte einden van den draad zekeren hoek 2α met elkaar maakten, geldt de formule (III^a) van de verhandeling [2]) van den Heer ORNSTEIN:

$$v = \frac{2\alpha CP}{d_1 \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin v de snelheid van daling van den draad, P de totale belasting en d_1 de breedte van het ijsblok voorstellen. C is zekere constante. De waarde dezer constante heb ik volgens de formule (1) berekend uit de bij mijne proeven gevonden waarden van v.

Vat ik de uitkomsten samen, dan verkrijg ik de volgende tabel:

---

[2]) l. c.

	P (in grammen).	C	gemiddelde van C.
Staaldraad.		Middellijn 0.5 mM.	
	455	0.0162	0.017
	755	0.0151	
	1255	0.0172	
	2160	0.0185	
	2205	0.0169	
	5160	0.019	
		middellijn 0.4 mM.	
	455	0.030	0.029
	755	0.029	
	1255	0.029	
		middellijn 0.3 mM.	
	755	0.043	0.0425
	1255	0.042	
Nieuw-zilver.		middellijn 0.5 mM.	
	755	0.0134	0.014
	1255	0.0119	
	2150	0.0143	
	5160	0.0172	
		middellijn 0.4 mM.	
	755	0.0196	0.022
	1255	0.0204	
	2150	0.0208	
	5160	0.0255	
		middellijn 0.3 mM.	
	555	0.0306	0.035
	755	0.0348	
	855	0.0393	
Zilverdraad.		middellijn 0.5 mM.	
	755	0.0207	0.023
	1255	0.0255	
		middellijn 0.4 mM.	
	536	0.0367	0.039
	755	0.0384	
	1036	0.0392	
	1255	0.0404	
		middellijn 0.3 mM.	
	555	0.0347	0.041
	755	0.0467	

De grootheid C is hier niet in CGS. maat gevonden, daar de afmetingen in millimeters, de snelheden in millimeters per minuut en de krachten in grammen zijn genomen. Ter herleiding in CGS-maat moeten de waarden van C met 170×10^{-9} worden vermenigvuldigd.

De in de tabel gegeven waarden zijn gemiddelden uit eenige metingen. Om de onderlinge afwijkingen van metingen bij een zelfde belasting te doen zien, geef ik hier een, willekeurig genomen, opgave van afzonderlijke metingen.

Zilverdraad middellijn 0.4 mM.

Nummer der proef	P	v	d_1	2α	C	gemiddeld.
8	1036	1.017	39.0	42°	0.0368	0.0392
10	1036	1.11	37.4	42°	0.0393	
14	1036	1.27	35.4	37°	0.0411	
17	1036	1.73	29.3	30°	0.0393	
87	1255	0.99	52.3	50°	0.0401	0.0404
112	1255	1.09	51.27	53°	0.043	
115	1255	0.756	66.46	53°	0.0387	

Door den Heer ORNSTEIN wordt een berekende waarde van C gegeven in formule (I) zijner verhandeling. Hij vindt:

$$C = -\frac{\left(\frac{dt}{dp}\right)_0 \left[k_2 \frac{k_1 - {}^{d}/_{R}(k_1 - k_2)}{k_2 + {}^{d}/_{R}(k_1 - k_2)} + k_3\right]}{\pi R^2 W S_y} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin zijn k_1, k_2 en k_3 de warmte-geleidingscoëfficienten resp. van den draad, van water en van ijs, $\left(\frac{dt}{dp}\right)_0$ is de toename van de smelttemperatuur bij drukverhooging bij de temperatuur van het smeltpunt, W is de smeltingswarmte van ijs, S_y het soort, gew. van ijs, R de straal van den draad en d de dikte van de waterlaag. Nu kan de waarde van C door deze formule niet worden berekend, door onbekendheid van de grootheid d. Maar naast de verg. (I) wordt door den Heer ORNSTEIN in formule (II^c) een uitdrukking gegeven, afgeleid uit een hydrodynamische beschouwing, waarin de grootheid d eveneens voorkomt. Deze is[1]):

$$v = \frac{S_w}{S_y} \frac{2\alpha P}{12\pi\mu d_1 \sin\alpha} \left(\frac{d}{R}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

[1]) In de verhandeling van den Heer ORNSTEIN is deze formule gegeven zonder den factor $\frac{S_w}{S_y}$, daar deze geen noemenswaardigen invloed heeft.

S_w is hierin het soort. gew. van het water bij 0°, μ de coëfficient van inwendige wrijving. Door gelijkstelling van (1) en (3) vinden wij:

$$C = \frac{S_w}{S_y} \cdot \frac{1}{12\,\pi\,\mu}\left(\frac{d}{R}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en wij zouden nu tusschen (2) en (4) $\frac{d}{R}$ moeten elimineeren. Om deze eliminatie uit te voeren vereenvoudigen wij (2). Wij beschouwen den vorm tusschen [ ] in (2) en houden in het oog, dat $\frac{d}{R}$ zeer klein is, dat k_1 zeer veel grooter is dan k_2 en dat k_3 ten opzichte van den eersten term verwaarloosbaar is (wat dus hierop neerkomt dat wij den warmtetoevoer door het ijs verwaarloozen).

Dan kunnen wij schrijven:

$$k_2\,\frac{k_1 - {}^d/_R\,(k_1 - k_2)}{k_2 + {}^d/_R\,(k_1 - k_2)} = k_2\,\frac{k_1}{k_2 + {}^d/_R\,k_1} = \frac{k_1}{1 + {}^d/_R\,\frac{k_1}{k_2}}.$$

Dan is dus:

$$C = -\,\frac{\left(\frac{dt}{dp}\right)_0 \frac{k_1}{1 + {}^d/_R\,\frac{k_1}{k_2}}}{\pi\,R^2\,WS_y}$$

Stellen wij $\left(\frac{dt}{dp}\right)_0 = -\,7.4 \times 10^{-9}$, $S_y = 0.9167$, $W = 79.2$, dan wordt:

$$C = 3.3 \times 10^{-11} \times \frac{1}{R^2}\,\frac{k_1}{1 + {}^d/_R\,\frac{k_1}{k_2}}.$$

In (4) substitueeren wij $S_w = 1$, $S_y = 0.9167$, $\mu = 0.0181$, dan is

$$C = 1.600\left(\frac{d}{R}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Bij gelijkstelling der beide waarden van C wordt:

$$\left(\frac{d}{R}\right)^3 = 2.0 \times 10^{-11}\,\frac{1}{R^2}\,\frac{k_1}{1 + \frac{d}{R}\,\frac{k_1}{k_2}}$$

of

$$\left(\frac{d}{R}\right)^3 + \left(\frac{d}{R}\right)^4 \frac{k_1}{k_2} = 2.0 \times 10^{-11}\,\frac{k_1}{R^2}.$$

Uit deze vergelijking kan $\frac{d}{R}$ gemakkelijk, door probeeren, worden opgelost, als k_1, k_2 en R zijn gegeven. In de verschillende gevallen vindt men (in CGS-maat)

Staaldraad	$k_1 = 0.166$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.025$	$\frac{d}{R} = 0.00166$
	$k_1 = 0.166$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.020$	$\frac{d}{R} = 0.00190$
	$k_1 = 0.166$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.015$	$\frac{d}{R} = 0.00229$
Nieuw-zilverdraad	$k_1 = 0\ 070$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.025$	$\frac{d}{R} = 0.00128$
	$k_1 = 0.070$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.020$	$\frac{d}{R} = 0.00149$
	$k_1 = 0.070$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.015$	$\frac{d}{R} = 0.00179$
Zilverdraad	$k_1 = 1.50$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.025$	$\frac{d}{R} = 0.00239$
	$k_1 = 1.50$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.020$	$\frac{d}{R} = 0.00279$
	$k_1 = 1\ 50$	$k_2 = 0.0015$	$R = 0.015$	$\frac{d}{R} = 0.00318$

Door substitutie in (5) wordt dan C gevonden. Deze waarden zijn hieronder gegeven, terwijl dan daarnaast de door de proef gevondene, maar nu in CGS-maat uitgedrukt, gesteld zijn:

		Berekend	*Gevonden*
Staaldraad	$R = 0.025$	73×10^{-10}	29×10^{-10}
	$R = 0.020$	110×10^{-10}	49×10^{-10}
	$R = 0.015$	192×10^{-10}	72×10^{-10}
Nieuw-zilverdraad	$R = 0.025$	34×10^{-10}	24×10^{-10}
	$R = 0{,}020$	53×10^{-10}	37×10^{-10}
	$R = 0.015$	91×10^{-10}	59×10^{-10}
Zilverdraad	$R = 0.025$	218×10^{-10}	46×10^{-10}
	$R = 0.020$	347×10^{-10}	66×10^{-10}
	$R = 0.015$	519×10^{-10}	70×10^{-10}

De overeenstemming is voor den zilverdraad dus slecht te noemen, voor den nieuw-zilverdraad niet onbevredigend. Vooral daarom is deze niet onbevredigend te noemen, omdat er verschillende invloeden te noemen zijn, die een te kleine waarde doen verwachten. Afgezien van de groote onzekerheid in de waarde van den warmte-geleidings coëfficient der metalen, die wij hier niet als oorzaak der slechte

overeenkomst kunnen aanvoeren, omdat wij niet kunnen aangeven in welke richting dit van invloed is op het resultaat, zijn de volgende oorzaken te noemen.

1°. De ruwheid der draden. Reeds de Heer Ornstein wees hierop. Is de draad niet volkomen glad, dan zijn de hydrodynamische beschouwingen onzeker en dus ook de formule (3). Ik heb, om den invloed dezer ruwheid na te gaan, enkele proeven gedaan met een staaldraad, die in de lengte richting even met fijn schuurpapier geschuurd was. Makroscopisch was het gevolg hiervan aan den draad nog niet te zien. Toch bleek de invloed groot, want gevonden werd:

	P	C	
staaldraad middellijn 0,5 m.M.	455	0,009	gem. 0.011 m.M.
	1255	0,011	
	2205	0,014	
staaldraad middellijn 0,3 m.M.	1255	0,028	

Wij vinden dan een teruggang van ongeveer 40 % in de waarde van C. Ik heb, na het bemerken van dezen invloed, moeite gedaan gladde draden te verkrijgen. Het is mij niet gelukt; alle draden, die bij de proeven werden gebruikt, vertoonden onder den microscoop tallooze groeven in de lengte-richting van, naar schatting, iets minder dan 0,01 m.M. breedte.

Daar gemakkelijk wordt afgeleid uit de berekende waarden van $\frac{d}{R'}$, dat de dikte van het waterlaagje toeneemt met de grootte van den straal van den draad en de invloeden van de ruwheid van den draad geringer zullen zijn bij grootere dikte van dit waterlaagje, heb ik nog enkele metingen gedaan met een dikker staaldraad, van 0,87 m.M. middellijn, en grootere belastingen. Het resultaat was:

P	C		C (in C.G.S. maat)
25200	0,00803	0,0081	13.8×10^{-10}
25200	0,00822		
5200	0,00667		11.3×10^{-10}

Terwijl de berekening geeft

$$k_1 = 0{,}166, \quad k_2 = 0{,}0015, \quad R = 0{,}0435 \quad \frac{d}{R} = 0{,}00120 \quad C = 27.7 \times 10^{-10}$$

Inderdaad is nu de overeenstemming beter: de gevonden waarde is de helft van de berekende, terwijl zij bij de dunnere staaldraden iets meer dan het derde deel daarvan was.

2°. Bij de aflezing der formule (1) is aangenomen, dat binnen het waterlaagje de betrekking geldt:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0.$$

Deze betrekking geldt echter voor een lichaam in rust. Hier hebben wij intusschen met een stroomende vloeistof te doen en voor dat geval geldt de formule:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\varrho S_w}{k_2}\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

Waarin ϱ de soort. warmte der vloeistof, u en v de snelheidscomponenten in X- en Y-richting zijn. Nemen wij deze formule aan, dan letten wij er op, dat de warmte, die door den draad wordt aangevoerd, niet geheel dient voor smelting van het ijs, maar gedeeltelijk door de stroomende vloeistof weder naar boven wordt teruggevoerd. Ook dit moet een verkleining van de snelheid van daling ten gevolge hebben. Door Prof. LORENTZ werd mij echter medegedeeld dat aangetoond kan worden, dat deze invloed beschouwd moet worden als een grootheid van 2de orde, zoodat dit de verschillen niet kan verklaren.

3°. Indien de temperatuur in het binnenste van het ijsblok niet juist 0° is, maar lager, dan zal de snelheid van daling ook geringer moeten worden. Ik heb echter geen verschijnselen waargenomen, die op zulk een lagere temperatuur in het binnenste wijzen. IJsblokken, die 24 uur bewaard waren in een ruimte boven 0°, gaven gelijke uitkomsten als ijsblokken, die pas ontvangen waren. De draden daalden bovendien gewoonlijk slechts op enkele millimeters afstand van een zijvlak van het ijsblokje en bij enkele proeven kwamen zij zelfs door afsmelting van dat zijvlak, gedurende de daling aan die zijde buiten het blokje. Toch werd op het laatste oogenblik, voordat de draden er uit kwamen, geen versnelling van daling waargenomen.

En ook de theorie steunt een dergelijke opvatting niet. Prof LORENTZ deelde mij mede, dat als het oppervlak van een ijskogel van 3 c.m. straal en temperatuur — 2° op 0° gebracht en gehouden wordt, men kan afleiden, dat in minder dan één uur de temperatuur van het middelpunt tot op — 0.°01 is gestegen.

4°. Nog een belangrijken invloed op de snelheid van dalen vinden wij hierin, dat het mogelijk is, dat niet al het ijs, dat aan de onderzijde van den draad smelt, weder juist aan de bovenzijde tot bevriezing komt, maar dat dit water wellicht zijwaarts afvloeit. Het is duidelijk, dat dit van grooten invloed moet zijn, want dan moet de

voor de smelting benoodigde warmte geleverd worden door geleiding door het ijs. Trouwens reeds J. THOMSON BOTTOMLEY [1]) toonde aan, dat het zijwaarts afvloeien van het water groote vertraging ten gevolge heeft.

De proeven hebben nu geleerd, dat dit afvloeien werkelijk plaats vindt. Want zelfs als het ijs volkomen helder was, werden op de plaatsen waar de draad door het ijs gegaan was, verschillende blaasjes waargenomen: Daar was dus niet al het ijs terug gevormd, dat er eerst geweest was.

In verband hiermede moet ik nog wijzen op een eigenaardige verandering, die bij de proeven voor de waarde van C gevonden wordt: deze waarden stijgen met de belasting. Zeer sterk komt dit uit bij de zilverdraden en de nieuw-zilverdraden, maar het is toch ook bij de staaldraden wel aanwezig — vooral bij den dikken staaldraad, van 0.87 m.M. dikte.

Inderdaad werd in overeenstemming daarmede ook dikwijls geconstateerd, dat de blaasjes op het pad van den draad talrijker waren bij geringe belasting dan bij grootere, wat vooral duidelijk uitkwam bij proeven, waarbij, gedurende een zelfde daling, eerst een groote en dan eene kleine belasting werd gebruikt. Bij die kleinere belasting stroomt er dus meer water zijwaarts af.

Ik heb ook nog verschillende proeven genomen, bij welke de draad naar omhoog door het ijs werd getrokken, in de hoop dan dit zijwaarts wegvloeien te voorkomen. Het resultaat was echter niet het verwachte, ook dan vertoonden zich blaasjes en de gevonden waarden van C waren zelfs nog iets kleiner dan in het eerste geval. Het zou, in verband met deze quaestie, wel gewenscht zijn de daling van een voorwerp in zijn geheel, een ijzeren kogel bijv. door volkomen helder ijs na te gaan.

Ik meen, dat deze afvloeiing de voornaamste oorzaak is van het verschil tusschen theorie en waarneming. Zij verklaart ook, dat bij den zilverdraad grooter verschillen werden gevonden dan bij den nieuwzilverdraad en den staaldraad. Want, wordt de warmte maar voor een deel geleverd door het bevriezingsproces boven den draad en moet het ontbrekende door het ijs worden aangevoerd, dan schijnt het mij vrij onverschillig of de draad al een zeer goede warmtegeleider is.

5°. Het ijs is een kristallijne stof. Ook dit kan wellicht van invloed zijn. Wellicht is het smeltpunt aan de verschillende zijden der kristalvlakken, met welke de draad in aanraking komt, niet hetzelfde. Van

---

[1]) Pogg. Ann. 148 p. 492 1871.

dezen invloed, die mogelijk aanwezig is, kunnen wij niet aangeven in welke richting hij het resultaat wijzigt. Om na te gaan of een dergelijke invloed aanwezig is, heb ik eenige malen den draad eenzelfde blokje ijs laten doorgaan in drie onderling loodrechte richtingen. Een merkbaar verschil werd echter niet verkregen.

Als algemeen resultaat van de genomen proeven meen ik te mogen aangeven, dat door deze proeven een aanduiding gegeven is, dat de regelatie-theorie in staat gevonden zal worden de verschijnselen niet alleen qualitatief, maar ook quantitatief te verklaren.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan, getiteld: *„Bijdrage tot de kennis der werking van rëeel salpeterzuur op heterocyclische verbindingen"*.

Ongeveer twintig jaren geleden de regels naspeurende, volgens welke het salpeterzuur [1]) werkt op waterstofverbindingen, zoowel op die welke de waterstof aan koolstof als op die welke haar aan stikstof gebonden bevatten, werd o.a. gevonden dat de waterstof, gebonden aan stikstof tot de atoomgroep NH, *niet* op salpeterzuur werkt, wanneer in cyclische verbindingen deze groep zich tusschen twee groepen CO bevindt, *wel* als zij daarin staat tusschen de groep CO en eene verzadigde koolwaterstofrest [2]), waarbij nog gevoegd kan worden: *niet* als zij daarin geplaatst is tusschen twee verzadigde koolwaterstofresten, ofschoon dit vroeger niet door mij werd uitgesproken.

Eigenaardig is het dat de waterstof van de groep NH niet werkt op salpeterzuur als deze groep tusschen twee gelijke groepen zooals CO of verzadigde koolwaterstofresten staat, wel als zij zich bevindt tusschen twee ongelijke, zoodat de gedachte aan een tautomeren vorm zou kunnen opkomen als voorwaarde voor de reactie.

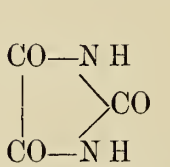
---

[1]) n.l. het rëeele, dat o.a. verkregen wordt door een mengsel van salpeterzuur s.g. 1.42 met het dubbel gewicht zwavelzuur onder verminderden druk bij zachte verwarming te distilleeren, zooals herhaaldelijk beschreven is o. a. Recueil XVI. p. 386.

[2]) die echter *niet* de groep CH_2 behoeft te zijn, zooals HARRIES mij laat zeggen Annalen **327**. p. 358. Juist op de door hem geciteerde bladzijden van het Recueil staan de bewijzen voor het tegendeel. Evenmin is door mij ooit van „höchst concentrirter Salpetersäure" gesproken, zooals hij zegt en waarvan hij meent „den Begriff festlegen" te moeten en waarvoor hij dan iets aanbeveelt dat in vele gevallen geen goed resultaat kan opleveren.

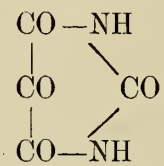
Er zijn dus eigenlijk drie regels, die nader beschouwd ook min of meer gelden bij acyclische verbindingen, en die ofschoon de cyclus ook een invloed uitoefent, hoofdzakelijk schijnen voort te spruiten uit den aard der stof waarin zich de groep NH bevindt: secundair amine, amide of imide. Het is alleen de waterstof van de functie amide, welke op het salpeterzuur werkt, niet die van de functies amine en imide. Bij acyclische amiden werd gevonden dat vooral de acylgroep maar ook de alkylgroep invloed op de werking heeft; bij de cyclische mag iets dergelijks dus ook verwacht worden.

De eerste der bovengenoemde regels werd hoofdzakelijk afgeleid uit het gedrag van penta- en hexa-atomige cyclische ureum-derivaten, maar ook bij andere verbindingen bevestigd. Zoo konden b.v.



parabaanzuur

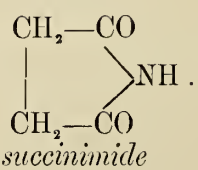
en



alloxaan

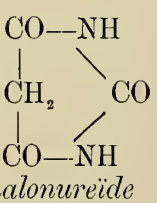
met salpeterzuur ingedampt worden op een kokend waterbad, zonder eenige ontleding te ondergaan

en eveneens



succinimide.

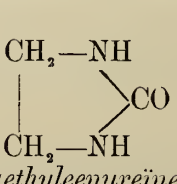
Het



malonureïde

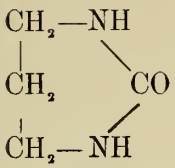
geeft wel een nitroderivaat maar met de nitrogroep aan de koolstof, de beide NH-groepen werken niet.

De tweede regel steunt eveneens hoofdzakelijk op het gedrag van penta- en hexa-atomige cyclische ureumderivaten. Zoo gaf



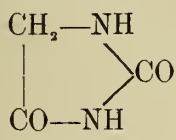
aethyleenureïne

een dinitroderivaat dat bij koking met water koolzuurgas en aethyleendinitramine leverde. Hierbij kan ik nu nog voegen het



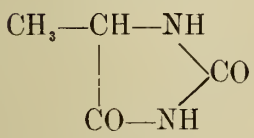
Trimethyleenureïne

waarvan ik onlangs met Dr. FRIEDMANN geconstateerd heb dat het direct een *dinitroderivaat* geeft, hetgeen bij koking met water koolzuurgas en trimethyleendinitramine oplevert.

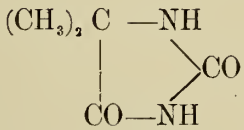


en zijne methylderivaten

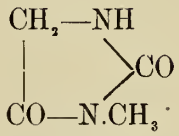
Hydantoïne



α lactylureum



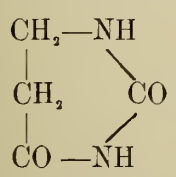
acetonylureum



1 *N*methylhydantoïne

gaven mononitroderivaten, die door koking met water ontleed werden onder ontwikkeling van een molecuul koolzuurgas en vorming van een nitramino-amide bv. nitrohydantoïne het nitramino-acetamide.

Hierbij kan ik nu weer voegen het onlangs met Dr. FRIEDMANN onderzochte



hetgeen even gemakkelijk een *mononitroderivaat*

hydro-uracil

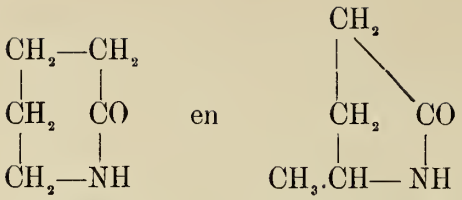
(*β lactylureum*)

geeft, [1]) dat bij koking met water op analoge wijze koolzuurgas en *β nitraminopropionamide* oplevert, waaruit wij verder het *β nitraminopropionzuur* bereid hebben, benevens zijn barium en zilverzout.

Deze ontleding bewijst de plaats der nitrogroep en tevens zijn al deze lichamen eene bevestiging van den eersten regel omdat de groep NH, die zich bevindt tusschen de twee CO-groepen niet heeft gewerkt.

---

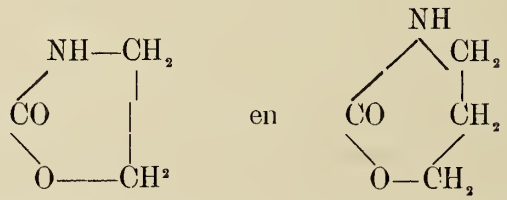
[1]) TAFEL had van deze stof vermeld Ber. d. D. ch. G. 33 p. 3385 dat zij zelfs door lang koken met geconcentreerd salpeterzuur niet verandert; blijkbaar heeft hij geen rëeel salpeterzuur gebruikt.



α piperidon *α methylpyrrolidon*

gaven met salpeterzuur N_2O, vermoedelijk van eene tegen salpeterzuur bij de gewone temperatuur onbestendige nitroverbinding ; want het is gebleken dat sommige nitramiden zeer gemakkelijk bij de gewone temperatuur door salpeterzuur onder stikstofoxydule ontwikkeling ontleed worden, terwijl andere er straffeloos op een kokend waterbad mede ingedampt kunnen worden.

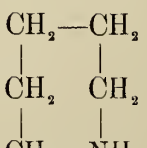
De regel werd vijf jaren geleden bevestigd gevonden bij cycli waaraan de zuurstof deelneemt, zoo gaven



μ. céto tetrahydro-oxazol. *μ. céto pentoxazolidine*

bij indamping met salpeterzuur mononitroderivaten, die door koking met water ontleed werden onder vorming van koolzuurgas en een nitramino-alcohol.

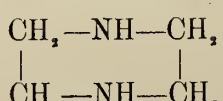
De derde regel volgt uit 't gedrag van het



piperidine

dat met salpeterzuur wel een nitraat geeft maar niet direct eene nitro-verbinding. Deze kan wel bereid worden uit tal van piperididen, zooals wij onlangs nog geconstateerd hebben bij de *piperididen* van *zwavelzuur* en van *barnsteenzuur*, of uit het nitraat met azijnzuuranhydride, zooals Bamberger vond.

Op dezelfde wijze gedraagt zich, zooals ik onlangs geconstateerd heb, het



piperazine.

Aanleiding tot de reeds genoemde nieuwe onderzoekingen en tot

de volgende gaf een arbeid van den Heer A. Donk. Deze had tot oefening $\begin{matrix} CH_2—NH—CO \\ | \quad\quad\quad | \\ CO—NH—CH_2 \end{matrix}$ bereid en nu liet ik hem dit met salpeterzuur behandelen. Het gaf echter, zelfs bij indamping op een kokend waterbad, geen stikstofoxydule ontwikkeling, geen nitroderivaat, maar een nitraat. Dit gedrag had ik eer verwacht van het onbekende $\begin{matrix} CH_2—NH—CH_2 \\ | \quad\quad\quad | \\ CO—NH—CO \end{matrix}$ dat er mede isomeer is en waarin ééne NH groep tusschen twee CO groepen, de andere tusschen twee verzadigde koolwaterstofresten staat, maar niet van het glycocollanhydride, waarin elke groep NH tusschen CO en eene koolwaterstofrest zich bevindt, en aan welks structuur niet kon getwijfeld worden. Hoogstens zou men hier een tautomeer kunnen vermoeden, dat dan niet met salpeterzuur werkt of in alle andere gevallen, waarin salpeterzuur wel werkt, een tautomeer aannemen en hier niet. [1])

glycocollanhydride

iminodiazijnzuurimide

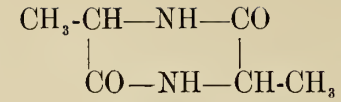
Het nitraat van den Heer Donk, eene zeer losse verbinding, scheen een mononitraat te zijn en door toepassing van Bamberger's methode bij aminen, behandeling van 't nitraat met azijnzuur-anhydride, kreeg hij een *mononitroderivaat*, waarvan hij de structuur bewees door er methylalcoholische kali op te laten werken, hetgeen hem een goed gekristalliseerd zuur opleverde nl. het NO_2 NH CH_2 CO NH CH_2 CO_2 H.

nitraminoacetylaminoazijnzuur

De reactie had dus plaats zooals in alle andere gevallen, waarin NO_2 en CO tegelijk zich aan een stikstofatoom bevinden; door opneming van de elementen van het water H en OH laat de groep CO de stikstof los terwijl NO_2 er aan verbonden blijft.

Na het vertrek van den Heer Donk, die dit onderwerp niet wenschte te vervolgen, heeft Dr. Friedmann het weder opgevat en uit glycocollanhydride met overmaat van salpeterzuur en azijnzuuranhydride het *dinitroglycocollanhydride* verkregen en hieruit door inwerking van ammoniak het nitraminoacetamide, door die van natron het nitraminoazijnzuur, het laatste in zoodanige hoeveelheid dat de vorming van twee moleculen niet twijfelachtig was en dus de plaatsing der beide nitrogroepen aan de stikstofatomen voldoende is bewezen.

[1]) Harries l. c. neemt bij 1 N methylhydantoïne een tautomeer aan $\begin{matrix} CH_2—N \\ | \quad\quad \diagdown\!\!\diagdown \\ | \quad\quad\quad COH \\ | \quad\quad\quad / \\ CO—NCH_3 \end{matrix}$ dat echter met salpeterzuur hetzelfde nitromethylhydantoïne voortbrengt.

Ook het  gaf met salpeterzuur ingedampt

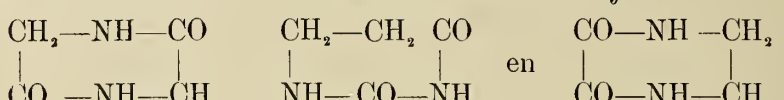
alanineanhydride

slechts een nitraat dat door behandeling met azijnzuuranhydride een *dinitroalanineanhydride* opleverde.

Deze resultaten, die dus eene eerste afwijking van den regel zooals hij vroeger uitgesproken was vormden, prikkelden tot verder onderzoek. Er bleek toch duidelijk uit dat, behalve de plaatsing van de groep NH tusschen CO en eene verzadigde koolwaterstofrest, het overige gedeelte van het molecuul ook invloed kan hebben op de werking en wel zoodanig dat directe nitreering zelfs in de warmte belet wordt, terwijl toch de nitroverbindingen bestaan.

De vraag rees dus naar het gedrag van die isomeeren van het glycocollanhydride, welke dezelfde atoomgroepen bezitten, maar in andere orde met elkaar verbonden.

Er kunnen elf cyclische verbindingen zijn, die uit twee groepen NH, twee groepen CO en twee groepen CH_2 bestaan, waarvan er evenwel slechts drie in de literatuur beschreven zijn nl.



glycocollanhydride *hydro-uracil* *aethyleenoxamide*

Het laatste echter alleen in onzuiveren toestand, zooals HOFFMANN het in 1872 beschreven heeft, en dat ook ons tot nog toe niet gelukt is in zuiveren toestand te verkrijgen.

Dit lichaam had een bijzonder belang, het heeft de beide groepen NH ook tusschen CO en CH_2 in en zou dus volgens den regel gemakkelijk een dinitroderivaat hetzij bestendig hetzij onbestendig, moeten geven. Toch zou 't kunnen zijn dat het in 't geheel niet werd aangegrepen door rëeel salpeterzuur, want herinnert men zich dat diacetamide, hoewel langzaam, toch met salpeterzuur N_2O ontwikkelt en dus vermoedelijk eene onder die omstandigheden onbestendige nitroverbinding vormt, en vergelijkt men dit met het cyclische succinimide, dat niet aangegrepen wordt, zelfs in de warmte, en dat er in zoodanig verband mede staat dat het twee waterstofatomen minder bevat en daardoor de cyclische binding is opgetreden, dan is men geneigd aan de cyclische binding het beletten der inwerking van salpeterzuur toe te schrijven. Zoo zou men ook het aethyleenoxamide kunnen vergelijken met het dimethyloxamide dat zich gemakkelijk nitreeren laat en er in hetzelfde verband mede staat als het diacetamide met het succinimide, en als

de cyclusvorming hier hetzelfde effekt heeft als in 't andere geval, zou het aethyleenoxamide dus niet worden aangegrepen.

Voorloopige proeven met het onzuivere lichaam leerden dat er een di-nitroderivaat schijnt gevormd te worden, dat door salpeterzuur ontleed wordt, of het wordt niet aangegrepen. Er heeft n.l. eene uiterst langzame gasontwikkeling N_2O en CO_2 plaats, die echter ook van de onzuiverheid afkomstig kan zijn.

Van de elf denkbare isomeeren zijn er slechts twee ureumderivaten n. l. het hydro-uracil dat, zooals reeds vermeld werd, zich volgens den regel gedraagt en een mononitroderivaat geeft. Het tweede is het $CH_2—CO—CH_2$ / $NH—CO—NH$. Rügheimer vermoedde in 1892 dat hij deze stof

acetonureïne

gekregen had door inwerking van chloormierenzure ester op diaminoaceton, maar meer dan een vermoeden was 't niet, analyse werd niet gemaakt en eigenschappen werden niet onderzocht en uit onze onderzoekingen volgt de hooge onwaarschijnlijkheid dat hij deze stof onder handen had, daar hoe wij de proeven ook varieerden, door ons niet anders dan het *acetondiurethaan* verkregen werd, waaruit gemakkelijk een *dinitroderivaat* ontstond. Tal van andere methoden om het acetonureïne uit diaminoaceton te verkrijgen werden door ons beproefd maar steeds zonder goeden uitslag. Intusschen zetten wij onze proefnemingen voort, daar juist aan deze stof, als tweede ureumderivaat, nu het eerste zich volgens den regel gedraagt, veel gewicht door ons wordt gehecht.

Een vijfde isomeer zou zijn het $CO—CH_2—CO$ / $NH—CH_2—NH$ dat wij te vergeefs

methyleenmalonamide

getracht hebben te bereiden uit malonamide en formaldehyde. Hier schijnt voornamentlijk de groep CH_2 van het malonzuur te reageeren; maar ook met het amide van dimethylmalonzuur en formaldehyde zijn wij niet tot het gewenschte resultaat gekomen. Het methyleenmalonamide heeft daarom belang omdat ook de CH_2 groep van 't malonzuur een nitroderivaat zou kunnen geven; terwijl dit van de beide groepen NH eveneens verwacht kan worden.

Een zesde isomeer is het reeds genoemde $CH_2—NH—CH_2$ / $CO—NH—CO$

iminodiazijnzuurimide

waarvan men, zooals reeds gezegd werd, zou verwachten dat het met salpeterzuur slechts een nitraat, geen nitroderivaat, zou opleveren.

De heer JONGKEES kreeg o.a. door verhitting van het diamide van iminodiazijnzuur in vacuo eene stof die sublimeert en de samenstelling van het imide heeft. Deze gedraagt zich echter niet zooals verwacht werd maar schijnt bij indamping met salpeterzuur een nitroderivaat te geven, hoewel met eenigszins andere eigenschappen dan men van nitraminen of nitramiden gewend is.

Het laatste isomeer van eenige beteekenis voor het onderhavige vraagstuk, ter welks verkrijging evenwel nog geene proeven zijn genomen, zou zijn $\begin{matrix} CO—NH & —CH_2 \\ | & | \\ CO—CH_2 & —NH \end{matrix}$ waarin eene NH groep tusschen CO en CH_2 eene nitroverbinding doet verwachten, terwijl de tweede geplaatst tusschen 2 CH_2 alleen een nitraat zou kunnen geven.

De vier overigen zijn hydrazinederivaten en hebben voor ons vraagstuk geene beteekenis, omdat de beide NH groepen daarin met elkaar zijn verbonden. Een er van $\begin{matrix} CH_2—CO—NH \\ | \\ CH_2—CO—NH \end{matrix}$ heeft de heer FRIEDMANN bereid en met salpeterzuur in aanraking gebracht; onmiddellijk trad eene stormachtige ontwikkeling van roode dampen op, zoodat er blijkbaar oxydatie plaats vond.

De détails dezer onderzoekingen, die natuurlijk voortgezet worden, zullen in het Recueil des Travaux chimiques verschijnen.

Er blijkt reeds voldoende uit dat de tweede regel gewijzigd moet worden en wel in dien zin: dat de al of niet directe nitreerbaarheid der heterocyclische verbindingen die NH tusschen CO en C_nH_{2n} geplaatst hebben, ook afhangt van hetgeen, waarmede de groepen, waartusschen de groep NH staat, verbonden zijn; dus 't zelfde wat reeds bij acyclische verbindingen is geconstateerd. In hoeverre hierbij de cyclus zelf eene rol speelt is nog niet met zekerheid uitgemaakt, maar op eene eigenaardigheid mag voorloopig nog gewezen worden nl. dat de verbindingen, die zich afwijkend van den vroeger opgestelden regel schijnen te gedragen, de groepen NH in parastand ten opzichte van elkaar hebben.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 96c uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: W. H. KEESOM. *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. XIII. *Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels* (vervolg).

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 6. *Voorwaarden voor het optreden van barotropische plooipunten bij mengsels met* $M_2 = 2\,M_1$, $v_{k_1} = 8\,v_{k_2}$. Nu in § 5 (Dec. '06, p. 517) gebleken was, dat bij de daar genoemde onderstellingen een barotropisch plooipunt [1]) bestaat, werd mede wegens het belang dezer beschouwingen voor mengsels van He en H_2, allereerst het optreden van barotropische plooipunten bij $M_2/M_1 = 2$, $v_{k_2}/v_{k_1} = {}^1/_8$ nader onderzocht [2]). Op de wijze zooals in § 5 werd uiteengezet, vindt men de

[1]) Het bewijs, dat dit barotropisch plooipunt inderdaad op de gas-vloeistof-plooi ligt, staat in verband met de beschouwing van de lengteplooi. In eene volgende Meded. van Prof. KAMERLINGH ONNES en mij over dit laatste onderwerp, waarvan in Meded. N°. 96b de behandeling voorloopig werd uitgesteld, zal tevens het bedoelde bewijs opgenomen worden.

[2]) Ter beoordeeling in hoeverre deze laatste aanname overeenstemt met hetgeen omtrent mengsels van He en H_2 bekend is, volge hier mede namens Prof. KAMERLINGH ONNES (verg. Meded. no 96b § 4, Dec. '06 p. 512) de volgende opmerking omtrent b (vergel. VAN DER WAALS, Zittingsversl. Dec. '06, p. 544) en a voor helium: Bij de voorloopige proef beschreven in Meded. no. 96a bleek bij analyse de vloeistofphase minstens (gedurende het aftappen der vloeistofphase is er He uit verdampt) ongeveer 3 % He, de gasphase hoogstens (bij het afblazen der gasphase is eenige vloeistof medegegaan) ongeveer 20 % H_2 te bevatten. Stellen we de dichtheid van vloeibare waterstof kokende onder atmosferischen druk volgens DEWAR (Roy. Institution Weekly Evening Meetings, 25 Mrt. '04) 0.070, en leiden we de samendrukbaarheidscoeff. volgens het beginsel der overeenstemmende toestanden af, b.v. uit die van pentaan bij 20° C., dan is bij 40 atm. de dichtheid 0.072. Berekenen we de dichtheidsvermeerdering ten gevolge van de oplossing van helium uit de toestandsverg. van VAN DER WAALS voor een binair mengsel door voor dezen correctieterm $b_{MHe} = \frac{1}{4}\, b_{MH_2}$ te stellen, dan verkrijgen we voor de dichtheid van de vloeistofphase bij genoemde p en T indien deze 5 % He bevatte: 0.077.

De gasphase zal ongeveer bij dezelfde p en T (vergel. Meded. N°. 96a, p. 455) dezelfde dichtheid hebben. De theoretische dichtheid (AVOGADRO-BOYLE-GAY-LUSSAC) bij $T = 20°$ en $p = 40$ atm. is 0.0885. Stellen we de toestandsverg. van VAN DER WAALS met voor bepaalde x niet van v en T afhangende a_x en b_x toepasselijk, dan volgt uit de boven gegeven waarde voor de dichtheid $\frac{b_x}{v-b_x} - \frac{a_x}{RT}\frac{1}{v} = 0.15$.

Voor $a_{22} = a_{12} = 0$ zou men met $a_{11M} = 0.00042$ (KOHNSTAMM, LANDOLT-BÖRN-

in tabel I aangegeven barotropische plooipunten, telkens bij de daarbij aangegeven verhouding van de kritische temperaturen der componenten.

TABEL I.

Barotropische plooipunten bij $M_2/M_1 = {}^1/_2$, $v_{k_2}/v_{k_1} = {}^1/_8$.

T_{k_2}/T_{k_1}	x_{bpl}	v_{bpl}/v_{k_1}	T_{bpl}/T_{k_1}	p_{bpl}/p_{k_1}
0.0001	0.6	0.3957	1.005	4.805
0.0105	0.65	0.3481	0.934	4.772
2/121	2/3	1/3	441/484	576/121
0.0302	0.7	0.3048	0.867	4.758
0.0522	0.75	0.2636	0 800	4.780
0.0736	0 8	0.2234	0.726	4.811
0.0921	0.85	0.1833	0.638	4.800
0.1053	0.9	0.1424	0.521	4.567
0.1088	0.925	0.1212	0.444	4.202
0.1095	0.94	0.1081	0.387	3.751
0.1091	0 95	0.0991	0.343	3.282
0.1074	0.965	0.0851	0.266	2.107
0.1053	0 975	0.0752	0.204	0 687
0.1020	0.985	0.0644	0.130	— 1.927
0.0998	0.99	0.0585	0.078	— 5.191
0.0980	0.995	0.0518	0.033	— 9.723
0.0978	0.9965	0.0495	0.028	—10.326
0.0982	0.9975	0.0478	0.019	—12.086
1/8	1	1/24	0	— 27

STEIN-MEYERHOFFER's Physik. Chem. Tabellen), en met $v_M = 0.0021$, voor de gasphase $x = 0.80$ stellende, verkrijgen : $b_{x_M} = 0.21\ v_M = 0.00044$. Dan zou worden $b_{22M} = 0.00033 = {}^3/_8\, b_{11M}$ ($b_{11M} = 0.00088$, KOHNSTAMM l. c.). Wil men voor a_{12} en a_{22} positieve waarden aannemen (verg. Meded. N°. 96*a*, p. 455), dan zou men moeten stellen bij $T = 20°$: $b_{22M} > {}^3/_8\, b_{11M}$; onderstelt men dat de gasphase 15%

De in de tabel aangegeven barotropische plooipunten hebben alleen, voor zoover de aangenomen onderstellingen gelden, physische beteekenis indien T_{bpl} niet zoo laag wordt dat vaste phasen hun invloed doen gelden (verg. Meded. No. 96 *b* § 5 *b*) en bovendien niet het gedeelte van het ψ-vlak in de nabijheid van het plooipunt wordt overdekt door een meer stabiele evenwichten aanduidend gedeelte van het gederiveerde oppervlak (gelijk b.v. voor de negatieve drukken het geval zal zijn). In hoeverre de aangegeven barotropische plooipunten tot de gas-vloeistof-plooi behooren zal in de volgende Meded. (verg. Noot 1, p. 655) nader aangegeven worden.

In de eerste plaats volgt uit tabel I dat bij de aangenomen verhoudingen der moleculairgewichten en der kritische volumina barotropische plooipunten slechts mogelijk blijken (nog afgezien van de vraag of zij physisch realiseerbaar zijn, en of zij tot de gas-vloeistof-plooi behooren) voor $T_{k_2}/T_{k_1} < \frac{1}{8}$.

Het barotropisch plooipunt voor de verhouding $T_{k_2}/T_{k_1} = 0.0001$ is een plooipunt voor een mengsel waarvan de eene component een bijna aantrekkingsloos gas is (Meded. No. 96*b* § 1). De verdere beschouwing hiervan zou ons weder op het gebied van de lengteplooi brengen.

De waarden betrekking hebbende op barotropische plooipunten voor x_{bpl} dicht bij 1 leveren eene bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS voor binaire mengsels met een klein

---

H_2 bevatte, dan zou men uit de bovengenoemde proef voor positieve waarden van a_{11} en a_{12} afleiden : $b_{22M} > 0.31\, b_{11M}$.

Deze uitkomsten zijn zeer wel overeen te brengen met hetgeen omtrent $b_{M\mathrm{He}}$ bij 0° C. kan worden afgeleid; de verhouding der brekende vermogens geeft: $b_{22M} = 0.31\, b_{11M}$, terwijl de verhouding der wrijvingscoëfficienten, alsook die der warmtegeleidingscoëfficienten tot eene grootere waarde voor $b_{M\mathrm{He}}$ (ongeveer $^1/_2\, b_{M\mathrm{H}_2}$) voeren.

Neemt men $b_{22M}/b_{11M} = {}^1/_2$, dan zou men uit de bovengegeven beschouwingen ($a_{12M} = \sqrt{a_{11M}\, a_{22M}}$ stelllende) verkrijgen: $a_{22M}/a_{11M} = {}^1/_{175}$, zoodat $T_{k\mathrm{He}} =$ ongeveer 0.35°. Eene waarde voor de kritische temperatuur van He $< 0.5°$ wordt hierdoor waarschijnlijk.

Hoewel dus waarschijnlijk b_{22}/b_{11} voor mengsels van He en H_2 grooter is, zullen we toch hier, daar het juiste bedrag ons nog niet bekend is en het ons hier slechts om een voorbeeld ter discussie te doen is, terwijl het beloop van het ψ-vlak door dit verschil in de hoofdzaken niet belangrijk gewijzigd zal worden, de in § 5 aangenomen onderstelling omtrent b_{22}/b_{11}, waarmede de berekeningen zijn begonnen, behouden.

gehalte aan een der componenten [1]). Men vindt voor T_{k_2}/T_{k_1} dicht bij $^1/_8$, $x_{bpl} = 1 - \xi$ stellend:

$$u = -\xi^{-2/3}\left\{1 - \frac{1}{2}\xi^{2/3} - \frac{1}{3}\xi \ldots\right\}, \mu = -\frac{9}{7}\left\{1 - \frac{4}{9}\xi^{1/3} + \frac{20}{9}\xi^{2/3} - \frac{29}{9}\xi \ldots\right\}, T_{k_2}/T_{k_1} = \frac{1}{8}\left\{1 - \frac{7}{2}\xi^{1/3} + \frac{315}{16}\xi^{2/3} - \frac{735}{16}\xi \ldots\right\}.$$

Men ziet uit de reeks der verhoudingen T_{k_2}/T_{k_1} in tabel I, dat zich hierin een maximum en een minimum voor doen, respectievelijk bij ongeveer $T_{k_2}/T_{k_1} = 0.1095$ en 0.098. Uit de voor x_{bpl} dicht bij 1 afgeleide formules vindt men een minimum en een maximum voor μ, en derhalve voor T_{k_2}/T_{k_1}, respectievelijk bij $x_{bpl} = 0.9968$ en 0.969. Dat dit laatste in werkelijkheid bij $x_{bpl} = 0.94$ gevonden wordt is aan volgende termen in de ontwikkeling toe te schrijven.

Bij $T_{k_2}/T_{k_1} < 0.098$ of $0.1095 < T_{k_2}/T_{k_1} < 0.125$ wordt *één*, bij $0.098 < T_{k_2}/T_{k_1} < 0.1095$ worden *drie* barotropische plooipunten gevonden. In verband met Meded. No. 96 *b* § 2 (Dec. '06 p. 508, zie ook deze Meded. § 1, Dec. '06, p. 514) volgt ook hieruit dat voor de hier beschouwde mengsels bij lagere temperatuur de lengteplooi haren invloed doet gelden.

Door de in Meded. N°. 96*a* beschreven proef bleek dat voor mengsels van He en H_2 bij $-253°$, d. i. ongeveer $T = 0.65\ T_{kH_2}$, eene barotropische raakkoorde op het ψ-vlak aanwezig is. Wordt bij die temperatuur slechts *eene* barotropische raakkoorde gevonden, dan zal dit er op wijzen (Meded. N°. 96*b* p. 510), dat voor de mengsels dier stoffen $T_{bpls} > 0.65\ T_{kH_2}$, en derhalve volgens deze tabel $T_{kHe} < 0.09\ T_{kH_2}$, terwijl dan het gevonden belangrijke verschil in samenstelling tusschen de gas- en vloeistofphase (zie Noot 2, p. 655) aanduidt, dat T_{bpls} nog vrij wat hooger, en dus T_{kHe} nog vrij wat lager (vermoedelijk $<$ ongeveer 2°) zou moeten liggen [2]). Van deze uitkomst werd bij de behandeling van de schatting der kritische temperatuur van He in Meded. N°. 96*b* gebruik gemaakt.

(Wordt vervolgd).

---

[1]) Verg. Meded. No. 75 (Nov. '01), 79 (Maart '02), 81 (Juni, Sept. '02), Suppl. No. 6 (Febr., Mei '03).

[2]) Neemt men b_{11}/b_{22} grooter dan $^1/_8$ (verg. Noot 2, p. 655), dan wordt ook hierdoor de bovenste grens voor T_{kHe} bij de genoemde onderstelling kleiner. Men ziet dit in als men met tabel I vergelijkt, dat men voor $b_{22}/b_{11} = ^1/_4$: $T_{bpl}/T_{k_1} = 0.679$ verkrijgt bij $T_{k_2}/T_{k_1} = 0.075$.

Natuurkunde. — De heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement 14, bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES: „*Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS, *XIV, Grafische afleiding der uitkomsten van* KUENEN's *proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule.*"

§ 1. *Inleiding.* In het volgende hebben wij beproefd, het gedrag der mengsels van N_2O en C_2H_6 (mengsels van het IIe type), [1]) dat door de proeven van KUENEN [2]) bekend is geworden, in eerste benadering quantitatief met behulp van het vrije-energievlak van VAN DER WAALS af te leiden. De ten behoeve daarvan geconstrueerde ψ-vlakken (zie pl. I) zijn de tegenhangers van die, welke in Mededeeling N°. 59 (Zittingsv. Juni 1900) en Med. N°. 64 [3]) ter afleiding der uitkomsten van KUENEN's en HARTMAN's proeven over mengsels van CO_2 en CH_3Cl (mengsels van het Ie type), werden geconstrueerd. Wij zijn bij de grafische behandeling [4]) van ons vraagstuk hoofdzakelijk te werk gegaan als in Med. N°. 59, waar aan KUENENS bepalingen de kritische temperatuur en druk van eenige mengsels ontleend werden, en dan, met behulp van de theorie van VAN DER WAALS, de uitkomsten van een andere groep van proeven — die, betreffende de coëxistentievoorwaarden van twee phasen bij een bepaalde temperatuur — zijn afgeleid.

KUENEN's uitkomsten voor N_2O en C_2H_6 zijn in hoofdzaak neergelegd in 4 figuren [5]); een daarvan geeft de kritische grootheden van welke wij bij onze afleiding zullen uitgaan, en de grenslijnen voor mengsels van verschillend gehalte; de drie anderen, welke de *xv*-projectie van de connode met de connodale- of raakkoorden bij de temperaturen 20° C, 25° C, 26° C voorstellen, doen het samentrekken der dwarsplooi bij het stijgen der temperatuur, en eindelijk hare splitsing in twee plooien in het licht treden.

Wij hebben gemeend tot een betere vergelijking van waarneming en berekening te kunnen komen, wanneer wij de waarnemingen, in plaats van door de *xv* figuren bij de zooeven genoemde tempera-

[1]) HARTMAN, Leiden Comm. Suppl. no. 3, p. 11.

[2]) KUENEN, Leiden Comm. no. 16. Phil. Mag. 40, p. 173, 1895, vergel. ook KAMERLINGH ONNES en ZAKRZEWSKI, Leiden Comm. Suppl. no. 8. (Zittingv. Febr. 1904).

[3]) Arch. Neerl. Serie II, Tome V, p. 636.

[4]) Grafische oplossing voor bepaalde gevallen is hier alleen mogelijk. (Verg. Suppl. 8, Zittingsversl. Febr. 1904. § 1).

[5]) Waar het noodig was, zijn KUENENS figuren volgens de door hem opgegeven waarnemingsresultaten verbeterd.

turen en de pT-figuur, door xv figuren voor 5° C. 20° C. en 26° C. en de pT-figuur, voorstellen ——.

§ 2. *Grondslagen der berekening. Wet der overeenstemmende toestanden en gereduceerde toestandsvergelijking.* Wij gaan (verg. Suppl. n°. 8, Zittingsversl. Febr. 1904 § 1) uit van de onderstelling dat de wet der overeenstemmende toestanden — althans binnen het gebied der waarnemingen — geldt, zoowel voor C_2H_6 en N_2O als voor hunne mengsels. Als gereduceerde toestandsvergelijking werd gekozen V. s 1. van Med. n°. 74 [1]) blz. 12. Deze toch is voor een gebied van gereduceerde temperatuur en druk, dat het gebied, hetwelk overeenkomt met dat der te behandelen waarnemingen, insluit, zoo na mogelijk aangesloten aan CO^2, hetwelk in thermische eigenschappen dicht bij N_2O staat, terwijl er geen grond is om te vermoeden, dat dat met C_2H_6 niet het geval zal zijn.

Bij de toepassing doet zich echter deze moeilijkheid voor, dat V. s 1. van de waarnemingen omtrent CO^2 juist in de nabijheid van den kritischen toestand het sterkst afwijkt. (Zie Med. N°. 74 en later Keesom, Med. N°. 88.). Zoekt men uit V-s. 1. [2]) het punt, waarvoor

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0 ,$$

zoo vindt men $t = 1.010595$, $\lambda v = 1.0407.10^{-3}$, $p = 1{,}06566$. De waarnemingen van Keesom, Med. n°. 88, geven voor het kritisch volumen, wanneer dit door toepassing van den regel van den rechtlijnigen diameter gezocht wordt, bij CO_2,

$$v_k = 0.00418 \text{ en voor } \lambda = \frac{p_k v_k}{T_k} = 1.0027 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Men vindt dan

$$t_k = 1.010595 \text{ in plaats van } t_k = 1$$
$$v_k = 1.0379 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad v_k = 1$$
$$p_k = 1.06566 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad p_k = 1.$$

De isothermen, uit welke V. s. 1., door de berekening der viriaalcoëfficiënten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, enz. (Zie med. n°. 71, Zittingsversl. Juni 1901) is afgeleid, geven dus, door interpolatie volgens deze rekenwijze, een kritischen toestand, die, in het pv diagram geteekend, verschoven is ten opzichte van dien, welke door onmiddellijke waarneming gevonden wordt, en wel is de kritische temperatuur volgens V. s. 1, $t_k T_k$ als T_k is de waargenomen kritische temperatuur.

---

[1]) Arch. Neerl. Vol. Jubil. Bosscha. Serie II, tome 6, 1901.

[2]) Bij de berekeningen is T voor het vriespunt van water 273°,04 gesteld, omdat V. s. 1 met deze waarde berekend werd.

Evenzoo zijn ook de waarden, die voor $\mathfrak{p}_{max.}$ $\mathfrak{v}_{liq.}$ en $\mathfrak{v}_{vap.}$ bij $\mathfrak{t}$ door toepassing van het criterium van MAXWELL gevonden worden, anders dan die, welke men zou vinden, door $p_{max.}$ te deelen door p_x, $v_{liq.}$ en $v_{vap.}$ door v_x. De afwijkingen zijn van dezelfde orde, als de afwijkingen der stoffen onderling, wanneer zij door de wet der overeenstemmende toestanden worden vergeleken. Zij zijn bij $\mathfrak{t} = 0{,}9$ nagenoeg nul, doch groeien aan, naarmate men den kritischen toestand nadert, zoodat de afwijkingen met een geleidelijke vervorming van het isothermennet overeenkomen. Over de afwijkingen in de bij elkaar behoorende waarden, geeft de volgende tabel een oordeel.
Kolom A heeft betrekking op V.s. 1 en implicite op p_k, T_k van CO_2
„ B „ „ „ de waarnemingen van CO_2
„ C „ „ „ „ „ „ N_2O.

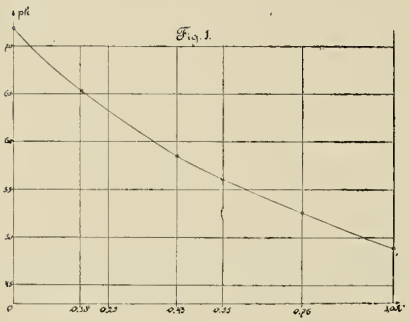
A		B		C	
t	$\mathfrak{p}$	t	$\mathfrak{p}$	t	$\mathfrak{p}$
1.0106	1.066				
		1.	1.	1.	1.
0.975	0.826	0.975	0.845	0.975	0.854
0.950	0.695	0.950	0.709	0.950	0.720
		0.925	0.589	0.925	0.599
0.900	0.490	0.900	0.494	0.900	0.486

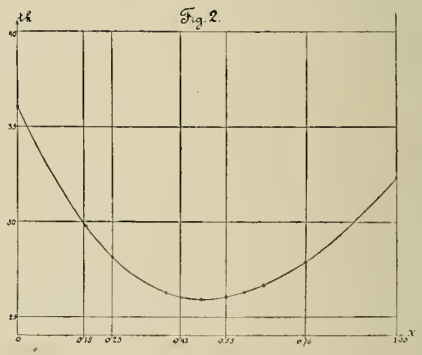
In de nabijheid van de kritische temperatuur worden de verschijnselen beheerscht door het verschil van de temperatuur van waarneming en de kritische temperatuur, $T - T_k$; daarom hebben wij voor de vergelijking van de waarnemingen bij een bepaalde temperatuur T met de berekening voor de laatste een zoodanige temperatuur T' gekozen, dat $T_k - T = \mathfrak{t}T_k - T'$.

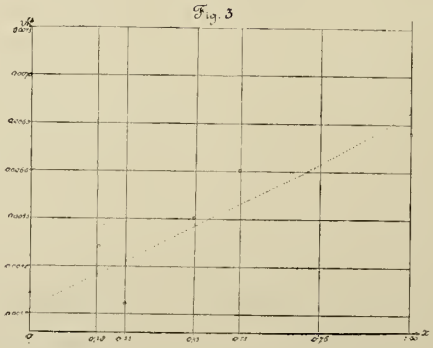
Noemen we in het algemeen de aan $\mathfrak{t} = \frac{T}{T_k}$ aangebrachte correctie $= \Delta\,\mathfrak{t}$, dan is $\Delta\,\mathfrak{t} = 0.0106\,\theta$, als $\theta = 10\,(\mathfrak{t} - 0{,}9)$ voor $0 < \theta < 1$, terwijl $\Delta\,\mathfrak{t} = 0$ voor alle andere waarden van θ. Met de correctie $\Delta\,\mathfrak{t}$ aan $\mathfrak{t}$ hebben wij gepaard doen gaan een correctie $\Delta\mathfrak{v}$ aan $\mathfrak{v}$ en $\angle\mathfrak{p}$ aan $\mathfrak{p}$, zoodat $\angle\mathfrak{p} = 0.0657\,\theta$ en $\Delta\mathfrak{v} = 0.0379\,\theta$, die samen een gelijkmatig aangroeien der correcties van $\mathfrak{t} = 0{,}9$ af tot den kritischen toestand voorstellen. Voor het detail model van het ψ-vlak voor 26°, waarop slechts het gedeelte van $x = 0{,}35$ tot $x = 0{,}65$

werd afgebeeld, gebruikten wij overal dezelfde correctie en wel $\Delta t = 0.0106$ $\Delta p = 0{,}0657$ $\Delta v = 0{,}0379$.

§ 3. *Kritische grootheden voor de mengsels.* Door KUENEN zijn voor eenige mengsels met het moleculairgehalte x de plooipunten T_{px}, p_{px}, v_{px}, bepaald. T_{rx}, p_{rx}, v_{rx}, de kritische raakpunten, en T_{kx}, p_{kx}, v_{kx}, de kritische toestanden der ongesplitste mengels, verschillen van deze zóo weinig[1]), dat dit voor ons doel verwaarloosd mag worden, en zij dan tevens van de door KUENEN onderzochte mengsels bekend zijn.







De kritische grootheden voor de andere mengsels werden door grafische interpolatie gevonden. Fig. 1 geeft p_{kx}, fig. 2 T_{kx} als functie van x; in fig. 3 is v_{kx} met behulp van λ (zie formule (1)) berekend uit p_{kx} en T_{kx}, tevens zijn daarbij aangegeven de door KUENEN waargenomen v_{kx}.

Door de constructie voor de connode met behulp der p, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ en $\psi - x\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - v\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ lijnen (zie Med. n°. 59*a*), die de modellen voor die verschillende temperaturen leveren, uit te voeren, kan men $v_{kx} - v_{pl.x}$,

[1]) Uitvoerig is dit behandeld door VAN DER WAALS, Cont. II, § 11.

$p_{kx} - p_{pl.x}$ in eerste benadering afleiden (zie Med. n°. 59*a*). Met behulp van deze correcties zou men dan de berekening van den aanvang af te herhalen hebben, om juister waarden voor v_{kx}, p_{kx} te vinden. Wij hebben ons bij al onze constructies tot een eerste benadering bepaald, daar ook een nadere verbetering der toestandsvergelijking V.s. 1., die de in § 2 genoemde afwijkingen kan opheffen, niet is aangebracht, en waren daartoe temeer gerechtigd, daar deze laatste afwijkingen grooter zijn dan die, welke wij thans op het oog hebben.

§ 4. *Constructie van de ψ-vlakken.*

Men vindt uit de toestandsvergelijking V. s. 1 onmiddellijk de gereduceerde ψ_{xT} lijnen, welke dan, volgens Med. Suppl. n° 8, § 4, omgerekend worden tot gewone ψ-lijnen; of wel, de gewone viriaalcoëfficiënten die dan voor berekening van ψ volgens Med. N°. 59 gebruikt worden.

Voor de constructie werd (vergelijk Med. 59) gebruik gemaakt van:

bij 5° $\quad \psi'_5 = \psi + 0{,}10\,x + 25\,v$

„ 20° $\quad \psi'_{20} = \psi + 0{,}10\,x + 36{,}5\,v$

„ 26° $\quad \psi'_{26} = \psi + 0{,}24\,x + 57{,}3\,v,$

terwijl van elke ψ nog een passende constante werd afgetrokken. V. is hierbij, evenals in de teekeningen, uitgedrukt in het theoretisch normaal-volumen. Uit de ψ_{xT} lijnen (verg. fig. 1, pl. II), werden de ψ_{vT} lijnen (zie fig. 2, pl. II) en de p_T lijnen, grafisch afgeleid. De modellen voor ψ werden geconstrueerd op 5 maal grootere schaal dan de teekeningen op pl. II, pl. III en pl. IV.

§ 5. *Bepaling der coëxisteerende phasen.*

Toegepast werd zoowel de constructie door het rollen van een glasplaat op het model, welke de connode en de raakkoorden levert, als de, in Suppl. n° 8, § 7 gegeven vereenvoudigde constructie in het platte vlak, waarbij nog een kleine correctie werd aangebracht. Nadat n.l. een voorloopige connode, die der ongesplitst gedachte mengsels, gevonden is door de lijnen van dubbelaanraking aan de ψ_{xT}-lijnen te trekken, en bij eenige punten a op den vloeistoftak dier connode, toegevoegde punten b op den gastak te bepalen, zoodat telkens voor beide aan elkaar toegevoegde punten $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ dezelfde is, worden de lijnen, die deze punten a en b twee aan twee verbinden, buiten de voorloopige connode doorgetrokken, totdat zij de druklijnen, die door a gaan, snijden in punten c, die samen den gezochten gastak der connode voorstellen; c en a worden dan als bij elkaar hoorende punten be-

schouwd. Bij het ψ-vlak voor 5° C. leverden beide constructies, zoowel wat de koorden als de connode zelf betreft, vrijwel overeenstemmende uitkomsten op, zooals blijkt uit pl. II fig. 4, waar met — — — — de door rollen van een glasplaat op het model, met —.—.—.— de door de zooeven genoemde constructie gevonden connode en connodale raakkoorden aangegeven zijn. Dat de vereenvoudigde constructie, die in het bijzonder is ontworpen voor evenwichten ver beneden de kritische temperatuur (zie Suppl. n° 8, § 7) nog tot het doel voert, is waarschijnlijk daaraan toe te schrijven, dat wij hier met een mengsel van het IIde type te doen hebben.

Bij het ψ-vlak voor 20° maakte de geringe diepte der plooi het noodig de lengteschaal voor de v-coördinaat van het model belangrijk te verkleinen. Door die samendrukking (verg. pl. I, fig. 2) kwam de plooi voldoende tot uitdrukking om door het rollen van een glasplaat de connode en de ligging der connodale raakkoorden te bepalen. Door de vereenvoudigde constructie was nog wel de connode te verkrijgen, maar de bepaling van de raakkoorden werd onzeker.

Bij het ψ-vlak van 26° wordt de diepte der plooi (hier in tweeën geplitst), zoo bijzonder gering, dat zij eerst bij een berekening met 7 decimalen te voorschijn komt, en dan nog schuilt zij bijna geheel in de laatste twee decimalen. Het is dan ook niet mogelijk een ψ'-vlak (wij bedoelen, een uit het ψ-vlak afgeleid oppervlak, waarop de coëxisteerende phasen nog door het rollen van een plat vlak gevonden worden) te modelleeren, waarop deze plooi zichtbaar is, en ook helpt het niet, wanneer men zich tot een klein deel van het vlak bepaalt, omdat de kromming juist zeer sterk is daar, waar iets belangrijks zou kunnen worden toegelicht. Het bepalen der connode en der connodale raakkoorden door constructie volgens § 8 van Med. N°. 59a, welke altijd moet kunnen worden uitgevoerd, mits men maar genoeg decimalen in rekening brengt, bleef met 7 decimalen ook nog onzeker, zoodat wij deze niet verder hebben vervolgd. Het afgebeelde deel van het ψ-vlak voor 26° van $x = 0.35$ tot $x = 0{,}65$ en $v = 0.0038$ tot $v = 0.0070$, wordt dan ook door ons meer gegeven om aan te toonen van hoe bijzonder kleine invloeden een plooi afhankelijk moet zijn en hoeveel zorg het dan moet kosten om experimenteel een plooi te bepalen, die op het oppervlak in het geheel niet te zien is. De op het oppervlak getrokken lijnen, die op de plooi betrekking hebben, werden langs omwegen, gedeeltelijk door constructie, gedeeltelijk door berekening, gevonden. Om de modellen gemakkelijker onderling te kunnen vergelijken is op het model voor 5° aangeteekend het gebied van x en v, waarover het model

voor 20° en dat voor 26° zich uitstrekt, op het model voor 20° dat voor 26°.

§ 6. *Nadere opmerkingen omtrent de verschillende door constructie verkregen modellen en teekeningen.*

a. Het ψ'-vlak voor 5°. Het model, pl. I, fig. 1, en de teekeningen, pl. II, fig. 1, 2 en 3 vertoonen de lijnen van gelijk gehalte, ψ'_{xT}, gelijk volumen en gelijken druk, de connode en de connodale raakkoorden. Daar $-\frac{\partial\psi'}{\partial v} = p - 25$ is, worden enkele drukkingen door negatieve hellingen op het stabiele deel van het ψ'-vlak voorgesteld, waardoor het karakter van dit ψ'-vlak dat van het ψ-vlak, waar al de hellingen positief zijn, niet onmiddellijk uitdrukt. Een connodale raakkoorde, dicht bij het maximum druk-gehalte, raakt bijna aan de ψ_x-lijn. Bij het maximum druk-gehalte zou dit juist het geval zijn. De druklijnen zijn in de projectie op het $x\,v$-vlak (Pl. II, fig. 3), evenals de connodale raakkoorden, met volle lijnen geteekend, de connode is met —.—.—. aangegeven.

Bij de druklijnen [1]) zijn verschillende eigenaardigheden op te merken, op welke VAN DER WAALS in zijn theorie der ternaire mengsels [2]) gewezen heeft. De druklijn die de connode aan de vloeistof en dampzijde raakt, behoort bij den druk $p = 36{,}6$, die voor het ongesplitste mengsel van maximum druk wordt gevonden. De druklijn π bepaalt den overgang tusschen de doorloopende (met inachtneming van het gebied buiten de teekening) en de in twee takken gesplitste druklijnen. De naar P wijzende uitloopers der doorloopende druklijnen, hebben elk, ter weerzijden van den top, een buigpunt. De loop der lijnen $\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial x} = 0$ en $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ is als door VAN DER WAALS aangegeven [3]).

---

[1]) Vergelijk de schéts bij HARTMAN, Leiden Comm., Suppl. n°. 3, pl. II, fig. 5.

[2]) Zittingsversl. Maart 1902, p. 665.

[3]) Prof. VAN DER WAALS had de vriendelijkheid ons opmerkzaam te maken op een eigenschap, die in de figuur nog tot uitdrukking had kunnen komen, wanneer ook de lijn voor $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^2\partial x} = 0$ geteekend was, nl. dat het minimumvolumen in den damptak, en het maximumvolumen in den vloeistoftak, liggen op de lijn $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^2\partial x} = 0$, die een dergelijk beloop heeft als de $\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial x} = 0$ lijn, in het bijzonder dezelfde asymptoten heeft, en er alleen van afwijkt, doordat bij grootere dichtheid de lijn over grootere volumes loopt.

De snijpunten dezer beide lijnen zijn het isopiesten centrum Q en het dubbelpunt der druklijn π, P.

b. Het ψ'-vlak voor 20°. Fig. 1, pl. III geeft de ψ_{xT}-lijnen en de connode. Fig 2, pl. III de ψ_{vT}-lijnen en de connode. Fig. 3 geeft de projectie op het $x\,v$-vlak van de connode, der raakkoorden, en van eenige druklijnen. De connode is door —.—.— aangegeven. Pl. I, fig. 2 geeft eene afbeelding van het model.

c. Het ψ'-vlak voor 26°. Fig. 1 pl. IV geeft de ψ_{xT}-lijnen, Fig. 2 pl. IV geeft de kritische toestanden, K_1 en K_2, de druklijnen en de connoden voor de ongesplitste mengsels —.—.—., van welke de gastak zoowel als de vloeistoftak nagenoeg een rechte lijn is. Tusschen plooipunt x_{Tp} en kritisch punt van het ongesplitste mengsel x_{Tk} is thans — ofschoon bij de berekeningen (zie § 2) de punten samenvallend gesteld zijn — een afstand aangegeven die door schatting bepaald is [1]). De gestippelde parabool is ontleend aan de ontwikkeling van VERSCHAFFELT, Suppl. N°. 7, blz. 7, ofschoon deze eigenlijk alleen geldig is voor het geval, dat de maximumdruk in P_1 of P_2 valt; de verder doorgetrokken connode geeft bij benadering den vermoedelijken loop van dit deel der connode aan. Terwijl dit alles betrekking heeft op een klein gebied van x en v geeft fig. 3, pl. IV in —.—.—.—. de connode volgens de constructie voor ongesplitste mengsels over de geheele breedte van het ψ'-vlak. Het getrokken vierkant geeft de uitgebreidheid van het zooeven behandelde deel van het ψ'-vlak aan.

d. Het samentrekken en het daaropvolgend zich splitsen der plooi blijkt uit fig. 4 Pl. IV, waar de xv-projecties der connode en eenige connodale raakkoorden van de drie modellen op dezelfde schaal zijn geteekend naar de onder *a b c* genoemde xv-figuren voor 5°, 20° en 26°.

§ 7 *Vergelijking van de constructie met de waarneming.* Deze is over het geheel, in aanmerking genomen de graad van benadering, zeer bevredigend.

a. In pl. II fig. 4 is de figuur voor de plooi bij 5°, die de waarnemingen van KUENEN weergeeft, met doorloopende lijnen geteekend. De figuur bevat tevens de door constructie verkregene. De enkele waarnemingen zijn met ⊡ aangeduid (zie § 6*a*). Behalve de constructie met het model met — — — — en met $\overline{\vee}$ aangeduid, geven ook de vereenvoudigde constructies in het platte vlak, met —.—.—

[1]) De uitbeelding van de plooi moet hier in strijd komen met de theorie, of met de, bij den grondslag der berekening ingevoerde vereenvoudiging. Met het oog op de toelichting van de theorie door de figuren, hebben wij dit laatste verkozen.

De snijpunten dezer beide lijnen zijn het isopiesten centrum Q en het dubbelpunt der druklijn π, P.

b. Het ψ'-vlak voor 20°. Fig. 1, pl. III geeft de ψ_{xT}-lijnen en de connode. Fig 2, pl. III de ψ_{vT}-lijnen en de connode. Fig. 3 geeft de projectie op het xv-vlak van de connode, der raakkoorden, en van eenige druklijnen. De connode is door —.—.— aangegeven. Pl. I, fig. 2 geeft eene afbeelding van het model.

c. Het ψ'-vlak voor 26°. Fig. 1 pl. IV geeft de ψ_{xT}-lijnen, Fig. 2 pl. IV geeft de kritische toestanden, K_1 en K_2, de druklijnen en de connoden voor de ongesplitste mengsels —.—.—., van welke de gastak zoowel als de vloeistoftak nagenoeg een rechte lijn is. Tusschen plooipunt x_{Tp} en kritisch punt van het ongesplitste mengsel x_{Tk} is thans — ofschoon bij de berekeningen (zie § 2) de punten samenvallend gesteld zijn — een afstand aangegeven die door schatting bepaald is [1]). De gestippelde parabool is ontleend aan de ontwikkeling van VERSCHAFFELT, Suppl. N°. 7, blz. 7, ofschoon deze eigenlijk alleen geldig is voor het geval, dat de maximumdruk in P_1 of P_2 valt; de verder doorgetrokken connode geeft bij benadering den vermoedelijken loop van dit deel der connode aan. Terwijl dit alles betrekking heeft op een klein gebied van x en v geeft fig. 3, pl. IV in —.—.—.—. de connode volgens de constructie voor ongesplitste mengsels over de geheele breedte van het ψ'-vlak. Het getrokken vierkant geeft de uitgebreidheid van het zooeven behandelde deel van het ψ'-vlak aan.

d. Het samentrekken en het daaropvolgend zich splitsen der plooi blijkt uit fig. 4 Pl. IV, waar de xv-projecties der connode en eenige connodale raakkoorden van de drie modellen op dezelfde schaal zijn geteekend naar de onder *a b c* genoemde xv-figuren voor 5°, 20° en 26°.

§ 7 *Vergelijking van de constructie met de waarneming.* Deze is over het geheel, in aanmerking genomen de graad van benadering, zeer bevredigend.

a. In pl. II fig. 4 is de figuur voor de plooi bij 5°, die de waarnemingen van KUENEN weergeeft, met doorloopende lijnen geteekend. De figuur bevat tevens de door constructie verkregene. De enkele waarnemingen zijn met ⊡ aangeduid (zie § 6*a*). Behalve de constructie met het model met — — — — en met $\overline{\vee}$ aangeduid, geven ook de vereenvoudigde constructies in het platte vlak, met —.—.—

[1]) De uitbeelding van de plooi moet hier in strijd komen met de theorie, of met de, bij den grondslag der berekening ingevoerde vereenvoudiging. Met het oog op de toelichting van de theorie door de figuren, hebben wij dit laatste verkozen.

H. KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule.

Plaat I.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

H KAMERLINGH ONNES en Mej. T. C. JOLLES. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. Plaat II.

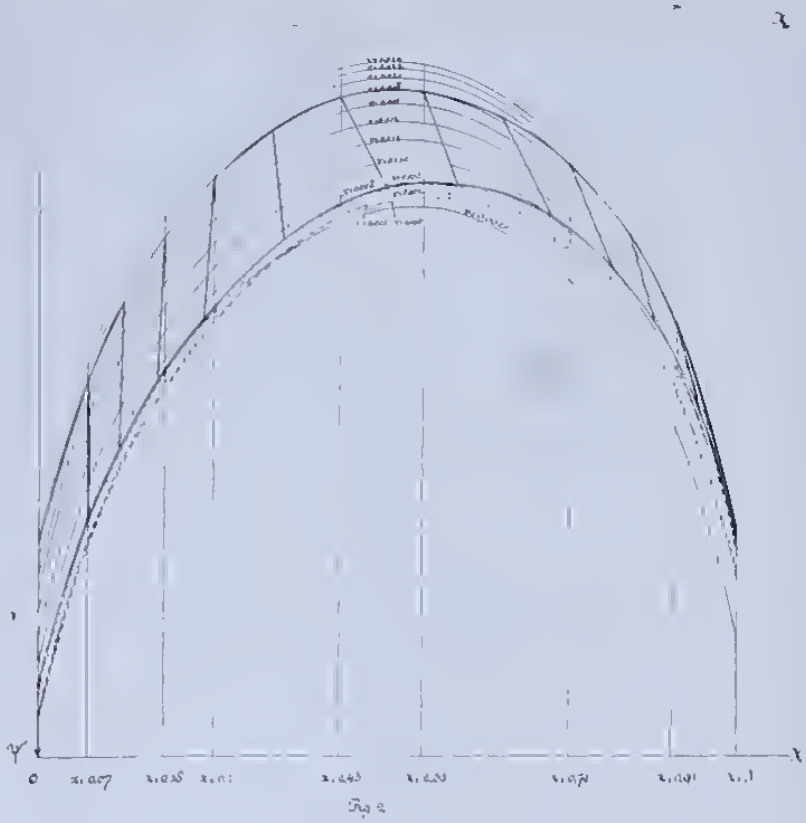


Fig 2

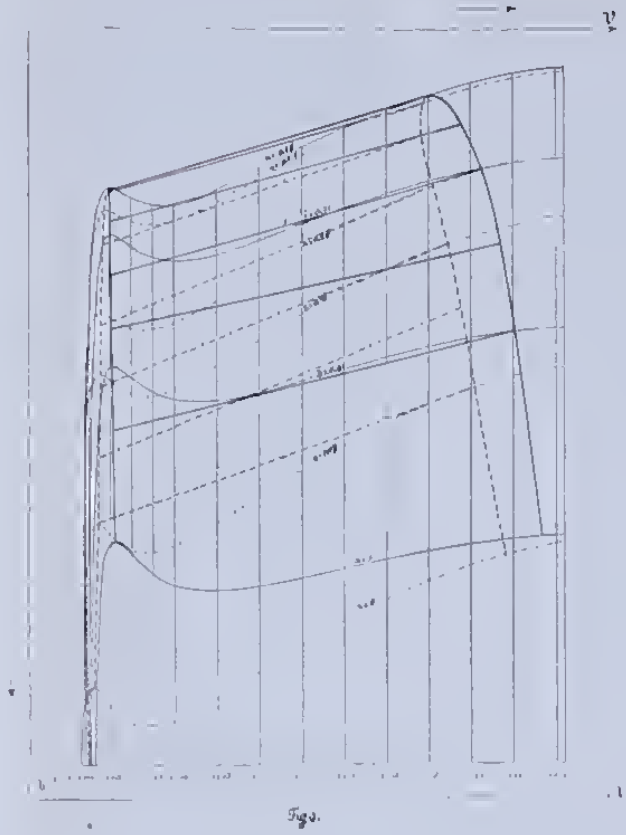


Fig 3.

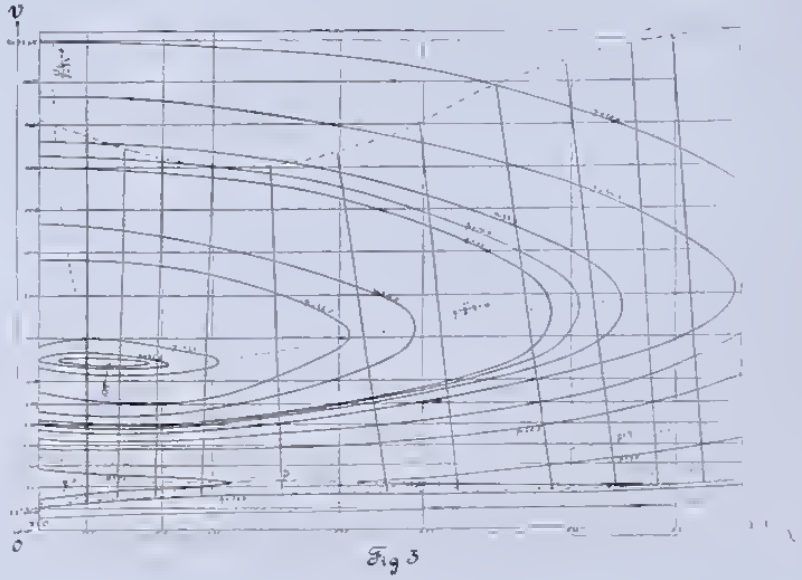


Fig 3

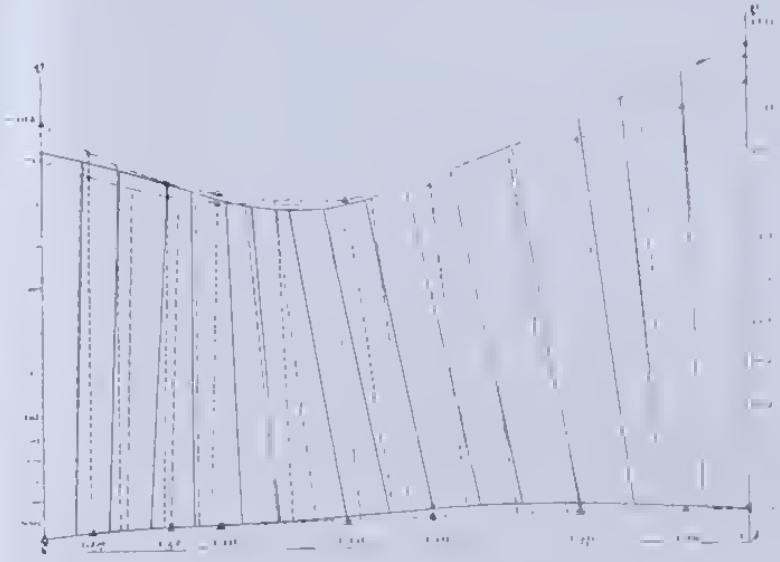


Fig. 4.

H. KA
XIV

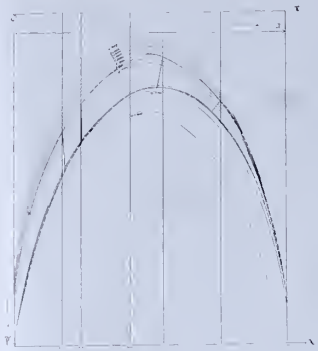


Fig 2

Fig. 1.

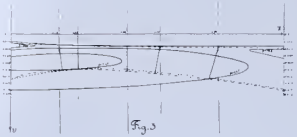


Fig. 3

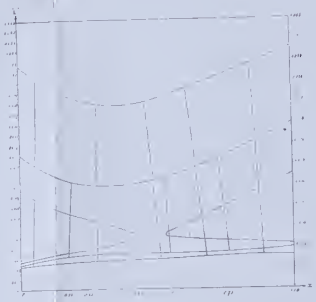


Fig. 4.

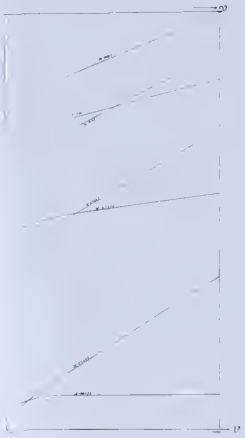


Fig. 1.

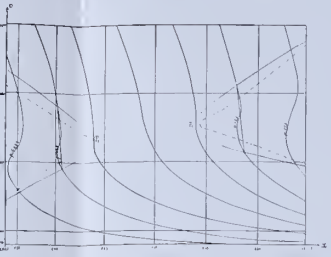


Fig. 2.

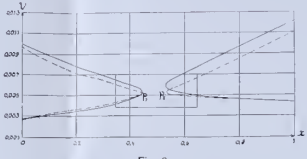


Fig. 3.

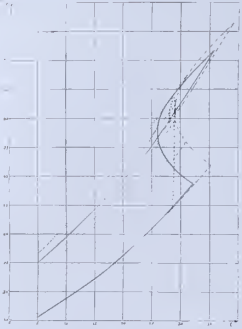


Fig. 5.

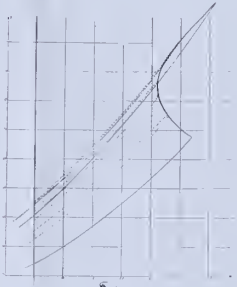


Fig. 4.

en met ⊙ aangeduid en waarvan de buitenste betrekking heeft op de minder eenvoudige constructie, het karakter en ook de numerieke waarde voldoende weer.

b. In pl. III, fig. 3 is de figuur die de waarnemingen van KUENEN voor de plooi van 20° weergeeft met — — — — aangegeven. De figuur bevat tevens de —.—.—., die door constructie op het model verkregen zijn (zie § 6*b*). De aansluiting bij $x = 0.3$ is het slechtst, wat ongetwijfeld samenhangt daarmee, dat wij hier reeds zeer dicht bij de kritische temperatuur komen, en dat aan T' (zie § 2) strikt genomen voor alle x verschillende waarden moesten worden gegeven en overeenstemmende Δv en Δp in rekening moesten worden gebracht.

c. In pl. IV fig. 3 is de figuur, die de waarnemingen van KUENEN weergeeft, met volgetrokken lijnen aangegeven; de figuur bevat tevens de in § 6*c* afgeleide figuur met —.—.— lijnen.

d. Plaat IV fig. 4 en 5 dienen ter vergelijking van KUENEN's pT figuur (fig. 4) met de door constructie afgeleide (fig. 5). Voor 26° is in overeenstemming met de opmerking over T' in § 2, als volgt te werk gegaan:

Voor 5° en 20° zijn eenvoudig de waarden van p en T' ontleend aan de constructie met het model, onder a en b genoemd. Daarop werden α) uitgezet de p's en T''s, verkregen door de p_k en T_k van KUENEN te vermenigvuldigen met $\mathfrak{p}_k$ en t_k (zie § 2); β) voor de verschillende waarden van x werden verder berekend de waarden van T' en van θ voor de temp. van 26° en met deze θ weder Δt en $\Delta \mathfrak{p}$ volgens § 2 bepaald; de op deze wijze gecorrigeerde waarden van p en T' zijn als + + + uitgezet en door —.—.—.— lijnen verbonden met de onder α) genoemde punten. De volgetrokken en gestippelde lijnen geven de gecorrigeerde waarden aan. Tusschen de gedeelten, voor de bepaling van welke van de kritische temperatuur is uitgegaan en de uit de modellen van 5° en 20° afgeleide pT'-lijnen is een open ruimte gelaten.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 97*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Reductie van de aflezingen van den waterstofthermometer van constant volume op de absolute schaal."*

§ 1. *Inleiding.*

Daar men zuiver helium nog zeer mocielijk en zuivere waterstof zeer wel verkrijgen kan (verg. Med. N°. 94*f*, Juni 1906), is de schaal van den normalen waterstofthermometer (die bij constant volume onder een druk van 1000 m.M. kwik bij 0°) voorloopig nog, evenals toen zij (1896) in de eerste Mededeeling (N°. 27) over de meting van lage temperaturen te Leiden als grondslag daarvan vermeld werd, de meest geschikte temperatuurschaal om lage temperaturen tot —259° ondubbelzinnig te bepalen met getalwaarden, die dichter dan die op een andere schaal komen bij de aflezingen op de absolute schaal. Het is daarom van groot belang de correcties te kennen, met welke men van de normale waterstofschaal op de absolute overgaat.

Zooals bekend is kunnen zij voor een bepaald gebied van temperaturen berekend worden, wanneer de toestandsvergelijking voor dit temperatuurgebied bij ongeveer normale dichtheid bepaald is. Tot nog toe heeft men zich bij die berekening voor den waterstofthermometer beneden 0° beholpen met toestandsvergelijkingen van waterstof, die langs theoretischen weg verkregen waren. BERTHELOT [1]) leidt deze door middel van de wet der overeenstemmende toestanden af uit experimenteel bepaalde gegevens van andere stoffen in hetzelfde gebied van gereduceerde temperatuur. CALLENDAR [2]) wijzigt de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS zoo, dat zij geschikt wordt om de uitkomsten der proeven van JOULE—KELVIN voor lucht- en stikstof nevens die voor waterstof tusschen 0° en 100° weer te geven, en onderstelt dat een zelfde vorm van vergelijking ook voor waterstof buiten dit gebied geldt. In hoofdzaak komt dit neer op de toepassing van de wet der overeenstemmende toestanden al is het dan op een beperkte groep van stoffen. Zijn dergelijke theoretische correcties, als door BERTHELOT en CALLENDAR gegeven zijn, al een zeer welkom middel om ons te behelpen bij gebrek aan andere gegevens [3]) zoo bleef toch een experimenteele bepaling dier correcties noodig.

[1]) Sur les thermomètres à gaz, Travaux et Mémoires du Bureau International, T. XIII.

[2]) Phil. Mag. [6] 5, 1903.

[3]) De isotherme-bepalingen van WROBLESWKI bij het kookpunt van ethyleen en zuurstof zijn voor dit doel niet nauwkeurig genoeg. Bij de uitkomsten voor de laatste temperatuur gevonden valt dit terstond in het oog door de onregelmatige ligging

Wij hebben deze in het volgende verkregen door gebruik te maken van de door ons in Med. N°. 97^a gegeven isothermen van waterstof tusschen —104° C. en —217° C.

Voor de berekening dezer correcties bij een bepaalde temperatuur zou men kunnen uitgaan van de individueele viriaalcoëfficienten in de reeksontwikkeling der toestandsvergelijking, (verg. Med. N°. 71, 1901) die wij in § 12 van Mededeeling N°. 97^a hebben afgeleid. De zoo verkregen uitkomsten vertoonen inderdaad een regelmatig verloop [1]), niettegenstaande het geringe aantal punten op de isothermen.

Wij wenschten echter eerst de uitkomsten der afzonderlijke isothermen door algemeene temperatuurformules te vereffenen. Hiertoe te geraken door aansluiting aan een der in gesloten vorm opgestelde toestandsvergelijkingen is zoowel in dit geval als in het algemeen zeer moeielijk. Bijzonder geschikt voor een dergelijk doel is de reeds meermalen genoemde algemeene reeksontwikkeling (strenger gezegd, ontwikkeling in een polynoom). Wij kozen hiervoor den vorm VII. 1 (verg. de noot bij § 12 van Med. N°. 97^a). De vereffening geschiedt door voor elke isotherme wijzigingen in B en C, ΔB en ΔC, die wij individueele ΔB en ΔC noemen, uit te rekenen met een benaderde waarde van de correctie op de absolute schaal, daarna de waarden van ΔC door een algemeene temperatuurformule voor te stellen en door opeenvolgende benadering nieuwe waarden voor ΔB te berekenen zoodanig, dat de waarde voor de correctie op de absolute schaal overeenkomt met de aangenomen waarde van T. Ten slotte werden ook de waarden van ΔB door een algemeene temperatuurformule voorgesteld.

Stelt men de met behulp van deze correcties verkregen nieuwe waarden van B en C, welke *speciale* waarden wij aanduiden door VII. 1. H_2. 1 in het toestandspolynoom, zoo geeft dit tevens de isothermebepalingen van Med. N°. 70 bij 20° zeer bevredigend weer en die van Med. N°. 78 bij 0° en 20° bij benadering.

---

der punten op de isotherme. De uitkomsten bij het kookpunt van ethyleen verkregen geven meer overeenstemmende resultaten. Toch zou hieruit een correctie op de absolute schaal volgen, die het verkeerde teeken heeft, n.l. — 0°.07.

Door Travers is bij de temperatuur van vloeibare lucht het verschil van de aanwijzingen van den waterstofthermometer van constant volume en constanten druk waargenomen, waaruit men ook de correcties tot de absolute schaal voor deze temperaturen kan afleiden. Het valt in het oog dat deze afleiding niet zeer betrouwbaar kan zijn.

Verder kunnen thans (zie § 1 van Med. N°. 97^a) gegevens ontleend worden aan de bepalingen van Witkowski over de uitzetting van waterstof bij lage temperaturen; deze zullen in een volgende Mededeeling worden gediscussieerd.

[1]) Alleen de isotherme van — 135°.71 geeft een afwijkend resultaat. (Zie hierover het slot van § 12 van vorige Mededeeling).

Door middel van deze algemeene uitdrukkingen zijn de reducties op de absolute schaal uitgevoerd.

Er bestaat, wanneer B en C bekend zijn, nog een andere weg om uit de waarnemingen met den waterstofthermometer de absolute temperatuur af te leiden, dan door het aanbrengen van correcties, die van de waterstofschaal tot de absolute temperatuurschaal voeren. Men kan n.l. bij de berekening van de temperatuur uit de waarnemingen terstond in aanmerking nemen, dat het thermometergas niet de wet van Boyle-Charles volgt, doch dat druk en volume samenhangen, zooals door de reeksontwikkeling met de gecorrigeerde waarden van B en C wordt aangegeven. De formule, welke hiertoe kan dienen, is gegeven in § 5.

§ 2. *Reductie van de aflezingen van den waterstofthermometer van constant volume tot de absolute temperatuurschaal.*

Is v het volume van het gas in den thermometer, uitgedrukt in het theoretisch normaalvolume, p de druk in atmosferen, T de absolute temperatuur, dan kan men de toestandsvergelijking voor het thermometergas schrijven in den vorm:

$$pv = A_T \left(1 + \frac{B'_T}{v} + \frac{C'_T}{v^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij stellen verder:

t de temperatuur op de schaal van den waterstofthermometer van constant volume

en

$$T - T_{0^\circ\,\mathrm{C.}} = \theta.$$

t wordt bepaald door

$$t = \frac{(pv)_T - (pv)_0}{(pv)_0\, \alpha_v}$$

waarin α_v voorstelt den gemiddelden spanningscoëfficient tusschen 0° en 100° voor een thermometer met het specifiek volume v. Deze wordt gegeven door $\dfrac{(pv)_{100} - (pv)_0}{100\,(pv)_0}$.

Stelt men de correctie op de absolute schaal voor door

$$\Delta t = \theta - t,$$

dan kan men hiervoor schrijven:

$$\Delta t = \frac{(T-T_0)\left(\frac{T_{100}B'_{100} - T_0B'_0}{100\,v} + \frac{T_{100}C'_{100} - T_0C'_0}{100\,v^2}\right) - \left(\frac{TB'_T - T_0B'_0}{v} + \frac{TC'_T - T_0C'_0}{v^2}\right)}{1 + \frac{T_{100}B'_{100} - T_0B'_0}{100\,v} + \frac{T_{100}C'_{100} - T_0C'_0}{100\,v^2}} \quad (3)$$

Uit onze bepalingen blijkt, in overeenstemming met wat uit de gemiddelde toestandsvergelijking VII. 1 kan worden afgeleid, dat de invloed van C'_T zeer gering is en tot $-217°$ niet meer dan 0°.0003 bedraagt, zoodat deze feitelijk niet in aanmerking komt. Daarom zal

in het volgende $C'_T = 0$ gesteld worden, gelijk ook door BERTHELOT, doch zonder bewijs, geschiedt.

Voor het absolute nulpunt werd aangenomen de waarde 273°.09[1]), waaruit volgt $A_T = 0.0036618\,T$, $T_{0°C.} = 273°.09$ en $T_{100°C.} = 373°.09$.

Voor de reductie van de in Med. N°. 97^a medegedeelde gegevens tot het theoretisch normaalvolume werd de waarde $\frac{v_A}{v} = 0.99939$ aangenomen, ontleend aan de isotherme bepalingen van Med. N°. 70 (SCHALKWIJK).

De waarden van B'_0 en B'_{100} zijn ontleend aan dezelfde isotherme-bepalingen[2]) door middel van den spanningscoëfficient 0.0036629 (zie XV aan het slot dezer Mededeeling) met verwaarloozing van de correctie tot de absolute schaal voor 20°. Deze waarden zijn[3]):

$$B'_0 = 0.000607 \qquad B'_{100} = 0.000664$$

De waarden van B'_T werden gevonden uit de in § 1 reeds nader besproken VII. 1. H_2. 1, welke in gereduceerden vorm[4]) geeft

$$10^8\,\mathfrak{P} = +\,173.247\,t - 462.956 - 706.416\,\frac{1}{t} + 384.2458\,\frac{1}{t^3} - 4.2530\,\frac{1}{t^5}$$

terwijl VII. 1 geeft

$$10^8\,\mathfrak{P} = 157.9500\,t - 305.7713 - 231.8247\,\frac{1}{t} - 97.5686\,\frac{1}{t^3} - 4.2530\,\frac{1}{t^5}$$

---

[1]) Uit de proeven van AMAGAT werd met de reeksontwikkeling van Med. N°. 71 (vergelijk de noot bij § 12 van Med. N°. 97^a) gevonden voor het verschil van den spanningscoefficiënt van stikstof bij 1000 mM. druk en 0 mM. druk 1.26×10^{-5}, waaruit met CHAPPUIS' spanningscoefficiënt voor 1000 mM., n.l. 0.0036744, volgt voor de limietwaarde bij 0 mM. druk de waarde 0.0036618, overeenkomende met het absolute nulpunt — 273°.09. Waterstof geeft op dezelfde wijze voor het verschil van den spanningscoefficiënt bij 1090 mM. en 0 mM. 2.1×10^{-6}, hetgeen met den in Med. N°. 60 gevonden (zie XV) spanningscoefficiënt 0.0036629 geeft de limietwaarde 0.0036608. Dezelfde waarde als hierboven uit stikstof gevonden werd door BERTHELOT (loc. cit.) afgeleid uit de uitkomsten van CHAPPUIS voor stikstof en die voor waterstof verkregen met een thermometer-reservoir van hard glas. In dezelfde verhandeling leidt hij voor het absolute nulpunt de waarde 273°.08 af voor het geval dat tevens de minder goed overeenstemmende uitkomsten door CHAPPUIS voor waterstof gevonden met een platina-thermometer in aanmerking worden genomen. Later (zie Zeitschrift für Elektrochemie N°. 34, 1904) wordt door hem opnieuw de eerstgenoemde waarde 273°.09 gevonden door het gemiddelde te nemen van de hierboven vermelde uitkomsten voor stikstof en waterstof en die, welke door middel van de proeven van KELVIN en JOULE kunnen worden afgeleid.

[2]) Vergelijk het slot van § 10 van Med. N°. 97^a.

[3]) De waarden door CHAPPUIS gevonden zijn resp. 0.000579 en 0.000606.
Die van WITKOWSKI zijn 0.000616 en 0.000688.
Die in Med. N°. 71 uit de waarnemingen van AMAGAT afgeleid zijn 0.000669 en 0.000774.

[4]) Bij de berekening worden gebruikt $p_K = 15$ atm. en $T_K = 29°$ volgens DEWAR welke ook voor de afleiding van VII. 1 gediend hebben.
Verder is $A_{AO} = 0.99939$ en $A_A = A_{AO}\,(1 + 0.0036618\,t)$ gesteld.

Hieruit zijn de waarden van B'_T berekend voor de standaardtemperaturen der isothermen.

Onderstaande tabel bevat in de eerste kolom deze standaardtemperaturen t_s op de schaal van *onzen* waterstofthermometer gemeten,[1]) in de tweede kolom dezelfde temperaturen gemeten op de absolute schaal. De beide volgende kolommen bevatten de bijbehoorende waarden van de speciale B'_T en van de volgens formule (2) berekende correcties op de absolute schaal Δt_s voor een waterstofthermometer van constant volume met 1090 mM. nulpuntsdruk. De laatste kolom geeft de correcties voor den *normalen* waterstofthermometer.

TABEL XVI. H_2. Correcties tot de absolute schaal.

t_s	θ	$B'_T.10^3$	Δt_s	Δt
— 103°.55	— 103°.54	+ 0.2892	0°.0214	0°.0196
— 135°.70	— 135°.67	+ 0.2368	0°.0316	0°.0290
— 182°.80	— 182°.75	— 0.2327	0°.0530	0°.0486
— 195°.26	— 195°.20	— 0.4734	0°.0611	0°.0561
— 204°.69	— 204°.62	— 0.7244	0°.0683	0°.0627
— 212°.81[2])	— 212°.73	— 1.0112	0°.0752	0°.0690
— 217°.40	— 217°.32	— 1.2167	0°.0796	0°.0730

De uitkomsten der laatste kolom kunnen met groote benadering worden voorgesteld door de formule

$$\Delta t = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{t}{100}\right)^4 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin:

$$a = -0.0143307$$
$$b = +0.0066906$$
$$c = +0.0049175$$
$$d = +0.0027197$$

De grootste afwijking is 3 eenheden der laatste decimaal.

De formule geeft de waarde $\Delta t = 0$, zoowel voor $t = +100°$ als voor $t = 0°$, terwijl er voor $t = -273°$ $\Delta t = +0°.14$ uit zou volgen.

§ 3. *Nauwkeurigheid der correcties.*

De invloeden, die fouten in de correcties kunnen veroorzaken, zijn van tweeërlei aard.

[1]) De geringe verschillen met de waarde van tabel XII van Med. N°. 97^a zijn een gevolg van een correctie (zie XV) tengevolge van het aanwenden van den verbeterden spanningscoefficiënt 0.0036629 en den invloed van de schadelijke ruimte op de temperatuurbepaling, waarover in het laatste gedeelte dezer Mededeeling nader zal worden gehandeld.

[2]) Het na de correctie van de vorige noot overblijvende verschil met Med. N°. 97^a is het gevolg van een verbetering in de berekening aangebracht.

1°. Fouten in de waarden van B'_T.

2°. Fouten in de gegevens, die in de verdere afleiding zijn gebruikt. Deze laatste laten zich terugbrengen tot de fout in B'_0 en het verschil der gebruikte spanningscoëfficienten voor de dichtheid $= 0$ en die bij 0° en 1090 mM. Vergelijkt men voor de middelbare fout in B'_0 de waarden van B'_0, die men uit de gegevens van Med. N°s. 70 en 78 en uit die van CHAPPUIS kan afleiden, dan volgt uit hunne onderlinge afwijkingen een middelbare fout van $\pm$ 0.000034 (ongeveer overeenkomende met de voor pv in § 11 van Med. N°. 97^a afgeleide procentische fout), hetgeen voor Δt overeenkomt met een middelbare fout van $\pm$ 0°.008 bij $-$ 100° en van $\pm$ 0°.003 bij $-$ 200°.

Men kan verder aannemen, dat de middelbare fout in de spanningscoefficienten 0.0036618 en 0.0036629 voor de eerste één en voor de tweede twee eenheden der laatste decimaal bedraagt, hetgeen overeenkomt met een middelbare fout in Δt van $\pm$ 0°.003 en $\pm$ 0°.006 bij $-$ 100° en met $\pm$ 0°.005 en $\pm$ 0°.011 bij $-$ 200°.

Stelt men verder de middelbare fout in B'_T gelijk aan die van B'_0, dan komt hiermede overeen een middelbare fout in Δt van $\pm$ 0°.006 bij $-$ 100° en van $\pm$ 0°.002 bij $-$ 200°.

De totale middelbare fout tengevolge van al deze middelbare fouten te samen zal bedragen $\pm$ 0°.012 voor $-$ 100° en $\pm$ 0°.013 voor $-$ 200°.

§ 4. *Vergelijking der uitkomsten met de theoretisch afgeleide.*

Tabel XVII bevat de correcties den normalen waterstofthermometer

TABEL XVII. H_2. Correcties tot de absolute schaal.

t	Δt		t	Δt		
	experimenteele waarden	volgens VII. 1		volgens Callendar	volgens Berthelot	uit experimenteele waarden
— 103°.56	0°.0196	0°.0017	— 10°	0°.00021		0°.0015
— 135°.70	0°.0290	0°.0032	— 20°	0°.00048		0°.0031
— 182°.80	0°.0486	0°.0082	— 50°	0°.00164		0°.0082
— 195°.26	0°.0561	0°.0108	— 100°	0°.0054	0°.008	0°.0187
— 204°.69	0°.0627	0°.0136	— 150°	0°.0132		0°.0337
— 212°.81	0°.0690	0°.0168	— 200°	0°.0311	0°.06	0°.0593
— 217°.40	0°.0730	0°.0192	— 240°		0°.18	
— 240°		0°.0470	— 250°	0°.1005		
— 250°		0°.0925				

betreffende. Behalve de hierboven vermelde direct uit de waarneming gevonden waarden van Δt, bevat ze de correcties bepaald volgens de reeksformule VII. 1 en de door CALLENDAR en BERTHELOT berekende. In de laatste kolom zijn daarenboven ter vergelijking de correcties weergegeven die zich uit de met VII. 1. H_2 vereffende experimenteele waarden door formule (4) laten berekenen.

Op de plaat zijn behalve de uit dit onderzoek afgeleide correcties voor een nulpuntsdruk van 1000 m. M. tevens voorgesteld de waarden door BERTHELOT en CALLENDAR gevonden. De drie krommen zijn in de hier boven genoemde volgorde met I, II en III aangeduid. Ook de laatste twee hebben betrekking op een nulpuntsdruk van 1000 m.M.

De door CALLENDAR en BERTHELOT uit de wet der overeenstemmende toestanden afgeleide waarden blijken systematisch van de experimenteele af te wijken. Wat de correcties volgens de formule VII. 1 betreft, bij het afleiden van welke formule aansluiting in het hier behandelde gebied der toestandsvergelijking (tusschen 0° en — 217° voor waterstof) niet werd gezocht, zoo blijkt dat VII. 1 eene wijziging behoeft om ook in dit gebied een zoo goed mogelijke aansluiting te geven. Deze aansluiting zou in de eerste plaats vereischen, dat bij de berekening van VII. 1 voor de kritische grootheden van H_2 werden aangenomen die waarden, welke uit de gegevens van Med. N°. 97^a volgen. Deze zijn $p_k = 15$ atm. en $T_k = 43°$. Deze waarde van T_k zou de in tabel XVII volgens VII. 1 gegeven correcties aanmerkelijk doen stijgen.

§ 5. *Formule om de temperatuur onmiddellijk af te leiden uit de waarnemingen met den gasthermometer van constant volume.*

Ondersteld is, dat aan H_T is aangebracht de correctie voor het verschil in druk bij den kwikmeniscus en het thermometerreservoir ten gevolge van de zwaarte van het thermometergas, en dat deze zoo klein is, dat ze verwaarloosd mag worden voor de kleine volumina

De grondformule voor de reductie is: [1])

$$pv = A_T \left(1 + \frac{B_T}{v} + \frac{C_T}{v^2}\right)$$

welke ook gebracht kan worden in den vorm

$$pv = A_T \left(1 + B_T^{(p)} p + C_T^{(p)} p^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wij gaan uit van deze laatste formule. De vergelijking voor den gasthermometer (verg. formule (1) van § 5 van Med. N°. 95^e) wordt nu:

[1]) Hierin is v uitgedrukt in het theoretisch normaalvolume en derhalve $A_T = 1 + 0.0036618\,\theta$. De waarde voor 0° C., waarbij $\theta = 0$, noemen wij A_{T_0}. Zij is 1.

$$H_T\left[\frac{V_0(1+k_1 t+k_2 t^2)+\beta_1+u_1}{A_T(1+B^p_T H_T+C^p_T H_T^2)}+\frac{u_2'}{A_{t_2'}(1+B^p_{t_2'} H_T^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{u_2''}{A_{t_2''}(1+B^p_{t_2''} H_T)}+\frac{u_3}{A_{t_3}(1+B^p_{t_3} H_T)}+\frac{u_4}{A_{t_4}(1+B^p_{t_4} H_T)}\right]=$$

$$=H_0\left[\frac{V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+u_2'''}{A_{T_0}(1+B^p_{T_0} H_0+C^p_{T_0} H_0^2)}+\frac{u}{A_{15}(1+B^p_{15} H_0)}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze formule is ook geldig voor den koolzuurthermometer tot het aantal decimalen dat door CHAPPUIS wordt opgegeven. Op de afwijking van de door CHAPPUIS gebruikte formule komen wij in XV terug.

Voor de temperatuurbepaling tot op 0°.001 met een waterstofthermometer van 1100 m.M. nulpuntsdruk en een schadelijke ruimte $\frac{u}{V_0}<0.01$ kan men met voldoende benadering de formule schrijven in den meer eenvoudigen vorm:

$$H_T\left[\frac{V_0(1+k_1 t+k_2 t^2)+\beta_1+u_1}{A_T(1+B^p_T H_T)}+\frac{u_2'}{1+0.00366\,t_2'}+\right.$$

$$\left.+\frac{u_2''}{1+0.00366\,t_2''}+\frac{u_3}{1+0.00366\,t_3}+\frac{u_4}{1+0.00366\,t_4}\right]=$$

$$=H_0\left[\frac{V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+u_2'''}{A_{T_0}(1+B^p_{T_0} H_0)}+\frac{u}{1+0.00366\times 15}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Voor B^p_T kan eerst een benaderde waarde worden aangenomen. Met de zoo gevonden benaderde waarde van de temperatuur kan een betere waarde van B^p_T worden bepaald en de correctieterm voor de glasuitzetting worden berekend.

Zoo vindt men A_T, waaruit de waarde van θ volgt door

$$\frac{A_T-A_{T_0}}{0.0036618}=\theta.$$

XV. *Invloed van de afwijking van de wet van* BOYLE—CHARLES *op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig.*

§ 1. Bij de opstelling van de formules voor de berekening van de temperatuur op de schaal van den gasthermometer van standvastig volume wordt tot nog toe algemeen (zie bijv. CHAPPUIS) de spanningsverandering van het gas zoowel in het thermometerreservoir

als in de schadelijke ruimte in rekening gebracht, alsof zij bij volstrekt standvastige dichtheid plaats had.

De fout, die men hierdoor begaat, is voor de permanente gassen voor kleine waarden van de schadelijke ruimte zoo gering, dat zij eerst in de laatste der door CHAPPUIS opgegeven decimalen te voorschijn komt. Voor den koolzuur-thermometer van CHAPPUIS bereikt zij echter een merkbare waarde (de invloed strekt zich hier tot de voorlaatste decimaal uit), zoodat het van belang was na te gaan in hoeverre het geoorloofd is haar te verwaarloozen. Dit blijkt, wanneer men de formule van CHAPPUIS nader met formule (6) van XIV vergelijkt.

Daar de dichtheid, zoowel in het thermometerreservoir als in de schadelijke ruimte, niet constant is doordat bijv. bij lage temperatuur gas uit de schadelijke ruimte naar het reservoir gaat en pv zoowel als de spanningscoëfficient met de dichtheid verandert, past men door deze handelwijze een viertal (voor reservoir en schadelijke ruimte ieder twee) benaderingen toe, die alle een fout in dezelfde richting geven. (Adsorptie laten wij buiten beschouwing).

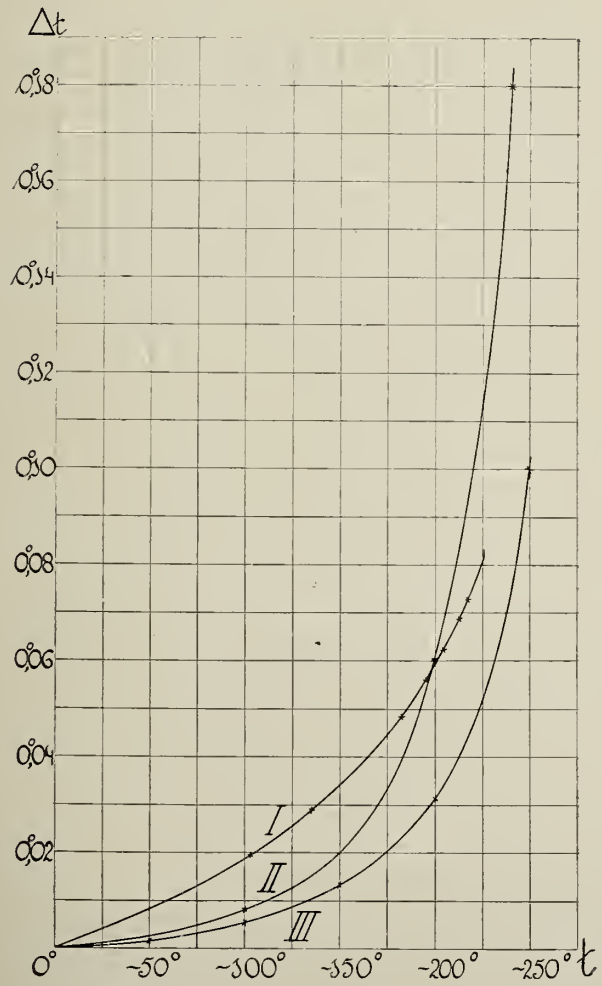
De fouten, veroorzaakt door deze benaderingen, zijn voor het reservoir en de schadelijke ruimte van dezelfde orde van grootte, daar de eerste geldt voor een groot volume en een klein dichtheidsverschil, de tweede voor een klein volume en een groot dichtheidsverschil. De correctie, die tengevolge dezer fouten aan de temperatuursbepaling moet worden toegevoegd, bedraagt voor een waterstof-thermometer met 1000 mM. nulpuntsdruk en een schadelijke ruimte van $0{,}01\,V_0$ slechts $-0°.001$ bij $-100°$, voor lagere temperaturen nog minder en kan dus beneden 0° verwaarloosd worden.

Formule (6) verschilt van de vroegere formule door nog eene correctie, die onafhankelijk is van de grootte der schadelijke ruimte en die samenhangt met de dichtheidsverandering in het reservoir door de glasuitzetting. Deze fout is voor de temperatuurbepaling van geen gewicht maar kan in enkele gevallen een merkbaren invloed uitoefenen (verg. § 3).

Ook op de bepaling van den gemiddelden spanningscoëfficient zijn de genoemde benaderingen van invloed. De discussie, volkomen analoog met die voor den invloed op de temperatuurbepaling, geeft als correctie bij onzen thermometer $+\,0.00000019$, welke blijft beneden de in Med. N°. 60 aangenomen grenzen van nauwkeurigheid. Derhalve verandert de in Med. N°. 60 voor waterstof bij 1090 mM. afgeleide waarde 0.0036627 tot de gecorrigeerde waarde 0.0036629.

§ 2. Men kan van de op de wijze van Med. N°. 95^e afgeleide

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Reductie van de aflezingen van den waterstofthermometer van constant volume op de absolute schaal.



temperaturen overgaan tot die op den normalen waterstofthermometer door gebruik te maken van de onderstaande tabel, waarin de hiervoor noodige correcties zijn gegeven. Deze correcties geven rekenschap van de verandering in den aangenomen spanningscoëfficient en (met het oog op het aantal gegeven decimalen) van den invloed der schadelijke ruimte.

TABEL XVIII. Correcties voor de temperaturen berekend volgens Med. N°. 95^e tot die op de normale waterstofschaal.

t	Δt	t	Δt
— 50°	+ 0°.003	— 200°	+ 0°.016
— 100°	+ 0°.006	— 220°	+ 0°.019
— 150°	+ 0°.010	— 250°	+ 0°.020

Met de vijfde kolom van tabel XVI vindt men dan de correcties tot de absolute schaal. Zoo stellen de tabellen XVI en XVIII in staat de temperaturen, berekend volgens Med. N°. 95^e en gebruikt in Med. N°s 95^a, 95^c en 95^d terug te brengen zoowel tot de normale waterstofschaal als tot de absolute schaal.

De temperaturen t_s voorkomende in Med. N°. 97^a, in de eerste kolom van tabel XVI reeds gecorrigeerd voor de aanwending van den verbeterden spanningscoëfficient 0.0036629 en den invloed van de schadelijke ruimte, worden door de correcties in de vierde kolom van tabel XVI overgebracht op de absolute schaal.

§ 3. De door Chappuis en Travers voor den spanningscoëfficient van waterstof gevonden waarden (verg. de noot bij § 7 van Med. N°. 95^e) worden gecorrigeerd tot 0.00366266 en 0.00366297 (aantal decimalen hetzelfde als door hen opgegeven).

Voor den spanningscoëfficient van koolzuur door Chappuis gevonden is de correctie belangrijker en bedraagt (daar de schadelijke ruimte hier gering is, is de correctie wegens de dichtheidsverandering door de glasuitzetting hier ongeveer even groot als die wegens de dichtheidsverandering door de schadelijke ruimte) -0.25×10^{-6}, zoodat de door Chappuis gevonden waarde [1]) 0.00372624 wordt gecorrigeerd tot 0.00372599.

[1]) Nouvelles Etudes, Travaux et Mémoires du Bureau International. T. XIII, p. 48.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN „*Verslag van den staat der Sterrewacht.*"

E R R A T A.

Zittingsverslag van Juni 1906.

p. 163	regel	6	van onder	voor	— 212,83	lees	— 212,87			
„	„	„	6	„	„	„	+ 0,082	„	+ 0,059	
„	„	„	4 en 5	„	„	„	5 Juli '05	„	6 Juli '05	
„	„	„	3	„	„	„	3 Maart '05	„	3 Maart '06	
„	„	„	5	„	„	„	— 212,87	„	— 212,83	
p. 165	„	16	„	„	„	— 212,87	„	— 212,83		
			en voor	— 0,024	— 0,065	— 0,001	— 0,031			
			lees	— 0,047	— 0,088	— 0,024	— 0,054			
p. 167	regel	4	van onder	voor	— 212,87	lees	— 212,83			
			en voor	— 1	— 3	— 76				
			lees	— 10	— 12	— 85				

Zittingsverslag December 1906.

p. 510 regel 6 van boven leze men: $T > T_{bpls}$ of $< T_{bpli}$.
„ „ „ 8 en 9 „ „ „ „ : $T_{bpls} > T > T_{bpli}$.
p. 512 „ 15 „ „ „ „ : $v_{kHeM} = \frac{1}{4} v_{kH_2M}$ (moleculaire kritische volumina, verg. p. 507).
„ „ „ 24 „ „ „ „ : „grenslaag" i. p. v. „grenslijn"
p. 517 „ 3 „ „ verg. (9) worde gelezen:

$$\tfrac{1}{2}\left\{u + \frac{2}{1+z}\right\}\left\{u - \frac{2}{1-z}\right\}(u+z) + \left\{u + \frac{4z}{1-z^2}\right\}\left\{\tfrac{1}{2}u(r+z) + 1\right\} = 0$$

p. 517 regel 11 v. b. i. p. v. 0.00656 leze men 0.00653.
„ „ „ 14 „ „ „ „ „ $v_{bpl} = 0.79\, v_{k_1}$ leze men $v_{bpl} = 0.26\, v_{k_1}$.
„ „ „ 14 „ „ „ „ „ $p_{bpl} = 4.9\, p_{k_1}$ „ „ $p_{bvl} = 4.8\, p_{k_1}$.
„ „ „ 16 „ „ „ „ „ 11 leze men 14.

Zittingsverslag Januari 1907.

In de tabel op p. 656 zijn de getallen in de eerste kolom alle met 2 te vermenigvuldigen. Evenzoo p. 657 r. 15 en 16 v. b., alsook p. 658 r. 2, 7, 12, 13, 24, 27 v. b. en 1 v. o.
p. 658 r. 4 v. b. leze men $^1/_4$ i. p. v. $^1/_8$.

(6 Februari, 1907).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 23 Februari 1907.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 680.

In Memoriam Prof. H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM, p. 681.

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels", p. 686. (Met 1 plaat).

J. P. VAN DER STOK: „Over de bewerking van wind-waarnemingen", p. 704.

F. M. JAEGER: „Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het totstandkomen dezer verschijnselen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en A. F. HOLLEMAN), p. 721.

F. M. JAEGER: „Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet". (Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 724.

P. VAN ROMBURGH en A. D. MAURENBRECHER: „Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen op *s.* trinitrophenyl-methylnitramine", p. 730.

PH. KOHNSTAMM: „Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een binair mengsel". (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 732.

PH. KOHNSTAMM: „Over metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde". (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 742. (Met 1 plaat).

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ vlak van VAN DER WAALS: XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen", p. 754. (Met 1 plaat).

Aanbieding eener verhandeling van den Heer HANS STRAHL: „Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L.", p. 763.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. BREMSTER Jr.: „Explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables", p. 763.

Erratum, p. 764.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren KAMERLINGH ONNES en WENT, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Circulaire van de Universiteit te Upsala waarbij de Akademie wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen bij de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van CAR. LINNAEUS op 23 en 24 Mei a.s.

Op verzoek van den Voorzitter belasten zich de Heeren HUGO DE VRIES, MOLL en VOSMAER met het opstellen van een adres van gelukwensch. Er wordt besloten dat dit in 't Nederlandsch zal worden gesteld en vergezeld zal gaan van een Fransche of Zweedsche veraling.

3°. Circulaire van eene Commissie ter herdenking van den 300-jarigen sterfdag van U. ALDROVANDI en van den 800-jarigen stichtingsdag van een inrichting voor geleerde studiën in Bologna op 12 Juni a. s. Aangehouden tot na behandeling in de Letterkundige Afdeeling.

Verder is ingekomen het bericht van overlijden van het lid der Akademie

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM,

dat met een brief van rouwbeklag is beantwoord. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

Mijne Heeren!

Onder den indruk van het treffend verlies dat de wetenschap door den dood van onzen Bakhuis Roozeboom heeft geleden, hebben ambtgenooten, leerlingen en vrienden hem eene weemoedige hulde gebracht, en herdacht wat hij heeft gewerkt en hoeveel talent en kennis met hem is ten grave gedaald. Zij allen waren zeker meer dan ik bevoegd de verdiensten van den grooten man te schetsen, maar ik wensch toch ook een kort woord ter herdenking te spreken, hier in deze afdeeling, waar wij voor 23 jaar mochten kennis nemen van de eerste belangrijke schrede van Bakhuis Roozeboom op het pad dat hij, met een talent en een doorzettingskracht zooals weinigen, zich in het ongebaande labyrinth van feiten heeft gebaand; hier, waar we er getuigen van waren hoe daarbij ontdekking op ontdekking volgde, en hoe door Roozeboom een geheel nieuw gebied aan de physisch chemische wetenschap werd toegevoegd, waarop hij als meester allen voorging.

Te Alkmaar, waar hij 24 Oct. 1854 was geboren, trok hij als leerling der H. B. S. door zijne buitengewone talenten reeds vroeg de aandacht zijner leermeesters, vooral van den directeur en leeraar in de scheikunde, Dr. Boeke, onder wiens leiding hij zich, na een schitterend afgelegd eindexamen, verder

in de practische scheikunde oefende. In 1875 was zijne vaardigheid in het volbrengen van chemische analyses reeds zoo groot, dat hij ons medelid VAN BEMMELEN kon bijstaan in diens onderzoekingen van de gronden van de IJpolders, en daarna met vrucht in het onderzoekingsbureau van Dr. MOUTON te 's Hage kon werkzaam zijn.

In 1878 verwisselde hij deze betrekking met die van assistent bij het organisch laboratorium te Leiden, en in deze wetenschappelijke atmospheer, in voortdurende aanraking met VAN BEMMELEN, die hem, vaak ten koste van eigen werk, een groote mate van vrijheid verleende, kon ROOZEBOOM onder gunstige omstandigheden zijne akademische studiën en zijne wetenschappelijke onderzoekingen verder voortzetten.

Nadat hij reeds in 1881 eene nieuwe verbinding tusschen Ammoniumbromuur en bromium had bekend gemaakt, was de eerste groote arbeid, waardoor de aandacht op hem gevestigd werd, een uitgebreid onderzoek over de hydraten van het chloor, het bromium, het zwaveligzuur en het chloorwaterstof. Hij stelde daarbij vast, hoe de samenstelling der waterige oplossingen door druk en temperatuur werden gewijzigd en bepaalde de kromme lijnen der dissociatie-evenwichten.

In 1884 promoveerde hij met eene dissertatie over dat onderwerp, en spoedig daarna ontdekte hij het belangrijke feit, dat er bij dezelfde temperatuur, doch bij verschillenden druk, tweeërlei oplossingen van broomwaterstof kunnen bestaan.

Deze ontdekking was niet het gevolg van toevallig ingestelde proefnemingen, maar van een stelselmatig onderzoek, waarbij zoowel de keus van de stof als de aard der proeven werden bepaald door beschouwingen, bij welke het te bereiken doel steeds werd in het oog gehouden.

In de vergadering van December 1884 deelde v. BEMMELEN de gevonden uitkomst aan onze afdeeling mede, en in de verrassende verschijnselen door het nauwkeurig onderzoek van B. ROOZEBOOM in het licht gekomen, vond v. D. WAALS, zooals hij mededeelde, aanleiding tot de bestudeering van de wetten die werken moeten, als een vaste stof van standvastige samenstelling van aggregaattoestand verandert. De door hem in de Februari-vergadering van 1885 aan onze afdeeling medege-

deelde betrekking tusschen de verschillende physische grootheden, die van invloed zijn op deze veranderingen, gaf een richtsnoer, dat B. Roozeboom bij zijn verder onderzoek kon volgen.

Inmiddels had deze zijne waarnemingen onverpoosd voortgezet, en in April 1885 gaf hij de uitkomsten van zijn volledig onderzoek van broomwaterstofhydraat, met eene graphische voorstelling van de begrenzing der velden waarbinnen de verschillende toestanden kunnen bestaan, en alles wat noodig is om het gedrag van deze stof bij verschillende temperatuur en druk te bepalen.

Van veel gewicht voor de verdere ontwikkeling van Roozeboom's theorie was de studie van het werk van Gibbs, waarop v. d. Waals hem opmerkzaam maakte. In korten tijd bestudeerde hij dat werk, en aan de hand van Gibbs' phasenleer kon hij aan zijne uitkomsten een meer algemeen karakter geven, en zijne onderzoekingen op grooter schaal op meer samengestelde lichamen uitbreiden.

De experimenteele bezwaren, die hij daarbij ondervond door het gebruik van zeer lage temperaturen en zeer hooge drukkingen tot 100 en meer atmospheren, wist hij op glansrijke wijze te overwinnen, en in 1887 kon hij een systematisch overzicht geven van de verschillende vormen van het heterogene chemisch evenwicht, theoretisch toegelicht en experimenteel onderzocht bij een aantal verschillende stelsels. Door vernuftige teekeningen en modellen werden al de veranderingen in de samenstelling der bijeengevoegde lichamen duidelijk voorgesteld.

Kort daarop kon B. Roozeboom door de studie van het astrakaniet, waarbij drie stoffen samenkomen, zijne voorstellingen nog verruimen, en zoo werd hij de schepper van de toepassing van Gibbs' theoretische phasenleer op de chemie, en opende hij in de scheikunde eene nieuwe richting door de leer van het chemisch evenwicht.

Was wat men vroeger met betrekking tot de vorming van dubbelzouten had gevonden, zooals Nenrst zegt, meestal het gevolg van het blinde toeval, thans kon men aan de hand van Roozeboom's leer alle verbindingen, die tusschen twee, drie, zelfs vier stoffen mogelijk zijn, met zekerheid te ontdekken.

B. Roozeboom ging daarbij voor, en op zijn voetspoor werden door vele scheikundigen, in de eerste plaats door zijne leerlingen Stortenbeker en Schreinemakers, verschillende stelsels van lichamen onderzocht en hunne verbindingen bepaald.

In 1896 verliet B. Roozeboom Leiden, om te Amsterdam als opvolger van van 't Hoff zich aan het onderwijs en de voortzetting van zijn onderzoekingen te wijden. Verrassend bleek daarbij de groote vruchtbaarheid van de door hem ontwikkelde leer, toen hij haar op allerlei verschillende deelen van de chemische wetenschap toepaste, o. a. op de leer der mengkristallen en de samenstelling van het staal, op de evenwichten der pseudobinaire mengsels, op de vloeibare kristallen enz.; en hoezeer Roozeboom door zijn opwekkend onderwijs zijne leerlingen wist te bezielen, bewijzen de belangrijke dissertaties door verschillende hunner onder zijne leiding geschreven.

In Amsterdam kon hij eindelijk gevolg geven aan zijn reeds in Leiden gevormd plan om naar aanleiding van al zijne onderzoekingen een werk over de phasenleer te schrijven, en niettegenstaande de vele bezigheden, die hij ook buiten zijn professoraat had op zich genomen, kon hij er twee deelen van in het licht geven; het derde en laatste deel moeten wij helaas van zijne hand missen.

In onze akademie, waartoe hij sedert 1890 behoorde, was hij een der vruchtbaarste leden, en wij hooren nog in gedachte hoe hij vol geestdrift telkens en telkens de uitkomsten van zijne onderzoekingen aan ons mededeelde.

Die herdenking moge ons dankbaar stemmen voor wat Roozeboom in zijn werkzaam leven heeft gedaan, te bitterder wordt de smart als wij denken aan al wat hij, die zoo vroeg op 52 jarigen leeftijd van ons wegging, nog had kunnen doen.

Het is zeker niet iedereen gegeven in zijn wetenschappelijk leven een nog onontgonnen terrein te vinden, dat zoo vruchtbaar bleek als dat wat Bakhuis Roozeboom heeft bewerkt, maar er zijn ook slechts enkele groote mannen die in staat zijn, zooals hij, daarvan ten volle partij te trekken, en in korte jaren een oogst binnen te halen veel grooter dan tot dien tijd door alle geleerden was bijeengegaard.

Daartoe zijn noodig de eigenschappen die wij in ons overleden medelid bewonderden, het bezit niet alleen van een groote mate van kennis, maar ook van een geniale vooruitziende blik, van een ongeevenaarde arbeidskracht en van een vasten wil om op het voorgestelde doel af te gaan, zonder ter rechter of ter linker zijde af te wijken.

Hem die met deze eigenschappen zooveel heeft gedaan en de wetenschap zulk een grooten stap heeft vooruit gebracht, brengen we onzen eerbiedigen dank en hulde, en den overleden vriend brengen we hier in gedachten onzen laatsten groet.

Natuurkunde. — De Heer J. D. VAN DER WAALS doet eene mededeeling: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels."*

De theorie der binaire mengsels, zooals die in de „Théorie moléculaire" is ontwikkeld, heeft aanleiding gegeven tot tal van experimenteele en theoretische onderzoekingen, die voorzeker in hooge mate hebben bijgedragen tot duidelijker inzicht van de verschijnselen, welke zich bij de mengsels voordoen. Toch zijn nog vele vragen onbeantwoord gebleven, en daaronder zeer belangrijke. Tot deze nog niet beantwoorde vragen reken ik die naar een classificatie van de verschillende groepen van ψ oppervlakken. Bij sommige binaire stelsels heeft de plooi van het ψ vlak een eenvoudige gedaante. Bij andere is zij samengesteld, of is er nog een tweede plooi aanwezig. En het is tot hiertoe nog niet gelukt de oorzaak voor die verschillende vormen aan te geven — zelfs niet om ze met andere eigenschappen der bijzondere groepen van mengsels in verband te brengen. Wel wordt in de theorie de vergelijking gegeven van de spinodale lijn welke de plooi begrenst — en als men deze volkomen juist kent moet het aan de analyse mogelijk zijn de classificatie te maken. Maar de vergelijking blijkt gecompliceerd, en is, vooral voor kleine volumes, door de onvolledige kennis van de toestandsvergelijking slechts bij benadering juist. Door deze overweging geleid, heb ik gezocht naar een wijze van behandeling der theorie, welke aanschouwelijker is dan de analytische en die, zooals de uitkomst toonde, in staat stelt ons een oorzaak aan te wijzen voor de verschillende gedaante der plooien en in het algemeen weder nieuw licht werpt op andere reeds min of meer bekende verschijnselen.

De theorie leert dat voor coëxisteerende phasen bij gegeven temperatuur 3 grootheden n.l. $-\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT}$, $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT}$ en $\psi - v\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT} - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT}$ gelijk moeten zijn. De eerste dezer grootheden is de drukking, welke wij door p zullen voorstellen; de tweede is het verschil der molekulaire potentialen of $M_2\,\mu_2 - M_1\,\mu_1$ welke wij naar analogie door q zullen voorstellen. De derde dezer grootheden is de molekulaire potentiaal van den eersten component, welke wij door $M_1\,\mu_1$ zullen voorstellen. Nu zijn de punten voor gelijke waarde van p op een kromme lijn gelegen, welke zich vloeiend met verandering van de waarde van p transformeert, zoodat als men alle p-lijnen getrokken denkt het geheele v,x diagram daardoor wordt ingenomen. Evenzoo zijn de punten voor gegeven waarde van q op een kromme lijn gelegen, welke met verandering van de waarde van q geleidelijk van gedaante verandert; terwijl weder als alle q-lijnen getrokken

zijn, het geheele v,x diagram ingenomen is. Zoowel de p-lijnen, als de q-lijnen hebben de eigenschap, dat door een gegeven punt slechts een enkele p-lijn, of slechts een enkele q-lijn kan getrokken worden. Een zelfde p-lijn snijdt echter oneindig veel lijnen van het q-stelsel, en elke q-lijn oneindig veel lijnen van het p-stelsel. Zelfs snijdt een zelfde p-lijn een gegeven q-lijn in meerdere punten. Toch zal het natuurlijk noodig zijn dat als 2 punten coëxisteerende phasen aangeven, zoowel de p-lijn als de q-lijn, welke door het eerste punt gaat, ook door het tweede punt gaat. Kiest men een p-lijn voor twee coëxisteerende phasen, dan zal echter niet elke willekeurig gekozen waarde voor een q-lijn door hare snijdingen met de p-lijn aan den eisch van coëxistentie voldoen, omdat er nog aan een derde voorwaarde moet voldaan worden n.l. dat $M_1 \mu_1$ even groot moet zijn. De slotsom is dus deze: als alle p-lijnen en alle q-lijnen getrokken zijn en van haar index voorzien, dan is er nog één regel noodig om de punten te bepalen welke, als coëxisteerende phasen aangevende, bij elkander behooren. In de volgende bladzijden zal ik dus hebben aan te geven, als men deze methode voor de bepaling van coëxisteerende phasen wil volgen 1°. Hoe de gedaante der p-lijnen is en hoe deze gedaante afhangt van de keuze der componenten. 2°. Hoe de gedaante der q-lijnen is en hoe deze gedaante afhangt van de keuze der componenten 3°. welke regel bestaat om uit de oneindig vele puntenparen welke als p gegeven is, gelijke waarde van q bezitten, het paar of de meerdere paren uit te zoeken welke coëxisteerende phasen voorstellen — of als omgekeerd de waarde van q vooraf gekozen wordt, de behoorlijke waarde van p te vinden, opdat er coëxistentie zij.

Maar voor de bepaling van den loop der spinodale lijn is de toepassing van den laatst bedoelden regel niet noodig. Daarvoor is de teekening der p en der q-lijnen voldoende. Overal nl. waar een p-lijn aan een q-lijn raakt is een punt der spinodale lijn. Wij hebben nl. uit $\frac{d^2\psi}{dv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p + \frac{d^2\psi}{dvdx} = 0$, en uit $\frac{d^2\psi}{dxdv}\left(\frac{dv}{dx}\right)_q + \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ voor $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ de waarde $-\frac{\frac{d^2\psi}{dxdv}}{\frac{d^2\psi}{dv^2}}$ en voor $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ de waarde $-\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d^2\psi}{dxdv}}$, en kunnen dus de vergelijking der spinodale lijn schrijven:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q$$

Als wij dus in staat zijn, om uit de eigenschappen van de com-

ponenten van een mengsel af te leiden hoe de loop der p en der q-lijnen is, kunnen wij veel, zoo niet alles, afleiden omtrent de gedaante der spinodale lijn. En zelfs als de loop dezer lijnen slechts kwalitatief kan voorspeld worden en de kwantitatief juiste kennis ontbreekt, zal wel niet de kwantitatief juiste gedaante der spinodale lijn bekend zijn, maar toch in hoofdtrekken de redenen aan te geven zijn, waarom in vele gevallen de gedaante der plooi zoo eenvoudig is, als wat wij gewend zijn als het normale verloop te beschouwen, terwijl in andere gevallen de plooi samengestelder is, en er zelfs gevallen zijn, waarin een tweede plooi aanwezig is.

Vooral wat de p-lijnen betreft, is het mogelijk uit de eigenschappen der componenten vooraf den loop dezer lijnen aan te geven. Wat de q-lijnen betreft is dit niet in dezelfde mate mogelijk, maar zoo er dan onzekerheid is, zullen wij gewoonlijk maar tusschen weinig mogelijkheden te kiezen hebben.

De loop der p-lijnen.

Eigenlijk is het wezenlijke omtrent den loop der p-lijnen reeds door mij gepubliceerd in „Ternaire Stelsels" — en slechts weinig behoeft daar bijgevoegd te worden om in staat te stellen in elk gegeven geval van twee willekeurig gekozen componenten dezen loop vast te stellen. Voor het aangeven van den gang dezer p-lijnen is noodig, omdat $p = -\frac{d\psi}{dv_{xT}}$ is, en $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = -\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT}}$ is, de kennis voor den gang der krommen: $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$.

De eerste kromme heeft een samenhangenden vloeistoftak, en een samenhangenden damptak, ten minste zoolang T beneden elke mogelijke T_k ligt, als wij door T_k aanduiden de kritische temperatuur van elk mengsel, dat in het diagram voorkomt, als onsplitsbare stof beschouwd. Mocht er minimum waarde van T_k zijn voor zekere waarde van x, en is T hooger dan deze minimum T_k, dan heeft de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ zich gesplitst in twee afzonderlijke krommen. Bij elke is dan damp- en vloeistoftak samengevloeid bij een waarde van $v = v_k$. Daar ter plaatse is er dan aan deze twee gedeelten der kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ een raaklijn te trekken // aan de v-as.

De tweede kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ is een lijn welke twee asymptoten

heeft en in het ruwe kan vergeleken worden met de eene helft van een hyperbool. De uit de toestandsvergelijking afgeleide gedaante dezer kromme volgt uit de vergelijking:

$$\frac{MRT\dfrac{db}{dx}}{(v-b)^2} - \frac{\dfrac{da}{dx}}{v^2} = 0$$

Nemen wij nu altijd tot tweeden component dien met de grootste waarde van b, zoodat $\frac{db}{dx}$ altijd positief is, dan blijkt uit de gegeven vergelijking, dat de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ geen punten kan bezitten voor die waarden van x, waarvoor $\frac{da}{dx}$ negatief is. Eerst bij die waarde van x waarvoor $\frac{da}{dx} = 0$ is, begint die mogelijkheid, maar dan eerst als $T = 0$ is. Heeft T een bepaalde waarde, dan moet, opdat er punten dezer kromme mogelijk zijn, $\frac{da}{dx}$ positief zijn. Bij $v = \infty$ moet dan $\frac{da}{dx} = MRT\,\frac{db}{dx}$ zijn. En de waarde van x welke aan deze vergelijking voldoet, geeft de eene asymptoot der besproken kromme aan, door een lijn // aan de v-as. Heeft men deze asymptoot getrokken, dan kan men links daarvan geplaatst denken de mengsels met afnemende kritische temperatuur. En rechts daarvan volgen dan nog niet onmiddellijk de mengsels met toenemende kritische temperatuur. Voor scheiding tusschen de mengsels met afnemende en die met toenemende T_k, moet $\frac{da}{dx} = \frac{a}{b}\frac{db}{dx}$; eerst als $MRT = \frac{a}{b}$ was, zou onmiddellijk rechts van deze asymptoot T_k weder stijgen; maar dan zou T zoo hoog gekozen moeten zijn dat zij $^{27}/_{8}$ T_k was, en wij zullen T ten minste voorloopig vèr beneden die grens kiezen.

Dat de lijn x gelijk de waarde, welke volgt uit $\frac{da}{dx} = MRT\,\frac{db}{dx}$ een asymptoot is, zien wij in als wij de vergelijking der kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ geschreven denken als volgt: $\frac{v^2}{(v-b)^2} = -\frac{\dfrac{da}{dx}}{MRT\dfrac{db}{dx}}$. Daar van links naar rechts de waarde van $\frac{da}{dx}$ grooter wordt, moet van links

naar rechts $\frac{v}{v-b}$ grooter worden, of $\frac{v}{b}$ afnemen. Bij de waarde van x, volgende uit $\frac{da}{dx} = MRT\frac{db}{dx}$ is $\frac{v}{b} =$ oneindig, voor grootere waarden van x wordt $\frac{v}{b}$ steeds kleiner, en daar $\frac{v}{b}$ nimmer gelijk 1 kan worden, omdat $\frac{da}{dx}$ niet gelijk oneindig kan worden, is de lijn $v=b$ de tweede asymptoot. Er moet dus, als men x steeds laat toenemen, ook buiten de waarden, welke voor een bepaald gegeven tweetal componenten mogelijk zijn, ten einde de omstandigheden na te gaan, welke bij alle mogelijke systemen kunnen voorkomen, waarbij met positieve waarde van $\frac{db}{dx}$ ook steeds stijgende waarde van T_k voorkomt, een minimum volume op de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ voorkomen. Voor dat punt is dan ook $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{v1} = 0$.

Nu wij in hoofdtrekken beschreven hebben de twee krommen, welke den loop der p-lijnen beheerschen, zullen wij moeten aangeven op welke wijze zij dit doen.

Uit

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{pT} = -\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT}}$$

volgt dat aan een p-lijn een raaklijn kan getrokken worden $//x$-as, als zij door de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$ gaat, en een raaklijn $//v$-as, als zij door de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT}$ gaat. Maar ofschoon dit belangrijke eigenschappen zijn, zouden zij onvoldoende zijn ter bepaling van den loop der isobaren, zoo niet van een dezer lijnen in algemeene trekken de gedaante kon worden aangegeven. De lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ snijdt n.l. de lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ in twee punten, en het zijn deze twee punten welke voor den loop der p-lijnen van fundamenteele beteekenis zijn. Het snijpunt met den vloeistoftak is n.l. voor een bepaalde p-lijn een strikpunt, terwijl het tweede snijpunt een zoodanig geïsoleerd punt is, dat het als een tot een enkel punt samengetrokken p-kromme

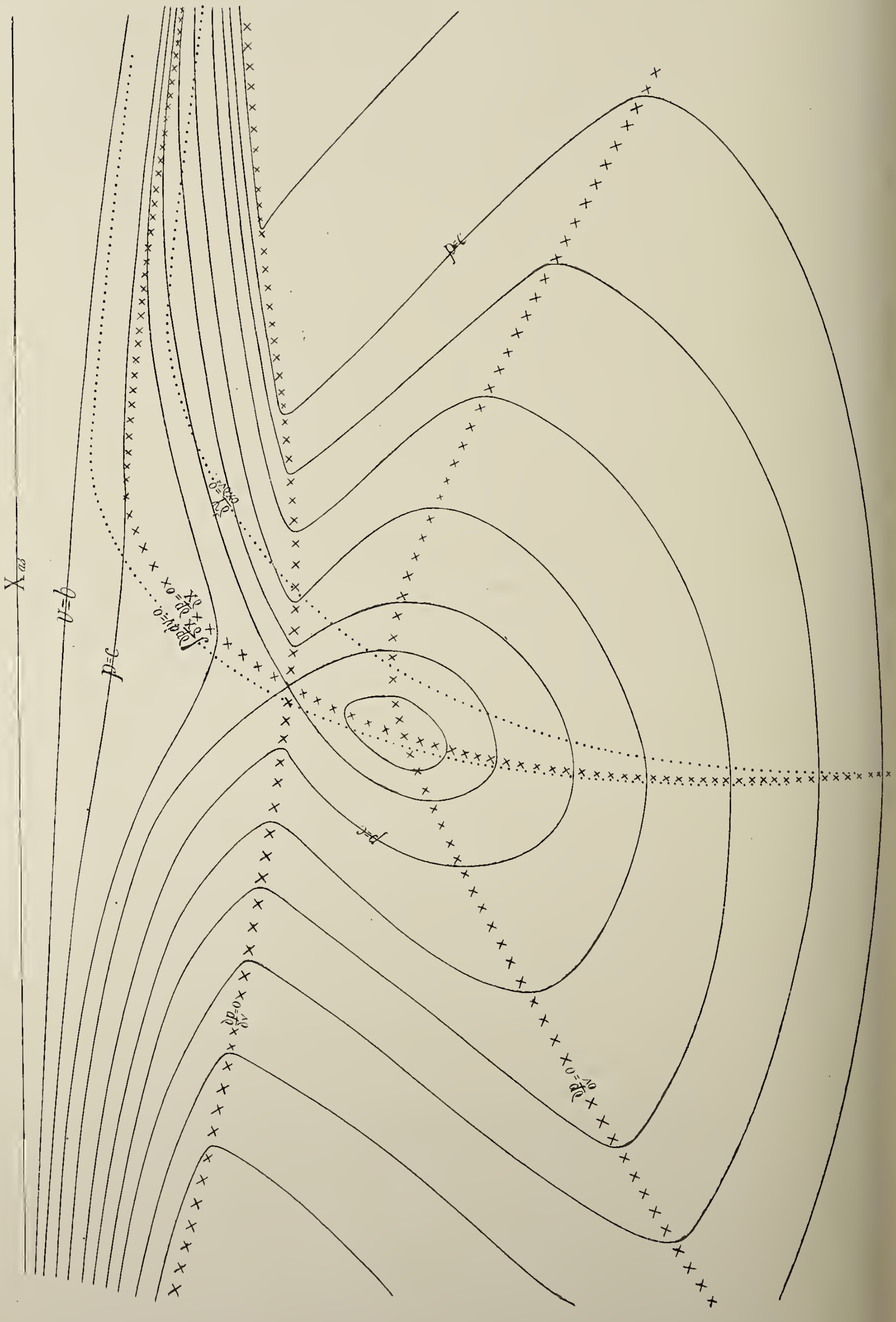


Fig. 1.

kan worden beschouwd. Het oppervlak $p = f(x, v)$ is namelijk in den omtrek van het eerst genoemde punt convex-concaaf. Van onder gezien is een doorsnede $//v$-as bol, en een doorsnede $//x$-as hol. Een plat vlak, evenwijdig aan het v, x-vlak, rakende aan het p-oppervlak snijdt dus dit oppervlak in twee reëele lijnen, volgens welke p even-groot is. Maar bij het tweede snijpunt zijn beide doorsneden hol van onderen gezien — en zijn geen reëele snijlijnen. Dat tweede punt is een werkelijk punt van maximum-druk. Bij al deze en vroeger genoemde en later te noemen eigenschappen wordt aange-nomen dat $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief is. [1])

Welnu, de lijn $p =$ constante, welke door het eerste snijpunt gaat, dat de krommen $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ gemeen hebben, is de isobare, waarvan wij den loop kunnen aangeven, welke loop te gelijkertijd beslissend is voor alle volgende, hetzij voor grootere of kleinere waarde van p. In de bijgevoegde fig. 1 is haar loop geteekend. Van links komende behoudt zij ook in het strikpunt hare richting naar rechts, steeds de bolle zijde naar de x-as gekeerd tot zij recht naar beneden gericht is in het punt, waar zij den damptak der lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ ontmoet. Daar heeft zij een raaklijn $//$ v-as en van daar heeft zij de holle zijde naar de x-as gekeerd. Als zij de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ ontmoet is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ voor deze, evenals voor alle isobaren, gelijk aan 0. Opnieuw door de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT}$ gaande is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ weder oneindig groot, en zet zij haren loop voort om voor de tweede maal door het strikpunt te gaan, en verder zich rechts te bewegen steeds naar kleinere waarde van v gaande, tot zij, als zij weder de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$ ontmoet opnieuw een raaklijn $//$ aan de x-as heeft, om dan verder naar grootere waarde van v te gaan. Het is duidelijk dat zij in den weg dien zij beschrijft van het strikpunt af tot zij voor de

---

[1]) Dat van de beide snijpunten der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ met de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ het karakter verschillend is blijkt o. a. daaruit, dat als die snijpunten samenvallen zooals het geval is wanneer deze krommen elkander raken, de grootheid $\frac{d^2p}{dv^2}\frac{d^2p}{dx^2} - \left(\frac{d^2p}{dx\,dv}\right)^2 = 0$ is. Het positief of negatief zijn dezer uitdrukking bepaalt het karakter der snijpunten.

tweede maal er door heengaat, geloopen is om het punt heen, dat wij het tweede snijpunt hebben genoemd met de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ en waarin maximumdruk aanwezig is. In fig. 1 zijn nu behalve deze isobare nog eenige andere geteekend. Den loop der isobaren voor lagere waarde van p verkrijgt men door van links af een kromme te trekken bij grootere waarde van v, en te bedenken dat twee p-lijnen van verschillende waarde van p elkander nimmer kunnen snijden, daar bij gegeven waarde van x en v de waarde van p éénwaardig is. Een dergelijke isobare snijdt de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ links van de strik-isobare in twee punten, waar $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p} = \infty$ is, gaat dan door de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ in een punt, waar $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{pT} = 0$ is, en heeft dan ook rechts van de strik-isobare weder twee snijpunten met de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$, in welke snijpunten weder $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{pT} = \infty$ is.

Een isobare van iets hoogere waarde van p is in twee geïsoleerde takken uiteengevallen. De eerste begint rechts bij iets kleinere waarde van v; verder volgt deze tak den gang der strikisobare maar mag haar niet snijden. In de nabijheid van het strikpunt aangekomen is hij gedwongen steeds bij kleine volumes te blijven; daar ontmoet hij de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{v} = 0$, en heeft hij $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p} = 0$. Van dan af beweegt hij naar kleinere volumes, tot een nieuw ontmoetingspunt met dezelfde kromme dezen tak er weder toe brengt naar grootere volumes af te wijken. Maar de tweede tak dezer isobare van hoogere waarde van p, is geheel ingesloten binnen den strik der strikisobare. Zulk een tak vormt een gesloten kromme loopende om het punt heen dat wij het tweede snijpunt hebben genoemd van de krommen $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{x} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{v} = 0$. Zulk een gesloten tak gaat tweemaal door $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{v} = 0$, en ook tweemaal door $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{x} = 0$, en heeft weder in de eerste gevallen $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p} = 0$, en de tweede snijpunten $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p} = \infty$.

Bij steeds klimmende waarde van p trekt zich het afgesnoerde

gedeelte der p-lijn meer en meer samen, tot het tot een enkel punt is samengetrokken. Bij nog hoogere waarde van p blijft dus slechts één enkele tak der p-lijn over. Een soortgelijke opmerking moet voor de lijnen van lagere waarde van p gemaakt worden. De kleinste waarde van p voor dampvolumes is natuurlijk $p = 0$; maar voor den minimumdruk der mengsels met gegeven waarde van x bestaat die grens niet. Daarvoor weten wij dat ook waarden van p kunnen voorkomen, welke sterk negatief zijn. Voor waarden van p welke negatief zijn, is de p-lijn dus weder in twee niet meer samenhangende deelen gescheiden, n.l. een gedeelte links in de figuur gelegen, en dat zich beperkt ziet tot volumes iets grooter en iets kleiner dan die van den vloeistoftak der kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ — en een dergelijk gedeelte rechts in de figuur gelegen.

Ook omtrent de meetkundige plaats der buigpunten van de isobaren kan de gegeven figuur ons inlichting geven. Zoo is het in de eerste plaats duidelijk dat tusschen de twee takken der kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ uitgaande van het strikpunt, zich zoowel links als rechts een aaneengeschakelde reeks van punten bevindt waarin $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = 0$ is. Mocht de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ zelve een dubbelpunt bezitten, wat het geval is als T juist de waarde heeft van T_k minimum, dan gaat die meetkundige plaats van de buigpunten der p-lijnen door dat dubbelpunt, en als de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ zich, zooals bij nog hoogere waarde van T het geval is, gesplitst heeft in 2 gescheiden gedeelten, dan behooren tot deze meetkundige plaats die punten der twee gedeelten waar $\frac{dv}{dx} = \infty$ is. Ook is uit de teekening onmiddellijk in te zien, dat er van het strikpunt uit nog twee reeksen van punten, eene rechts en eene links uitgaan, als meetkundige plaats der buigpunten en wel naar kleinere volumes.

Een isobare met iets grootere waarde van p dan die der strikisobare, heeft, waar zij door de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ gaat een raaklijn // aan de x-as. Rechts en links van dat punt keert zij haar holle zijde naar de x-as, terwijl zij op grooter afstand aan beide zijden, weder haar bolle zijde daarheen keeren moet. Er gaan dus van uit het strikpunt vier takken uit waarop $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = 0$ is. Van dien naar rechts

gaanden tak, welke zich naar kleinere volumes beweegt ziet men evenzeer gemakkelijk in, dat zij door dat punt der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ moet gaan waar de raaklijn // x-as is. Immers een isobare, welke links van dat punt door de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ gaat heeft haar holle zijde naar de x-as gekeerd, maar als zij rechts van dat punt voor de tweede maal door de genoemde kromme gaat haar bolle zijde. Een isobare, waarbij die twee doorgangen zijn samengevallen, heeft dus haar buigpunt in dat punt zelf. Wil men het geheele v,x-diagram verdeelen in gebieden, waarin $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ of positief of negatief is, dan moet echter niet worden over het hoofd gezien, dat ook de beide takken der lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ zelve, omdat op die lijn $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \infty$ is, als grenzen voor die gebieden optreden.

Bij dit alles is ondersteld dat $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief is. Immers de loop der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$, waaraan wij nu een bestaan konden toekennen rechts van de asymptoot, welke gegeven is door $MRT\frac{db}{dx} = \frac{da}{dx}$, zou integendeel naar links van deze asymptoot gericht zijn als $\frac{d^2a}{dx^2}$ negatief zou zijn, dus als $2a_{12} > a_1 + a_2$ kon zijn. Immers daar $\left(\frac{v}{v-b}\right)^2 = \frac{\frac{da}{dx}}{MRT\frac{db}{dx}}$ is, neemt de waarde van $\frac{v}{b}$ alleen af, als $\frac{da}{dx}$ toeneemt. Stellen wij $a = A + 2Bx + Cx^2$, en dus $\frac{da}{dx} = 2(B + Cx)$ dan blijkt dat met C negatief x moet afnemen, om $\frac{da}{dx}$ te doen toenemen.

Voor de punten dezer lijn zou dan p bij gegeven v een minimum waarde bezitten en dus $\frac{d^2p}{dx^2}_v$ positief zijn. Daaruit volgt dan dat de twee snijpunten dezer lijn met de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ hun rollen hebben verwisseld. Het snijpunt met het kleinste volume stelt dan

een werkelijk minimum van p voor, en zal voor den loop der p-lijnen dezelfde beteekenis hebben, welke het tweede snijpunt bezit als $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief is. En het snijpunt met het grootste volume is nu strikpunt geworden. Ik heb echter de teekening voor dat geval maar achterwege gelaten, 1°. omdat waarschijnlijk het geval niet werkelijk voorkomt, en 2°. omdat de teekening zich van zelve, door de omkeering van de vorige, doet vinden. Er zijn bijv. bij oplossing van zouten in water wel gevallen, die oppervlakkig gezien, overeenkomst vertoonen met de onderstelling $\frac{d^2a}{dx^2}$ negatief, maar waarbij toch heel andere invloeden den toestand beheerschen, dan zulk een pseudo-negatief zijn van $\frac{d^2a}{dx^2}$.

Zulk een teekening voor het geval $\frac{d^2a}{dx^2}$ negatief, zou zich anders geheel laten aansluiten aan de rechterzijde van de fig. 1. Daar in de gegeven figuur aan de rechterzijde T_k toeneemt met x, en er bij de onderstelling $\frac{d^2a}{dx^2}$ een maximum-waarde van T_k is, zou fig. 1 nog naar rechts verbreed kunnen worden tot zulk een maximum T_k bereikt was. Maar dan zou ook voor zekere waarde van x, men moeten veronderstellen dat er een waarde van x of liever een mengsel kon bestaan waarbij bij zekere waarde van x de grootheid $\frac{d^2a}{dx^2}$ van teeken verandert.

Elke strook der fig. 1, van zekere breedte, welke evenwijdig aan de v-as genomen wordt, kan nu, voor $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ positief, uitgesneden worden om den loop der isobaren aan te geven. Strooken aan de linkerzijde, geven den loop der isobaren, voor mengsels waarbij met toenemende waarde van b de kritische temperatuur afneemt — strooken aan de rechterzijde voor mengsels waarbij met toenemende waarde van b de kritische temperatuur toeneemt — de middenstrook, met den gecompliceerden loop der isobaren als er een minimum T_k aanwezig is. De linkerstrook zou tot een uiterst smalle strook ineengedrongen zijn, als men het geval $\frac{da}{dx}$ negatief of $\frac{da}{dx} = 0$ zou willen buitensluiten. Zoo iets doet men als men $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ stelt. Er is bij zulk een onderstelling nog wel een minimum T_k mogelijk, maar de linkerstrook moet dan een uiterst geringe breedte bezitten. Er is echter voor de onderstelling $a_1 a_2 = a_{12}^2$ geen redelijke grond.

Die zou er zijn als de grootheid a voor de verschillende stoffen alleen van de molekulairgewichten afhing en dus $a = \varepsilon m^2$ gold met een constante waarde van ε. Laat men de attractie, even als bij NEWTON'sche attractie, van de massa der molekulen afhangen en stelt men dus $a_1 = \varepsilon_1 m_1^2$, en evenzoo $a_2 = \varepsilon_2 m_2^2$, dan blijkt dat ε_1 en ε_2 niet gelijk zijn. Stelt men nu $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, dan stelt men $a_{12} = m_1 m_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Welke redelijke grond bestaat er nu voor de onderstelling dat, als er een specifieke factor ε_1 is voor de attractie der molekulen der eerste soort onderling, waarvan wij niet weten met welke eigenschap dezer molekulen zij samenhangt, en er evenzoo een geheel andere specifieke factor ε_2 is voor de attractie van de tweede stof onderling, wij de specifieke factor voor de attractie van de verschillende molekulen onderling niet moeten voorstellen door ε_{12} maar door $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. 't Is waar dat door die onderstelling de berekeningen eenvoudiger worden, en daarop had ik reeds gewezen in mijn Théorie Moléculaire (Cont. II, pag. 45). Maar het meer of minder gemakkelijke der berekeningen schijnt mij toch niet voldoende grond om een onderstelling in te voeren, die tot gevolg heeft, dat er natuurlijk heel wat mogelijke gevallen, o. a. ook voor den loop der spinodale lijn, worden buitengesloten. Stellen wij alle mogelijkheden voor de waarde van a_{12}, dan kan ook $\frac{da}{dx} = 0$ zijn en wel bij $\frac{x}{1-x} = \frac{a_2 - a_{12}}{a_1 - a_{12}}$. Zoo vèr behoeft men echter niet te gaan om ook de linkerstrook een voldoende breedte te geven.

DE LOOP DER q-LIJNEN.

De waarde van $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_v = q$ wordt uit de waarde van ψ gevonden:

$$q = MRTl\frac{x}{1-x} + \int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv.$$

Voor $x = 0$ is deze uitdrukking negatief oneindig, voor $x = 1$ is zij positief oneindig, zoodat wij hebben $q_0 = -\infty$ en $q_1 = +\infty$.

Maar eveneens volgt uit de toestandsvergelijking dat voor alle waarden van x de waarde van $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv$ insgelijks positief oneindig groot is voor de lijn $v = b$. Het is waar dat voor zulke kleine volumes de toestandsvergelijking $p = \frac{MRT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ niet nauwkeurig is,

als men b niet van v laat afhangen, en de schijnassociatie in den vloeistoftoestand buiten rekening laat, en dat de conclusie $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv$ is voor v gelijk het grensvolume oneindig groot nadere overweging noodzakelijk maakt alvorens wij dit als onomstootelijke waarheid mogen aannemen. Maar het komt mij voor dat eenvoudige overwegingen tot deze conclusie leiden. In het grensvolume is p oneindig groot, en als b met x toeneemt $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ oneindig groot van hoogere order, terwijl $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv$ de orde van oneindigheid weder met een eenheid kan verminderen, wijl slechts over een oneindig kleine waarde van dv de factor van dv dezen hoogeren graad van oneindigheid bezit. Maar dan blijft toch nog de stelling waar dat $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv$ voor $v = b$ oneindig groot is.

Er is dus sterke asymmetrie in de gedaante der q-lijnen. Terwijl $q = -\infty$ geldt voor $x = 0$ en elke waarde van $v > b_1$, is $q = +\infty$ voor de geheele lijn der grensvolumes en voor alle volumes op de lijn $x = 1$, welke grooter dan b_2 zijn. Daar leiden wij onmiddellijk uit af, dat alle q-lijnen, zonder onderscheid uitgaan van het punt $x = 0$ en $v = b_1$. In dit punt is de waarde van q onbepaald, gelijk ook volgt uit de waarde van q zooals de benaderde toestandsvergelijking die levert n. l.

$$q = MRT\, l \frac{x}{1-x} + MRT \frac{\frac{db}{dx}}{v-b} - \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

Voor het genoemde punt is de eerste term van het tweede lid gelijk $-\infty$, en de tweede term gelijk $+\infty$. Het verschil dezer twee termen kan alle waarden aannemen.

Insgelijks volgt uit de benaderde toestandsvergelijking dat alle q-lijnen in hun beginpunt raken aan de lijn $v = b$, natuurlijk met uitzondering van de lijn $q = -\infty$. Men leidt toch af uit $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_v = q$

$$\left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)_q + \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

of

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_q = -\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d^2\psi}{dxdv}}$$

Voor $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ levert de benaderde toestandsvergelijking:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{MRT}{x(1-x)} + \frac{MRT\,\frac{d^2b}{dx^2}}{v-b} + \frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v}.$$

De waarde van $-\frac{d^2\psi}{dxdv} = \left(\frac{dp}{dx}\right)$ vonden wij hier boven reeds. Voor $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ vinden wij dus:

$$\frac{dv}{dx_q} = \frac{\frac{MRT}{x(1-x)} + \frac{MRT}{v-b}\frac{d^2b}{dx^2} + \frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v}}{\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{1}{v^2}}$$

vermenigvuldigen wij teller en noemer met $(v-b)^2$ en stellen wij dan $v = b$, dan vinden wij in het beginpunt der q-lijnen $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{db}{dx}$ — tenminste als wij kunnen aantoonen dat $\frac{(v-b)^2}{x}$, voor $x = 0$ en $v = b_1$, gelijk is aan nul. Om dat aan te toonen schrijven wij $b = b_1 + \beta x + \gamma x^2$, en dus $v - b = (v - b_1) - x\beta - \gamma x^2$ en vinden dan voor $(v-b)\,\frac{v-b}{x}$ de waarde:

$$(v-b)\left\{\frac{v-b_1}{x} - \beta - \gamma x\right\}$$

De term $\frac{v-b_1}{x}$ is onbepaald, maar dat neemt niet weg, dat vermenigvuldigd met $v-b$ de gegeven waarde inderdaad gelijk aan nul is. Ook deze uitkomst is, als alleen verkregen met behulp der slechts bij benadering bekende toestandsvergelijking, nog aan nadere overweging te onderwerpen. En dan moet ik erkennen dat ik geen afdoend bewijs voor deze stelling kan geven. Alleen heb ik gemeend met vrij groote zekerheid dat te mogen aannemen omdat ik in al dergelijke gevallen, waar een gansche groep van krommen uit één hoekpunt uitgaat, bijv. bij de destillatielijnen van een ternair stelsel, deze stelling dat zij dan ook allen aan een zijde van den hoek raken, heb bevestigd gevonden. Alleen in hooge uitzonderingsgevallen gaat dan de stelling niet door.

Daarenboven zijn de stellingen die ik voor den verderen loop der q lijnen zal geven, van de beginrichting dezer lijnen onafhankelijk.

Alleen vertoonen de q lijnen zelven een natuurlijker gang als haar beginrichting de aangegevene is dan in het tegenovergestelde geval.

Uit de hierboven gegeven waarde voor $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ volgt dat zij een raaklijn hebben // v-as als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ is, en een raaklijn // x-as als $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ is. In een gebied, waarin de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ niet voorkomt hebben zij dus een zeer eenvoudigen loop. Beginnende in het punt $x = 0$ en $v = b_1$, bewegen zij zich steeds naar rechts en naar grooter volume en is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ steeds positief. In zulk een gebied zijn dan ook èn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ en zooals straks blijken zal $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ steeds positief.

Naarmate v grooter wordt nadert de waarde van q tot $MRTl\frac{x}{1-x}$ en voor zeer groote waarde van v kunnen de q lijnen beschouwd worden als lijnen evenwijdig aan de v-as, waarvoor de verdeeling over de breedte van $x = 0$ tot $x = 1$ symmetrisch is. De lijnen waarvoor q negatief is strekken zich dus uit van $x = 0$ tot $x = \frac{1}{2}$ en voor $x = \frac{1}{2}$ is de waarde van $q = 0$. Alleen zal later blijken dat in hun loop toch waarschijnlijk steeds twee buigpunten voorkomen bij kleine volumes, iets waarop ik voor het eerst opmerkzaam werd door een opmerking van Dr. KOHNSTAMM, die uit geheel andere verschijnselen tot de aanwezigheid van zulke buigpunten in de q lijnen besloten had.

Maar zoodra de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ aanwezig is, (over het geval dat ook $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ zijn kan, spreken wij later) komt er een nieuwe bijzonderheid in den loop der q-lijnen. Een q-lijn n.l. welke deze meetkundige plaats snijdt heeft in het snijpunt een raaklijn // v-as, en keert dan in zoover haren loop om dat zij verder zich niet meer naar grootere waarde van x beweegt, maar naar kleinere waarde van x terugloopt — zoodat $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$, dat in den beginne steeds positief is, voortaan negatief is. Van dat punt af waar zij de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ snijden, en waar $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ negatief oneindig kan geacht worden, wordt deze grootheid kleiner negatief. Toch moet voor $v = \infty$, de q-lijn

weder // v-as loopen. En moet dus onderweg opnieuw een buigpunt in de q-lijn aanwezig zijn. In fig. 2 is deze loop der q-lijnen vast-

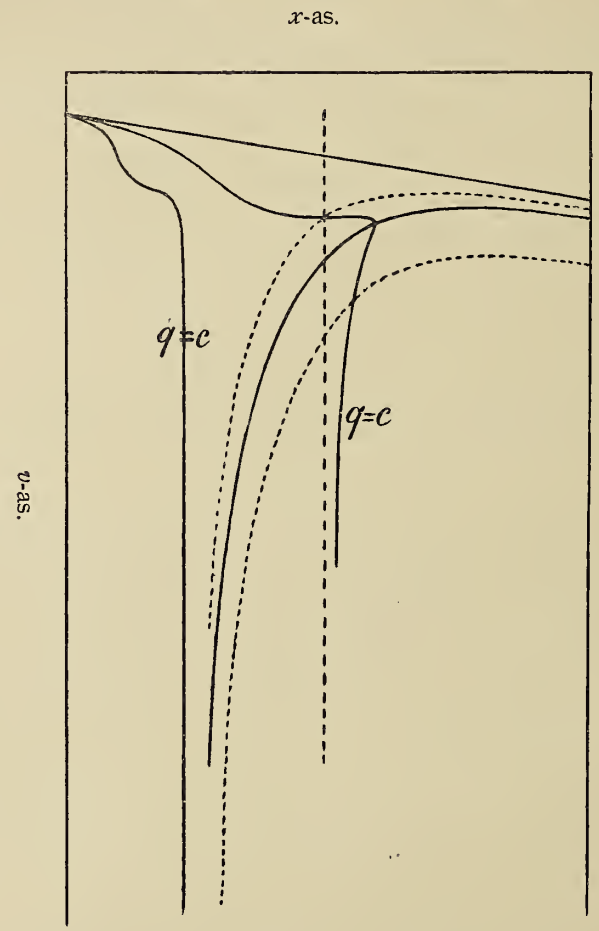


Fig. 2.

gesteld, zoowel in het eerstgenoemde geval als zij de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ niet snijden en als zij dat wel doen. In het laatste geval hebben zij onderweg zich reeds bij grootere waarde van x bewogen, dan waarin zij eindigen. Zij eindigen asymptotisch aan een lijn $x = x_c$, en bij veel kleiner volume gaan zij evenzeer door een punt $x = x_c$. Het punt waarin zij bij kleiner volume dezelfde waarde van x hebben als waarmede zij eindigen, ligt op een meetkundige plaats, welke een gedaante heeft welke met de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ groote overeenkomst vertoont. De waarde voor de punten dezer meetkundige plaats kan op de volgende wijze worden afgeleid.

Schrijven wij $\psi = MRT\{(1-x)\ log\ (1-x) + x\ log\ x\} + \int_v^\infty p dv$

dan is $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_v = q = MRT\, l\, \frac{x}{1-x} + \int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv.$

Bij oneindig volume is de waarde van q, zooals wij hier boven zagen $MRT\, l\, \frac{x}{1-x}$. De besproken meetkundige plaats moet dus bepaald zijn door $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv = 0$. Er moet dus op $x =$ de eindwaarde, een punt gezocht worden zoodanig, dat langs die zelfde x lijn voortgaande $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right) dx = 0$ is. Er volgt dus onmiddellijk hieruit dat de punten der besproken meetkundige plaats zich 1° beperken tot die waarden van x, waarin x kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ voorkomt, 2° dat de punten te zoeken zijn bij kleinere volumes dan die van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Voor zulke punten met kleiner volume is n.l. $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ positief, en voor punten met grooter volume negatief — trouwens als het volume met dat van een gasvolume gelijkgesteld kan worden is deze negatieve waarde van uiterst klein bedrag. En reeds zonder de vergelijking $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv$ op te maken besluiten wij dat de besproken meetkundige plaats dezelfde x-asymptote heeft als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ zelve, en verder te zoeken is bij kleinere volumes. Zij zal dus ook een punt bezitten waarin haar raaklijn // x-as loopt. Trouwens er is een gansche reeks van meetkundige plaatsen aan te geven, voor onze theorie van meer of minder belang die een analogen loop hebben als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right)_v dv = 0$.

De laatstgenoemde is uit $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ verkregen door integratie naar v, alle differentiaalquotienten der zelfde functie $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ naar v gelijk 0 ge-

steld, hebben een analogen loop — zoo is $\frac{d^2p}{dxdv} = 0$ een meetkundige plaats voor onze theorie van groot belang. Dat zij de zelfde x asymptote heeft als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ zelve, en al haar andere punten bij grootere waarde van v te vinden zijn volgt onmiddellijk uit de volgende overweging. Voor een punt der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ is de waarde van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ gelijk nul. Voor punten van dezelfde x en kleinere v is dezer waarde positief — maar voor punten met grootere v negatief. Voor $v = \infty$ is deze negatieve waarde echter weder tot 0 teruggekeerd. Er moet dus bij zeker volume grooter dan dat waarvan deze waarde $= 0$ was een maximum negatieve waarde zijn geweest. Dat zijn de punten waarvoor $\frac{d^2p}{dxdv} = 0$ is. Voor kleinere waarde van het volume is dus $\frac{d^2p}{dxdv}$ negatief — daarentegen voor grootere volumes positief. De benaderde toestandsvergelijking levert voor de genoemde meetkundige plaatsen en verdere volgende deze betrekkingen:

$$\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{\frac{da}{dx}}{v} \text{ voor } \int_v^\infty \frac{dp}{dx}\,dv = 0$$

$$\frac{\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^2} \text{ voor } \left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$$

$$\frac{\frac{db}{dx}}{(v-b)^3} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^3} \text{ voor } \left(\frac{d^2p}{dxdv}\right) = 0.$$

En zoo verder.

Maar keeren wij na deze uitwijding terug tot de beschrijving van den loop der q-lijnen. Zoodra een q-lijn gaat door de meetkundige plaats $\int_v^\infty \left(\frac{dp}{dx}\right) dv = 0$, is door de waarde van x voor dat snijpunt ook de asymptoot bekend, waartoe zij bij oneindig volume zal moeten naderen. Voorloopig gaat zij nog wel in haar richting naar grootere waarde van x voort, maar als zij de meetkundige plaats $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$

ontmoet, heeft zij de grootste waarde van x, en een raaklijn $// v$-as. Vandaar af beweegt zij zich naar kleinere waarde van x terug.

En hiermede zouden de complicaties in den loop der q-lijnen besproken zijn, als er in vele gevallen bij waarden van T, waarbij nog niet de vaste toestand is opgetreden, niet nog een meetkundige plaats bestond die de q-lijnen in haar loop sterk wijzigen kan, en zooals wij later zullen zien, zoo sterk dat er driephasendruk het gevolg van zijn kan. De grootheden $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ komen in de vergelijking der spinodale lijn op dezelfde wijze voor. Daaruit is reeds af te leiden dat het bestaan der meetkundige plaatsen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, voor de bepaling van den loop der spinodale lijn van gelijke beteekenis zal zijn. Dat tot hiertoe dan ook bijna uitsluitend de aandacht gevallen is op $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ is daaraan te wijten dat wij zeker weten dat een gegeven binair mengsel bij waarden van T beneden T_k voor dat mengsel punten voor een dergelijke meetkundige plaats levert, terwijl de voorwaarden voor het bestaan van een meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ niet bekend zijn — en er misschien vermoed kon worden dat dit beperkt bleef tot temperaturen zoo laag dat de vaste toestand zou zijn ingetreden, en dus toch de complicaties die daardoor zouden intreden niet zouden kunnen worden waargenomen. Dat een dergelijk vermoeden niet geheel ijdel is, kunnen wij door het gedrag van vele mengsels, die geheel beantwoorden aan de beschouwingen waarbij de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ buiten rekening is gelaten, ook nu nog veilig aannemen. Maar dat het gedrag van mengsels, waarbij gecompliceerdere verschijnselen voorkomen, niet verklaard kan worden, zonder ook in aanmerking te nemen dat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ kan zijn, schijnt mij evenzeer boven bedenking.

De benaderde toestandsvergelijking geeft voor deze grootheid de volgende waarde:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{MRT}{x\,(1-x)} + \frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} + \frac{MRT\,\frac{d^2b}{dx^2}}{v-b} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v}$$

welke ik door aan te nemen dat b lineair van x afhangt, en dus $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$ is, nog iets vereenvoudigen zal. Wij kunnen uit dezen vorm

gemakkelijk afleiden dat, als $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ kan zijn, dit het geval zal zijn in een gesloten kromme. Aan de grenzen van het v,x-diagram is $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ zeker positief. Voor $x = 0$ en $x = 1$ zelfs oneindig groot. Eveneens voor $v = b$. En voor $v = \infty$ reduceert zij zich tot $\frac{MRT}{x(1-x)}$, waarvan de minimum waarde gelijk is aan 4 MRT. Dat zij als T maar laag genoeg genomen wordt negatief kan zijn als ten minste $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief is, is evenzeer duidelijk. Bij uiterst lage waarde van T zal zij een vrij groot gedeelte van het v,x-diagram, voornamelijk te zoeken in het gebied der kleine volumes kunnen innemen. Als de temperatuur stijgt krimpt deze meetkundige plaats in, en bij zekere maximumtemperatuur voor haar bestaan, reduceert zij zich tot een enkel punt. Boven zekere temperatuur is zij dus niet meer aanwezig.

(*Wordt vervolgd*).

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling:

„Over de bewerking van wind-waarnemingen."

1. Bij de bewerking van windwaarnemingen stuit men op het bezwaar, dat eene algemeen geldende methode van bewerking, waarbij de karakteristieke eigenaardigheden van een wind-régime, in gedrongen vorm, op den voorgrond treden, niet bestaat. De sinds lange jaren gevoerde discussie omtrent het al dan niet wenschelijke eener toepassing van LAMBERT's formule, d. i. van de berekening van de vektorieele gemiddelde van snelheid of kracht, heeft niet tot een bepaald resultaat geleid en het gevolg is, dat voor streken waar passaaten moesson-winden heerschen, de berekening van deze gemiddelde wél, voor hoogere breedten geene toepassing vindt, zoodat men hier op uitvoerige tabellen van frequenties van richtingen en gemiddelde snelheden, onafhankelijk van richting, is aangewezen.

Bij de bewerking der windwaarnemingen te Batavia heb ik niet geaarzeld van deze formule een uitgebreid gebruik te maken; in den atlas voor den Indischen Oceaan is dezelfde methode gevolgd; maar, ten einde althans een begrip te geven van de waarde der hierbij elkander opheffende snelheden, heb ik aan de resulteerende beweging (door HANN *windweg* genoemd) toegevoegd een z.g. factor van standvastigheid. Ware n.l. de wind volstrekt standvastig, dan zou de

vektorieele gemiddelde gelijk zijn aan de gemiddelde onafhankelijk van de richting en de standvastigheid zou 100 % bedragen, welk percentage steeds kleiner wordt, naarmate de windrichting meer veranderlijk is. Hierbij wordt dus wel de aandacht gevestigd op het feit, dat een gedeelte der waarnemingen is geëlimineerd, maar niet aangegeven welk karakter dit verdwijnend gedeelte, dat in onze streken hoofdzaak wordt, draagt.

In den onlangs verschenen klimatologischen atlas van Engelsch Indie is dezelfde methode gevolgd; in de „Klima Tabeller for Norge" geeft MOHN echter alleen de bovengenoemde tabellen, zonder berekening van de vektorieele gemiddelde, 't geen voor dit klimaat ook van weinig beteekenis zou zijn.

Dezelfde onzekerheid vindt men ook bij de graphische voorstelling van een windrégime door z.g. windrozen; bijna ieder, die zich met de samenstelling van plaatwerken heeft bezig gehouden, heeft een eigen windroos ontworpen; sommige dier rozen, als b.v. in de „Vierteljahrskarte für die Nordsee und Ostsee", uitgegeven door de „Deutsche Seewarte", geven alleen frequenties van richtingen, zonder snelheden, in andere, als b.v. die welke in bovengenoemden atlas van Nederl. Indië zijn gegeven, is elke richting in rekening gebracht met de bijbehoorende snelheid als gewicht, zoodat gemiddelde snelheden zijn voorgesteld. Alle deze rozen geven discontinue grootheden en veranderen dus van aanzien naarmate de grenzen anders worden genomen.

In BUCHAN's algemeenen meteorologischen atlas worden geen windrozen gegeven, alleen pijltjes, die de meest frequente richting aangeven, zonder in achtneming van de kracht en in het „Segelhandbuch für den Atlantischen Ozean" uitgegeven door de „Deutsche Seewarte" wordt, voor hooge breedten, waar de wind veranderlijk is, zelfs geheel en al afgezien van een gebruik van windwaarnemingen en zijn pijltjes geteekend overeenkomstig het verloop der gemiddelde isobaren op grond van de wet van BUYS BALLOT, waarbij een constante hoek van 68° tusschen gradiënt en windrichting is aangenomen.

Uit dit kort overzicht van de wijze waarop in de meest recente standaardwerken dit probleem is behandeld moge blijken, dat er inderdaad, zooals reeds is opgemerkt, van eene bevredigende oplossing nog geen sprake is.

Het doel dezer mededeeling is eene algemeen geldende methode van bewerking en voorstelling van een willekeurig windrégime aan te geven, waarin ook het veranderlijk gedeelte tot zijn recht komt, terwijl de graphische voorstelling vloeiend verloopt en met een oog-

opslag de vijf karakteristieke grootheden doet kennen, die voor elk windrégime kenmerkend zijn en dus de *wind-constanten* kunnen genoemd worden.

De hier voorgeslagen methode berust op den grondslag der waarschijnlijkheidrekening; maar het is van belang op te merken, dat zij hieraan geenszins is gebonden; in den grond is zij dezelfde die algemeen bij de behandeling van gerichte grootheden: verdeeling van massa's en krachten in de mechanica, de elasticiteitsleer, de wetten der straling en de fouten-leer in een vlak, toepassing vindt.

2. Eene windwaarneming kan worden voorgesteld door een punt in een vlak, zoodanig, dat de afstand tot een aangenomen punt van oorsprong eene maat is voor de windsnelheid (of kracht) en de hoek, dien de voerstraal maakt met de Y (Noord) as, geteld van Noord naar Oost, de richting aangeeft. Zijn op deze wijze alle waarnemingen, N in getal, geteekend, en denkt men zich aan elk punt eene gelijke massa verbonden, dan zal, in het algemeen, het zwaartepunt niet met den gekozen oorsprong samenvallen; zijne ligging moge bepaald zijn door de grootheden R_0 en α. De verdeeling der massa's rondom het zwaartepunt wordt dan gekenmerkt door de lengten M en M' der beide hoofd-inertie-assen en den hoek β, die door de assen M en Y wordt ingesloten.

Zooals bekend is, kunnen de vijf constanten, waardoor zulk een systeem wordt gekenmerkt, volgens deze zuiver mechanische opvatting, worden berekend door de bepaling der momenten M_x en M_y om de assen en van de inertie-momenten M_x^2 en M_y^2 en M_{xy}, waardoor men de vijf vergelijkingen verkrijgt, noodig voor de berekening der onbekenden.

Tot volkomen dezelfde vergelijkingen geraakt men, indien de verdeeling der winden, naar richting en snelheid, wordt opgevat als een systeem van toevallige, gerichte grootheden in een plat vlak. Het zwaartepunt stelt dan voor, naar grootte en richting, het constante gedeelte van den wind, dat aan alle waarnemingen verbonden wordt geacht en waarvan de waarschijnlijkheid dus gelijk is aan de eenheid; de inertie-assen worden hoofd-waarschijnlijkheid-assen, en de lengten M en M' worden vervangen door de reciproke lengten h en h' zoodat:

$$h^2 = \frac{1}{2M^2} \quad , \quad h'^2 = \frac{1}{2M'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De som der massa's wordt gelijk aan de eenheid gesteld, en voor de waarschijnlijkheid, dat eene waarneming ligt tusschen de grenzen R en $R + dR$ van snelheid, en θ en $\theta + d\theta$ wat richting aangaat, geldt de uitdrukking:

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-f(R,\theta)} R\, dR\, d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin:

$$f(R,\theta)=h^2 [R\cos(\theta-\beta)-R_0\cos(\alpha-\beta)]^2+h'^2[R\sin(\theta-\beta)-R_0\sin(\alpha-\beta)]^2. \quad (3)$$

In de taal der foutenleer zou (R_0,α) de z.g. constante fout, M en M' de grootste en kleinste projecties der middelbare fouten voorstellen. Daar windwaarnemingen in nog mindere mate dan andere meteorologische grootheden, passen in de opvatting die in de foutenleer geldt, waarbij het constant gedeelte als het doel der bewerking, de veranderlijke grootheden als afwijkingen worden beschouwd, is het wenschelijk zich bij de toepassing der waarschijnlijkheidrekening op grootheden van dezen aard, geheel en al vrij te houden van de terminologie, die in de foutenleer gang- en bruikbaar is, maar die hier alle beteekenis mist en tot misverstand aanleiding zou geven. Ook moet de bewerking eenigszins verschillen van die van foutieve grootheden, daar het, zooal niet onmogelijk, dan toch onpraktisch zou zijn alle waarnemingen voor het constant gedeelte te corrigeeren.

3. Als voorbeelden van behandeling zijn uit het bewerkte materiaal gekozen twee reeksen van waarnemingen.

a. Windwaarnemingen verricht te Bergen (Noorwegen) gedurende de 20 jaren 1885—1904, drie malen daags op de uren 8 vm., 2 nm. en 8 nm. De snelheid (of kracht) van den wind is uitgedrukt in de z.g. halve Beaufortschaal (1—6). (Jahrbuch des Norwegischen Meteorol. Instituts, Christiania).

b. Windwaarnemingen verricht te Falmouth (Kanaal), gedurende de 17 jaren 1874—1886 en 1900—1903; de observaties gedaan in de jaren 1887—1899 zijn gepubliceerd in een vorm, die voor dit onderzoek niet bruikbaar was.

Gebruikt zijn waarnemingen gedaan zes malen daags op de uren: middag, 4 nm., 8 nm., middern. 4 vm. en 8 vm.; de windsnelheid is uitgedrukt in Engelsche (Statuut) mijlen per uur. (Hourly readings obtained from the selfrecording instruments etc. London).

Ten opzichte van de bij Bergen geschatte windkracht moge opgemerkt worden, dat in deze mededeeling deze schaalwaarden zijn opgevat, niet als krachten, maar als snelheden, ofschoon zij in werkelijkheid noch het een, noch het ander zijn. Volgens een recent, uitvoerig onderzoek [1]) kan de verhouding der Beaufortwaarden tot

[1]) The Beaufort scale of windforce.
Report of the Director of the Meteor. Office upon an Inquiry into the Relation between the Estimates of Windforce according to Admiral Beaufort's Scale and the velocities recorded by Anemometers. London, 1906.

correspondeerende windsnelheden worden aangegeven door de volgende getallen:

Beaufort	snelheid M. p. S.	verhouding	Beaufort	snelheid M. p. S.	verhouding
0	1.34	—	6	10.95	1.83
1	2.24	2.24	7	13.41	1.92
2	3.58	1.79	8	16.09	2.01
3	4.92	1.64	9	19.67	2.19
4	6.71	1.68	10	23.69	2.34
5	8.72	1.74			

Daar de verschillende snelheden niet in gelijken getale voorkomen, zou de totaal-gemiddelde uit deze verhoudingen geen bruikbaren reductiefactor voor gemiddelde Beaufort-waarden opleveren en moet dus aan elke verhouding een zeker gewicht worden toegekend. Hiervoor is gebruik gemaakt van de frequenties der 36000 windsnelheden waargenomen te Falmouth, gerekend over het geheele jaar; op deze wijze is voor den reductiefactor gevonden 1.83; de Engelsche maat, mijlen per uur, kan tot M. p. S. en Beaufortschaaldeelen worden herleid door vermenigvuldiging respectievelijk met:

0.447 en 0.244.

4. De berekening der vijf kenmerkende constanten van een windrégime komt neer, eenerzijds op de integratie van (2), anderzijds op de bij deze integratie aangewende hulpmiddelen op een gegeven stel waarnemingen.

De integratie van (2) geschiedt door invoering van rechthoekige coördinaten:

$$x = R \sin \theta \quad , \quad y = R \cos \theta,$$

waarbij het element $RdRd\theta$ door het element $dxdy$ wordt vervangen terwijl de grenzen, die waren: voor R, ∞ en 0, en voor θ, 2π en 0, nu worden ∞ en $-\infty$.

Voorts wordt de uitdrukking (2) onder het integraalteeken achtereenvolgens vermenigvuldigd met;

$$x,\ y,\ x^2,\ y^2 \text{ en } xy$$

Stelt men vervolgens:

$$R_0 \cos(\alpha - \beta) = a \qquad x = x' \sin \beta + y' \cos \beta$$
$$R_0 \sin(\alpha - \beta) = b \qquad y = x' \cos \beta - y' \sin \beta,$$

dan kunnen de veranderlijken x' en y' gescheiden worden en de integratie uitgevoerd; men vindt op deze wijze voor de bepaling der vijf gezochte grootheden, de vijf vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= a\cos\beta - b\sin\beta, \quad M_y = a\sin\beta + b\cos\beta \\ M_x^2 &= \frac{\cos^2\beta}{2h^2} + \frac{\sin^2\beta}{2h'^2} + a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta - ab\sin 2\beta \\ M_y^2 &= \frac{\sin^2\beta}{2h^2} + \frac{\cos^2\beta}{2h'^2} + a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta + ab\sin 2\beta \\ 2M_{xy} &= \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h'^2}\right)\sin 2\beta + (a^2 - b^2)\sin 2\beta + ab\cos 2\beta \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

waaruit verder, wegens (1)

$$\left.\begin{aligned} M_x &= R_0\cos\alpha, \quad M_y = R_0\sin\alpha \\ M_x^2 + M_y^2 - [(M_x)^2 + (M_y)^2] &= M^2 + M'^2 \\ M_x^2 - M_y^2 - [(M_x)^2 - (M_y)^2] &= (M^2 - M'^2)\cos 2\beta \\ 2M_{xy} - 2M_xM_y &= (M^2 - M'^2)\sin 2\beta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

TABEL I. Frequenties van den wind.

Bergen. Juni.

In halve Beaufort-schaalwaarden.

	0	1	2	3	4	5	Som
C	261	—	—	—	—	—	261
N		59	30	29	5	2	125
NNE		6	6	1	—	—	13
NE		6	2	—	—	—	8
ENE		3	2	—	—	—	5
E		13	—	—	—	—	13
ESE		4	1	—	—	—	5
SE		24	3	1	—	—	28
SSE		40	16	3	—	—	59
S		115	54	22	6	—	197
SSW		56	39	15	4	—	114
SW		25	10	2	2	—	39
WSW		9	2	—	—	—	11
W		98	26	5	—	—	129
WNW		99	24	1	—	—	124
NW		190	51	6	—	—	247
NNW		246	118	46	12	—	422
Som	261	993	384	131	29	2	1800

5. Ten einde de formules (4) toe te passen op een gegeven stel waarnemingen, heeft men, voor elk beschouwd tijdvak, b.v. elke maand, in de eerste plaats eene frequentie-tabel van richting en snelheid samen te stellen, 't geen met geringe moeite kan geschieden. In Tabel I (zie p. 709) is eene dergelijke samenstelling als voorbeeld gegeven.

Voorts zijn hieruit berekend de producten dezer frequenties f met de schaalwaarden R, de laatste dubbel gerekend, zoodat de producten in de gewone Beaufortschaal zijn uitgedrukt; eindelijk zijn deze producten nogmaals met de correspondeerende schaalwaarden vermenigvuldigd (fR^2); op deze weinig bewerkelijke wijze vindt men de sommen.

TABEL II.

	fR	fR^2		fR	fR^2
N	472	2280	S	626	1500
NNE	42	156	SSW	390	1644
NE	20	56	SW	118	460
ENE	14	44	WSW	26	68
E	26	52	W	330	988
ESE	12	32	WNW	300	816
SE	66	180	NW	620	1792
SSE	162	524	NNW	1336	5296
			Som	4560	16888

De sommen fR, respectievelijk vermenigvuldigd met $\cos\theta$ en $\sin\theta$ en gedeeld door 1800, geven terstond de grootheden M_x en M_y; de sommen fR^2 moeten achtereenvolgens met $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ en $\sin\theta\cos\theta$ vermenigvuldigd worden.

Gemakkelijker is het, deze laatste sommen met $\cos 2\theta$ en $\sin 2\theta$ te vermenigvuldigen; is de totaal-gemiddelde S_1 dan wordt:

$$M_x^2 = fR^2\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}fR^2\cos 2\theta$$
$$M_y^2 = fR^2\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}fR^2\cos 2\theta$$
$$2M_{xy} = fR^2\sin 2\theta.$$

De geheele bewerking heeft dus veel overeenkomst met eene berekening van Fourier'sche termen; inderdaad wordt ook door de hier

voorgestelde wijze van bewerking eene analyse der luchtbeweging verkregen.

In de Tabellen III en IV vindt men de aldus berekende waarden der windconstanten; behalve de vijf kenmerkende grootheden zijn, als voor verschillende doeleinden praktisch bruikbare grootheden, nog gegeven:

$e = \frac{\sqrt{M^2 - M'^2}}{M}$, de excentriciteit van de ellips, waarvan M en M' de halve hoofdassen voorstellen.

(R_0' en α') de resultanten van de quadraten der snelheden, die een beeld geven van de gemiddelde energie-strooming.

$\bar{V}$ de gemiddelde snelheid, onafhankelijk van de richting.

$\bar{V}^2$, het gemiddeld quadraat der snelheid, afgezien van de richting, d. i. eene maat voor de totale energie; deze grootheid is volgens (4) analoog met het quadraat van de middelbare fout, *niet* gecorrigeerd voor 't constant gedeelte, in de foutenleer.

N het aantal gebezigde waarnemingen.

TABEL IIIa Constanten van deu Wind.

Bergen 1885—1904.

In Beaufort-schaalwaarden.

	R_0	α	M	M'	β	e
Januari	1.84	179°	3.39	1 65	174°	0.873
Februari	1.51	180	3.10	1.59	172	0.858
Maart	1.16	183	3.25	1 60	171	0.872
April	0.40	225	2.88	1.47	169	0.859
Mei	0 68	284	2.84	1.37	169	0.879
Juni	1 07	302	2.61	1.19	171	0.891
Juli	0.93	276	2.64	1.22	168	0.885
Augustus	0.73	251	2.86	1.22	168	0.904
September	0 97	212	2 88	1.38	174	0.876
October	1.10	182	2.94	1.52	171	0.857
November	1.51	179	3.10	1.48	171	0.880
December	1.78	179	3 14	1 57	174	0.866
Jaar	0.85	203	2 97	1.44	171	0 875

TABEL III^b Constanten van den Wind.
Bergen 1885—1904.
In Beaufort-schaalwaarden.

	R'_o	α'	$\overline{V}$	$\overline{V^2}$	N
Januari	10.56	182°	3.31	17.63	1860
Februari	8.09	184	2.90	14.44	1695
Maart	5.96	186	3.06	14.48	1860
April	1.62	224	2.64	10.61	1800
Mei	2.62	281	2.59	10.39	1860
Juni	3.78	305	2.53	9.38	1800
Juli	3.19	272	2.58	9.32	1860
Augustus	2.79	243	2.63	10.18	1860
September	4.30	215	2.67	11.14	1800
October	5.13	185	2.76	12.19	1860
November	7.77	182	2 91	14.09	1800
December	9.30	183	3.06	15.50	1860
Jaar	4.42	200	2.80	12.45	21915

TABEL IV^a. Constanten van den Wind.
Falmouth. 1874—1886, 1900—1903.
In Eng. mijlen per uur.

	R_o	α	M	M'	β	e
Januari	5.23	211°	15.20	13.93	73°	0.400
Februari	5.33	209	14.08	13.25	164	0.339
Maart	3.56	255	15.02	13.26	67	0.470
April	0.85	215	13.70	12.21	72	0.454
Mei	2.34	255	12 02	11.52	40	0.286
Juni	4.60	255	11.19	10.07	158	0.436
Juli	6.46	254	10.39	8.92	155	0.507
Augustus	5.79	245	10.48	9.76	82	0.363
September	3.77	229	11.05	10.67	164	0.260
October	3.56	239	13.51	13.03	81	0.266
November	4.57	248	13.75	13.03	23	0.318
December	5.69	243	13.69	12.98	22	0.318
Jaar	4.14	239	12.60	12.43	96	0.166

TABEL IV^b. Constanten van den Wind.

Falmouth.

	R'_0	α'	$\overline{V}$	$\overline{V^2}$	N
Januari	146.0	205°	18.4	452.5	2821
Februari	159.9	203	16.9	402.1	2675
Maart	88.8	241	17.5	414.2	2930
April	23.0	178	15.7	337.4	2879
Mei	54.1	241	14.4	282.5	3140
Juni	92.4	252	13.7	247.8	3015
Juli	122.2	252	12.9	228.5	3060
Augustus	122.0	242	13.0	238.7	3154
September	83.7	224	13.1	250.3	3047
October	78.5	223	16.4	370.0	3154
November	114.2	237	16.6	379.7	3053
December	148.6	233	16.6	388.4	2888
Jaar	98.2	229	15.4	330.4	35816

Eene nadere discussie der aldus verkregen resultaten moge, kortheidshalve, hier achterwege blijven; alleen is de opmerking niet overbodig, dat de beide voorbeelden twee typen voorstellen, 't geen ook de reden is waarom zij gekozen zijn. Bij Bergen is de ellips der veranderlijke winden zeer constant van vorm en de excentriciteit groot; bij Falmouth is het verschil tusschen M en M' altijd zeer gering en de gevonden verschillen zijn blijkbaar eer als toevallige rekenresultaten dan als feiten te beschouwen, daar de hoek β aan groote en onregelmatige schommelingen is onderworpen; blijkbaar nadert de ellips tot een cirkel, zoodat in form (2) $h = h'$ mag gesteld worden. Daar dit tot eene belangrijke vereenvoudiging der formule leidt, zijn deze waarnemingen bij Falmouth bijzonder geschikt voor vergelijking der resultaten van berekening en waarneming, terwijl ook het feit, dat hier werkelijke snelheden, met goed geverifieerde instrumenten zijn waargenomen, deze reeks bijzonder gunstig maakt.

6. De uitdrukking (2) geeft aan: de waarschijnlijkheid, dat eene waarneming ligt tusschen de grenzen R en $R + dR$, θ en $\theta + d\theta$; dezelfde uitdrukking zonder het element $RdRd\theta$ geeft aan: de specifieke

waarschijnlijkheid van een wind (R,θ) d.i. de waarschijnlijkheid voor de eenheid van oppervlak, wanneer men zich dit oppervlak zeer klein denkt. Stelt men ter vereenvoudiging:

$$h'^2 + h^2 = 2p, \quad h'^2 - h^2 = 2q, \quad R_0^2 (p - q \cos 2(\alpha - \beta)) = \mu$$
$$(p - q) \cos 2(\theta - \beta) = \nu, \quad s^2 = R_0^2 (p^2 + q^2 - 2pq \cos 2(\alpha - \beta))$$
$$s \cos(\theta - \varphi) = \lambda \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{p \sin \alpha + q \sin(\alpha - 2\beta)}{p \cos \alpha - q \cos(\alpha - 2\beta)},$$

dan neemt (2) den vorm aan:

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\pi} e^{-R^2\nu + 2R\lambda - \mu} R dR d\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Stelt men hierin:

$$R^2\nu - 2R\lambda + \mu = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dan volgt uit de boven geformuleerde definitie, dat de specifieke waarschijnlijkheid van alle waarnemingen, die liggen op den omtrek der excentrische ellips (6) dezelfde is en gelijk aan:

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\pi} e^{-c}.$$

De waarschijnlijkheid, dat de windsnelheid de door (6) in functie van θ uitgedrukte waarde R_c niet overtreft, of m. a. w. het aantal waarnemingen dat binnen de grenzen der ellips komt te liggen, wordt gevonden door (5) te integreeren, eerst volgens R tusschen de grenzen R_c en 0, daarna volgens θ tusschen 2π en 0.

Voor het eenvoudige geval $R_0 = 0$, dus ook $\mu = 0$ en $\lambda = 0$, geeft de eerste integratie terstond:

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{-c}}{2\nu}$$

en daar

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\nu} = 1,$$

wordt de gezochte waarschijnlijkheid eenvoudig:

$$1 - e^{-c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en het aantal waarnemingen, gelegen binnen den omtrek der ellips (6):

$$N(1 - e^{-c}).$$

Daar dit aantal hetzelfde blijft, of men de ellips (6) beschouwt van uit den excentrischen oorsprong of van uit het middelpunt, d.i. voor $R_0 = 0$, mits bij de integratie de grenzen dien overeenkomstig worden gewijzigd, moet de uitdrukking (7) ook juist zijn als R_0 niet gelijk nul is en dus algemeen gelden.

Inderdaad voert eene andere vereenvoudiging, n.l. $q = 0$ ('t geen toepassing vindt op de resultaten voor Falmouth), tot een stel bepaalde integralen, die kunnen worden uitgevoerd en deze conclusie bevestigen.

Onder de schaar van ellipsen voorgesteld door (6) zijn er twee merkwaardig; geeft men aan c de waarde 0.5, dan worden, wegens (1), de halve assen der ellips gelijk aan de grootste en kleinste projecties M en M' der middelbare snelheden, zoodat de ellips (6) dan voorstelt, 't geen men zou kunnen noemen de *specifieke* of *typische windellips*, dus eene soort windroos, waarin de kenmerkende eigenschappen van het beschouwde windrégime onmiddellijk in het oog springen.

De voerstraal R_m getrokken naar een willekeurig punt in den omtrek wordt, in de door die keuze bepaalde richting, gegeven door de vergelijking;

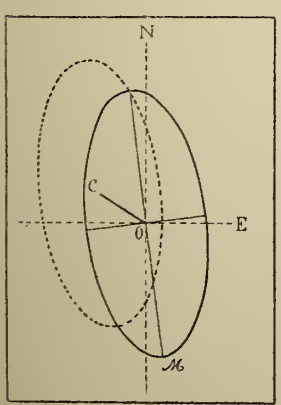
$$2\,R^2_m\,\nu - 4\,R_m\,\lambda + 2\,\mu - 1 = 0.$$

De waarschijnlijkheid, dat eene snelheid deze waarde niet overtreft, is dan:

$$1 - e^{-1/2} = 0.39347.$$

Onder duizend waarnemingen zullen er dus 393 binnen deze typische ellips komen te liggen, terwijl de specifieke waarschijnlijkheid van elke der snelheden R_m is:

$$0.6065\,\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\pi}.$$



In de nevensgaande figuur is, voor Bergen en de maand Juni, zulk een typische windellips graphisch voorgesteld door de gestippelde lijn; de vector OC stelt hierin voor het constant gedeelte (R_0, α), de halve assen zijn gelijk aan M en M', en de hoek $NOM = \beta$; één millimeter komt overeen met $^3/_{20}$ Beaufort-schaalwaarde, of met $^3/_{20} \times 1.83 = 0.275$ M. p. s.

Men zou, desverlangd, deze figuur nog kunnen aanvullen door twee cirkels, de eene van een straal:

$$\sqrt{M^2 + M'^2},$$

voorstellende de middelbare windsnelheid in de maand, gecorrigeerd voor het constant gedeelte, de andere beschreven met een straal:

$$\sqrt{M^2 + M'^2 + (M_x)^2 + (M_y)^2},$$

die, volgens (4), eene maat is voor de middelbare totale snelheid, overeenkomende met den vierkantswortel uit de grootheid $\overline{V}^2$ der tabellen III en IV.

Eene andere merkwaardige ellips, die men de *waarschijnlijke windellips* zou kunnen noemen, verkrijgt men door den eisch te stellen, dat de helft der waarnemingen binnen haar gebied valt; men heeft dan c zoodanig te bepalen dat

$$1 - e^{-c} = {}^1/_2 \quad , \quad c = 0.6932,$$

zoodat de assen dezer ellips

$$\sqrt{2}c = \sqrt{2} \times 0.8326 = 1.177$$

maal langer zijn dan die van de typische windellips; het getal 0.8326 is eene in de foutenleer in het vlak bekende grootheid.

7, De frequentie der windsnelheden, afgezien van de richting kan niet in eindigen vorm worden gegeven; tot een voor vergelijking met de waarneming bruikbaren vorm kan men komen door (5) aldus te schrijven:

$$\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\pi} e^{-\mu} \cdot e^{-pR^2} \cdot e^{-R^2(\nu-p)+2R\lambda} R\,dR\,d\theta, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

den laatsten exponentieelen factor te ontwikkelen en daarbij de machten en producten van cosinussen in cosinussen van veelvouden uit te drukken.

Het is duidelijk dat, bij integratie van (8) over θ van 2π tot 0, alleen die termen overblijven, die onafhankelijk zijn van θ en optreden met den gezamenlijken factor 2π.

De gezochte uitdrukking voor de waarschijnlijkheid, dat eene snelheid ligt tusschen de grenzen R en $R + dR$ wordt dan:

$$2\sqrt{p^2-q^2} \cdot e^{-\mu} \cdot e^{-pR^2}(1+a_1R^2+a_2R^4 \ . \ . \ .)\,R\,dR \ . \quad . \quad . \quad (9)$$

waarin:

$$a_1 = s^2$$
$$a_2 = q_2/2^2 \quad + qs^2/2!\ \cos 2(\varphi-\beta) + s^4/(2!)^2$$
$$a_3 = q^2s^2/2^2 + qs^4/3!\ \cos 2(\varphi-\beta) + s^6/(3!)^2$$

Voor Falmouth, waar, zooals boven is opgemerkt, $q = 0$ kan worden gesteld, worden deze coëfficienten eenvoudig:

$$a_n = s^{2n} \Big/ \left(\frac{n!}{2}\right)^2,$$

en verder:

$$s = pR_0 \ , \ \mu = pR_0^2 \ , \ \nu = p \ , \ \varphi = \alpha \ , \ \lambda = pR_0 \cos(\theta - \alpha). \quad (10)$$

In de praktijk zal het veelal slechts noodig zijn enkele dezer coëfficienten te berekenen; stelt men:

$$q/p = \varepsilon,$$

dan leidt de integratie van (9) tusschen de grenzen m en o tot de uitdrukking:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1-\varepsilon^2}\, e^{-\mu} \times \\ (1-e^{-pm^2}) \cdot \left(1 + \dfrac{a_1}{p} + \dfrac{2!a_2}{p^2} + \dfrac{3!a_3}{p^3} + \ldots\right) \\ -\dfrac{pm^2 e^{-pm^2}}{1!}\left(\dfrac{a_1}{p} + \dfrac{2!a_2}{p^2} + \ldots\ldots\ldots\right) \\ -\dfrac{p^2m^4e^{-pm^2}}{2!}\left(\dfrac{2!a_2}{p^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Daar voor $m = \infty$ deze uitdrukking gelijk aan de eenheid moet worden, is:

$$1 + \frac{a_1}{p} + \frac{2!a_2}{p^2} \ldots = \frac{e^{\mu}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

of, voor het geval $q = 0$, wordt (11):

$$\left.\begin{array}{l} 1-e^{-pm^2} \\ -\dfrac{pm^2e^{-pm^2}}{1!}(1-e^{-\mu}) \\ -\dfrac{p^2m^4e^{-pm^2}}{2!}\left(1 - e^{-\mu} - \dfrac{a_1}{p}e^{-\mu}\right) \text{ enz.} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

waaruit terstond blijkt, dat, in vele gevallen, met de drie eerste termen kan worden volstaan, zoodat dan de berekening der coëfficienten geheel en al kan worden vermeden, of, hoogstens alleen met a_1 rekening kan worden gehouden; in den regel toch is μ klein zoodat reeds

$$1-e^{-\mu}$$

eene kleine grootheid zal zijn. Is q niet klein, dan wordt de berekening echter vrij omslachtig.

8. Om uitdrukkingen te vinden voor de grootheden $\overline{V}$ en $\overline{V^2}$, de gemiddelde snelheid en het gemiddelde quadraat der snelheid, onafhankelijk van het teeken, heeft men (9) te vermenigvuldigen, achtereenvolgens met R en R^2 en te integreeren tusschen de grenzen ∞ en 0, 't geen, met de bekende grondvergelijking, leidt tot de uitdrukkingen :

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A\left(1 + \dfrac{2a_1}{2p} + \dfrac{2\,4a_2}{(2p)^2} + \dfrac{2.4.6a_3}{(2p)^3} + \ldots\right) \\ \overline{V} = \dfrac{A}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\left(1 + \dfrac{3a_1}{2p} + \dfrac{3.5a_2}{(2p)^2} + \dfrac{3.5.7.a_3}{(2p)^3} + \ldots\right) \\ \overline{V^2} = \dfrac{2A}{2p}\left(1 + \dfrac{4a_1}{2p} + \dfrac{4.6a_2}{(2p)^2} + \dfrac{4.6.8a_3}{(2p)^3} + \ldots\right) \\ A = \sqrt{1-\varepsilon^2}\, e^{-\mu}. \end{array}\right\} \quad . \quad (13)$$

9. Voor de berekening van de frequentie der richtingen, onafhankelijk van de snelheid, heeft men (5) eerst te integreeren naar R, tusschen de grenzen ∞ en 0, en daarna volgens θ tusschen de gewenschte grenzen; de gemiddelde snelheid als functie der richting wordt gevonden door op (5) dezelfde bewerking toe te passen, na vermenigvuldiging met R. Aan de aldus gevonden frequentie-formule kan dan gemakkelijk de vorm eener Fouriersche reeks worden gegeven. Kortheidshalve wordt hier alleen het geval behandeld dat $q = 0$ en de hoekgrenzen π tot 0.

Door te stellen:

$$R = \varrho + \frac{\lambda}{\nu}$$

wordt (5) gebracht in den vorm:

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\pi} e^{-\mu + \lambda^2/\nu} \int_{-\lambda/\nu}^{\infty} e^{-\nu\varrho^2} \left(\varrho + \frac{\lambda}{\gamma} \right) d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Als $q = 0$, zoodat de form. (10) gelden, vindt men dan voor de gezochte frequenties in de twee oostelijke quadranten:

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{}^{R_0 \sqrt{p} \sin \alpha} e^{-t^2} \, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Uit deze formule blijkt op welke wijze en in welke mate de asymmetrie der verdeeling afhankelijk is van R_0, α en p.

10. De toepassing der aangegeven criteria is geschied voor Falmouth en de vier jaargetijden:

Winter: December, Januari, Februari, aantal 8384,
$p = 0.00258$, $q = 0.00004$
$R_0 = 5.22$, $\alpha = 222°8'$

Voorjaar: Maart, April, Mei, aantal 8949,
$p = 0.00298$, $q = 0.00028$
$R_0 = 2.21$, $\alpha = 250°25'$

Zomer; Juni, Juli, Augustus, aantal 9229,
$p = 0.00485$, $q = 0.00029$
$R_0 = 5.60$, $\alpha = 251°22'$

Najaar: September, October, November, aantal 9254,
$p = 0.00313$, $q = 0.00004$
$R_0 = 3.80$, $\alpha = 239°16'$

Voor elke reeks is het aantal waarnemingen herleid tot 10.000 en overal is $q = 0$ gesteld, de berekende waarden zijn, dienovereenkomstig tot de vierde decimaal nauwkeurig uitgevoerd.

Uit de in Tabel V gegeven samenstelling der waargenomen en volgens form. (12) berekende freqenties van windsnelheden onafhankelijk van de richting blijkt, dat de verschillen een duidelijk systematisch verloop hebben. Evenals bij alle foutenreeksen is het aantal der waargenomen kleine snelheden grooter dan met de normale verdeeling overeen zou komen. De verschillen bedragen gezamenlijk in den zomer ongeveer 10%, in den winter 15%.

Bij de berekening van de frequenties der richtingen, onafhankelijk van de snelheid zijn de waarnemingen, die beschouwd zijn als kalmten — en hiertoe zijn in de Engelsche jaarboeken alle snelheden beneden 4 mijlen per uur gerekend — op aan de richtingsfrequenties evenredige wijze verdeeld; voorts zijn de frequenties Noord en Zuid voor de helft toebedeeld aan de oostelijke en westelijke quadranten.

Zooals uit het volgende overzicht blijkt, vertoonen zich ook bij deze vergelijking systematische verschillen; in alle jaargetijden zijn de waargenomen frequenties in de westelijke quadranten grooter dan de berekende, zoodat eene vermeerdering van het constant gedeelte R_0, waaraan deze ongelijke verdeeling kan worden toegeschreven, de overeenkomst beter zou maken.

TABEL VI.

Frequenties van windrichtingen bij Falmouth.

op 10.000.

		Waargen.	Berek.	Verschil.
Winter	E. quadr.	3709	4006	— 297
	W. „	6291	5994	+ 297
Voorjaar	E. quadr.	4037	4351	— 214
	W. „	5963	5649	+ 214
Zomer	E. quadr.	2619	3009	— 390
	W. „	7381	6991	+ 390
Najaar	E. quadr.	3453	3980	— 527
	W. „	6547	6020	+ 527

TABEL V. Frequenties van Windsnelheden bij Falmouth.
Op 10.000.

	WINTER			VOORJAAR			ZOMER			NAJAAR		
Mijlen p. uur.	Waarg.	Berek.	Verschil	Waarg.	Berek.	Verschil	Waarg.	Berek.	Verschil	Waarg.	Berek.	Verschil
0 — 45	760	477	+ 283	756	569	+ 187	945	810	+ 135	936	588	+ 348
45 — 95	1871	1482	+ 389	2073	1759	+ 314	2610	2336	+ 274	2126	1779	+ 377
95—145	1853	2026	— 173	2120	2279	— 159	2538	2728	— 190	2144	2304	— 160
145—195	1701	2030	— 329	1875	2120	— 245	1868	2133	— 265	1818	2110	— 292
195—245	1466	1650	— 184	1355	1558	— 203	1164	1225	— 61	1281	1564	— 283
245—295	967	1125	— 158	917	939	— 22	544	534	+ 10	792	920	— 128
295—345	680	656	+ 24	493	473	+ 20	224	178	+ 46	459	464	— 5
345—395	369	331	+ 38	250	201	+ 49	80	45	+ 35	258	179	+ 79
395—445	199	144	+ 55	114	72	+ 42	20	9	+ 11	116	66	+ 50
445—495	94	55	+ 39	31	22	+ 9	6	2	+ 4	37	20	+ 17
495—545	32	18	+ 14	15	6	+ 9	0	—	—	23	5	+ 18
545—595	8	5	+ 3	1	2	— 1	1	—	+ 1	10	1	+ 9
595—	—	1	— 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over de anisotrope vloeistoffasen van den Boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen."*

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN)

§ 1. Ter verklaring van het gedrag der stoffen, welke dubbelbrekende vloeistoffasen plegen te vertoonen, heeft men van enkele zijden de hypothese gesteld, dat er bij deze soort van organische lichamen sprake zou zijn van systemen, uit twee komponenten bestaande, en van evenwichtsverschijnselen tusschen tautomere en isomere modifikatie's, welke zich met eindige snelheid in elkaar zouden omzetten. Ofschoon niet in te zien is, hoe eene dergelijke veronderstelling, die zich wèl uiten, maar zeer moeilijk bewijzen laat, de tallooze, goed gekonstateerde feiten der *wetmatige* optische anisotropie dier fasen zou kunnen verklaren, — zoo zou men echter daarin althans wèl eenige verklaring kunnen vinden voor de eigenaardige irreversibiliteit der fase-overgangen, welke door mij meer in 't bijzonder bij de esters van het cholesterine en van het α-phytosterine kon worden gevonden, benevens voor vele der bij die gelegenheid gekonstateerde vertragingsverschijnselen [1]).

Doch bovendien heeft eene zóódanige onderstelling misschien eenig belang voor eene interpretatie der schitterende kleurverschijnselen, welke de fase-overgangen bij de cholesterylesters vergezellen. Immers een mengsel of emulsie van stoffen, wier brekingsindices zeer weinig, en wier dispersie veel verschilt, zou evenals CHRISTHIANSEN's monochromen, een dergelijk kleurenspel kunnen veroorzaken.

§ 2. Tot tautomerie (of isomerie) nu is meer dan ééne reden bij deze cholesteryl-esters.

Alle esters nl., zoowel als 't cholesterine zelve, zijn in 't bezit van een asymmetrisch C-atoom, en alle in oplossing linksdraaiend.

Derhalve is racemiseering tijdens de verestering geenszins uitgesloten, en zou men dus een mengsel kunnen hebben van de optische antipoden. Voorts bezit het cholesterine eene aethyleendubbelbinding, zoodat óók nog eene isomerie in den zin van 't fumaar- en maleïnezuur te wachten is.

---

[1]) F. M. JAEGER. Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, November 1906, p. 389 en 401.

§ 3. Aangezien vele andere, en zelfs wel de meeste organische lichamen, die deze verschijnselen van dubbelbrekende vloeistoffasen plegen te vertoonen, zulke aethyleendubbelbindingen bezitten, zou men inderdaad kunnen meenen, dat de aanwezigheid daarvan in 't molekuul van groot belang voor 't optreden van genoemde verschijnselen was, zooal niet zelfs de conditio sine qua non, aangezien ook de struktuur der azoxy-verbindingen nog niet ondubbelzinnig vaststaat, en ook dáár misschien wel zulke dubbele banden tusschen N en O kunnen aangenomen worden.

Daarbij komt dan nog het feit, dat de cholesterylesters alle *drie* vloeistoffasen bezitten, zoodat ook deze eigenaardige komplikatie wellicht samen zou kunnen hangen met de mogelijkheid van zeer ingewikkelde isomerie-verschijnselen dier lichamen.

§ 4. Om deze vragen nader te beantwoorden, verzocht ik Prof. Dr. C. NEUBERG te *Berlijn*, mij een weinig van het door hem gesyntheseerde *Dihydrocholesterine* te willen afstaan, waaraan genoemde geleerde met de grootste bereidwilligheid heeft gehoor gegeven.

Ik betuig prof. NEUBERG ook hièr nogmaals mijn welgemeenden dank voor zijne hulpvaardigheid.

In dit *Dihydrocholesterine* nu, is de aethyleendubbelbinding door additie van twee atomen waterstof verdwenen, en dus de malenoïde-, en fumaroïde-isomerie à priori uitgesloten.

§ 5. Van dezen alkohol heb ik door middel der zuivere zuuranhydriden, de azijnzure en de normale boterzure esters bereid, en deze voor zooverre hunne fase-overgangen aangaat onderzocht. Over den azijnzuren ester zal ik later te gelegener plaatse berichten; hier wordt alleen de boterzure ester besproken.

Als hoogst gewichtig resultaat heb ik vooreerst kunnen aantoonen, dat de kleurverschijnselen bij het smelten, en het optreden van *drie* vloeibare modifikatie's bij het *normale butyraat* onveranderd blijven bestaan, maar dat de irreversibiliteit der fase-overgangen zich juist in tegengestelden zin openbaart als bij de meeste cholesterine-esters, b. v. als bij 't cholesteryl-laurinaat. (zie l. c. p. 394).

Terwijl nl. van de beide dubbelbrekende vloeistoffasen van dit laatste lichaam, er steeds eene wordt overgeslagen bij *afkoeling* der isotrope vloeistof, maar zij beide steeds worden verwezenlijkt bij *opsmelting* der vaste stof, — is dit bij 't dihydrocholesterine-n-butyraat juist omgekeerd.

§ 6. De vaste fase *S* bestaat uit een aggregaat van zeer dunne,

kleurlooze, en helder doorschijnende plaatjes, welke eene, op de begrenzingsribben scheef georienteerde uitdooving bezitten, en in konvergent gepolariseerd licht eene hyperbool vertoonen, met zeer sterke kleurendispersie, $\varrho > v$.

Bij verhitting gaat deze fase S over in een dubbelbrekende vloeistof B, uit zeer kleine, zwak dubbelbrekende individuen bestaande, welke op hare beurt, bij hooger temperatuur, in de isotrope smelt L overgaat. Van kleurverschijnselen bij een dezer overgangen is thans absoluut *niets* te zien.

Gaat men echter van de fase L uit, en koelt men deze af, dan ziet men eerst de dubbelbrekende fase B optreden, welke bij verder afkoelen onder hevige, plotseling optredende stroomingen der massa, in eene veel sterker dubbelbrekende vloeistof A overgaat, welke dan bij voortgezette temperatuursverlaging eveneens plotseling, en onder zeer heftige strooming, kristalliseert tot een aggregaat van in levendige interferentiekleuren schitterende, platte naalden. Deze nemen op hùn beurt spoedig eene sferoliethenstruktuur aan, zoodat de vaste fase S zèlve eveneens *dimorf* schijnt te zijn, en wel *monotroop*, daar men bij verwarming der sferolithische massa, de platte naalden *niet* meer terugkrijgt. De overgang van A in deze naalden, bij afkoeling, gaat gepaard met de schitterendste kleurspelingen. Onder het mikroskoop zijn deze

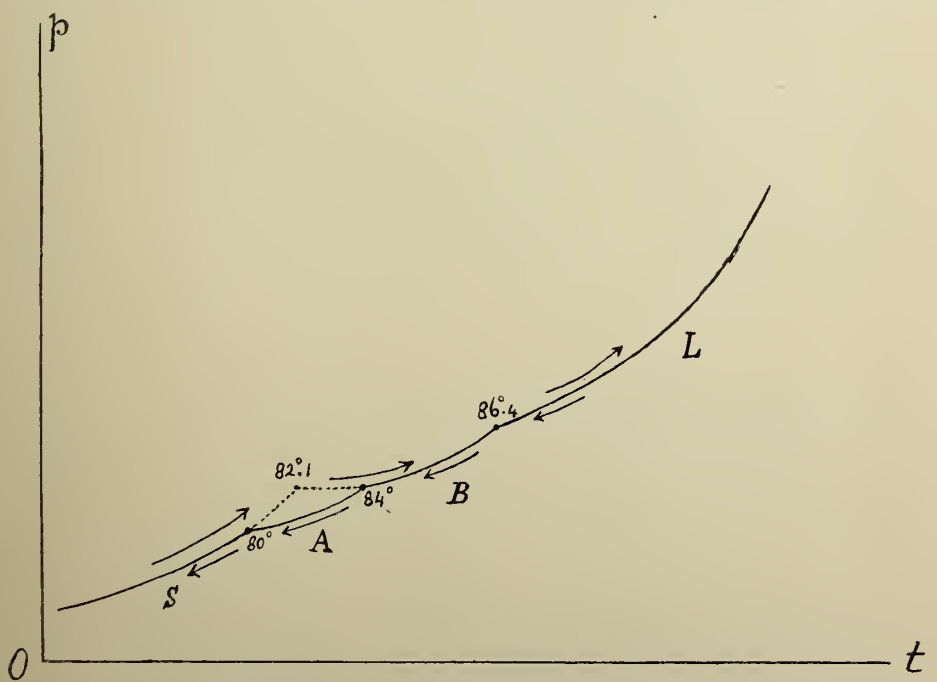


Fig. 1.
Schematisch p-t-diagram voor Dihydro-cholesterine-normButyraat.

kenbaar aan de diep-groene kleur van den achtergrond van 't gezichtsveld; met het bloote oog, bij opvallend licht echter, begint die kleurspeling met een schitterend violet, om langzaam blauwer, en tenslotte stralend groen te worden, waarop de massa kristalliseert. Roode en gele kleuren nam ik, bij opvallend licht nimmer waar. Deze verschijnselen keeren steeds in dezelfde volgorde terug bij 't herhalen der proef.

Dat de fase *A* werkelijk geheel 't gedrag eener stabiele fase vertoont, blijkt o.m. dááruit, dat als de kleur bij afkoeling blauw of groen geworden is, zij door verwarming weer violet wordt, zoolang slechts de vaste fase *S* nog niet bereikt is. De fase is dus realiseerbaar bij temperatuursverandering in *twee* richtingen.

§ 7. Aangezien mij slechts uiterst weinig der stof ten dienste stond, konden de thermometrische bepalingen alleen in haarbuisjes, met behulp van een loupe, bestudeerd worden.

Bij 82.°1 C. smelt de fase *S* tot eene dubbelbrekende fase *B*, die bij 86.°4 C. helder wordt en overgaat in *L*. Koelt men deze isotrope smelt af, dan gaat ze eerst, bij 86°.4 C. behoorlijk over in *B*, doch bij 84° C. in de sterker dubbelbrekende fase *A*, welke vele tientallen graden kan onderkoeld worden, onder behoud harer violette kleuring, vóór ze in de vaste fase *S* overgaat.

Gebrek aan stof verhinderde mij, 't ware stolpunt van *S* door enting te bepalen; ik schat het op ± 80° C.

Hiermede is dus het positieve bewijs geleverd, dat de merkwaardige kleurverschijnselen bij het smelten der cholesteryl-esters, *niet* op rekening van 't aanwezig-zijn eener aethyleen-dubbelbinding kunnen gesteld worden, en dat evenmin een eventueel aanwezig-zijn van fumaroïde en maleïnoïde isomeren als oorzaak van 't optreden der *drie* vloeistoffen kan beschouwd worden.

Zaandam, 15 Februari 1907.

Natuurkunde. — De Heer Zeeman doet eene mededeeling namens den Heer F. M. Jaeger: „*Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet*".

(Mede aangeboden door den Heer J. D. van der Waals.)

§ 1. Sedert geruimen tijd bezig zijnde met de bepaling van den specifieken elektrischen weerstand in de drie kristallografische hoofdrichtingen van den *antimoniet* van Shikoku (Japan), had ik reeds gevonden, dat zich bij deze stof, welke tot de zeer slechte geleiders behoort,

onverklare onregelmatigheden voordoen, wanneer men den weerstand, bij identiek potentiaalverval, gedurende langeren tijd telkens achtereen opnieuw bepaalde.

Gewoonlijk werd de verkregen uitslag van den galvanometer eerst hoe langer zoo grooter, om na verloop van tijd weer te dalen, waarop, naar ik vond, somtijds periodieke vergrooting en verkleining volgde. Een verband tusschen spanning, stroom-intensiteit en tijdsverloop was niet te ontdekken.

Daar bij staafjes van enkele cM. lengte en cirka een kwart cM^2. doorsnede, weerstanden in de diverse richtingen gevonden werden, tusschen 500 en 20000 millioenen Ohm gelegen, werd door mij eerst gedacht aan een impregnatie der elektrische lading in 't slecht geleidende materiaal. Echter zou een eventueele polarisatiestroom, wegens zijne tegengestelde richting, eene schijnbare *vergrooting* van den weerstand moeten ten gevolge hebben, terwijl de ervaring juist op eene gemiddelde *verkleining* van den aanvankelijken weerstand wees.

§ 2. Terwijl ik bezig was, naar den oorsprong dezer afwijkingen te zoeken, viel een zonnestraal door een opening van het gordijn op het spiegelglas, dat den THOMSON-galvanometer afsloot, en werd daar partieel teruggekaatst naar de plaats, waar het apparaatje stond, waarin zich de antimoniet bevond, gesneden met de lengte-richting evenwijdig aan de kristallografische *b*-as. De naald van den galvanometer sloeg onmiddellijk uit naar diè zijde, waarin de totale uitslag *vergroot* werd. Eerst meende ik, dat de in den galvanometer éénzijdig indringende zonnewarmte, den cocondraad zóódanig veranderd had, dat eene torsie daarvan het gevolg was. Toen ik echter, eenige oogenblikken later, in de nabijheid van het praeparaatje, een lucifer toevalligerwijze moest aansteken, geschiedde de vergrooting van den reeds bestaanden uitslag wederom, en thans in denzèlfden zin als vroeger, en tevens sterker.

§ 3. Hier deed zich dus een nieuw verschijnsel voor. Òf de lichtstraling, òf de warmte moesten de oorzaak van het fenomeen zijn.

Ik heb daarop het volgende stel proefnemingen gedaan.

Een antimonietstaafje, geheel met paraffine omgoten, en evenwijdig aan de *b*-as gesneden, werd geschakeld in den stroom van een dynamo, terwijl de spanning door een lampenweerstand op precies 35 Volt werd vastgehouden. Bij inschakeling van den THOMSON-galvanometer [1]), welke volgens de door JULIUS aangegeven methode trillingsvrij was

[1]) De inwendige weerstand van het instrument bedroeg 6681 Ohm.

opgehangen, en die zóó gevoelig was, dat hij, bij spiegelafstand van twee Meter, nog 26,5 mM. uitslag (dubbelen) gaf voor een stroom van 0,000000006 Ampère, — werd een blijvende, enkele uitslag verkregen van 10,7 cM. links van het nulpunt.

Een gloeilampje (van 110 Volt), op cirka 2 M. afstand van het praeparaat gebracht, gaf een *vergrooting* van dezen uitslag van 4 mM., d. i. 3,7 %, — in dít geval overeenkomende met eene weerstandsvermindering van cirka 53 millioen Ohm.

Toen dezelfde lamp op 1 Meter afstand geplaatst werd, bracht zij eene vergrooting van den uitslag teweeg van 11 mM.; op $^1/_2$ Meter afstand van cirka 20 mM., en een kort oogenblikje bij het staafje gehouden, van 220 mM. ruim, zijnde resp. vergrooting van het geleidingsvermogen met ± 10 %, ± 18,7 % en 206 %![1])

Vervolgens werd de lamp verwijderd, en nadat de uitslag weer ongeveer de oorspronkelijke waarde had verkregen, een der gordijnen vóór het raam opengeschoven, zoodat het diffuse daglicht (bewolkte hemel) op 't toestelletje viel. Oogenblikkelijk werd de uitslag met ruim 4 mM., d. i. cirka 3,7 % vergroot. Daarop werd een houten doosje over het apparaat heen gezet, en dan weer verwijderd. Bij achtereenvolgende herhaling van de proef werden de blijvende uitslagen in het licht, telkens van 3 tot 8 mM. *grooter* gevonden dan in het donker.

§ 4. Bij de voorgaande proeven viel er maar uiterst weinig licht op 't antimonietstaafje, daar dit geheel en al omkleed was met een cirka 0,4 cM. dikken mantel van paraffine [2]), en dus alleen het, door de halfdoorschijnende omhulling heendringende licht zijne werking kon uitoefenen.

Daarop werd de proef als volgt herhaald.

Een splijtlamel [3]) van antimoniet werd tusschen twee veel grootere koperen platen ingeklemd, welke beide platen goed geïsoleerd waren. De geheele, aldus verkregen condensator (fig. 1) was aan zijden draden [2]) opgehangen.

Het antimonietplaatje had eene dikte van cirka 1 m.M. en een doorsnede die wellicht cirka $^1/_4$ cM^2. zal bedragen hebben.

Werd nu een lichtbron bij I geplaatst, dan werd de blijvende, bij 10,5 Volt spanning verkregen uitslag van cirka 1,8 cM., slechts

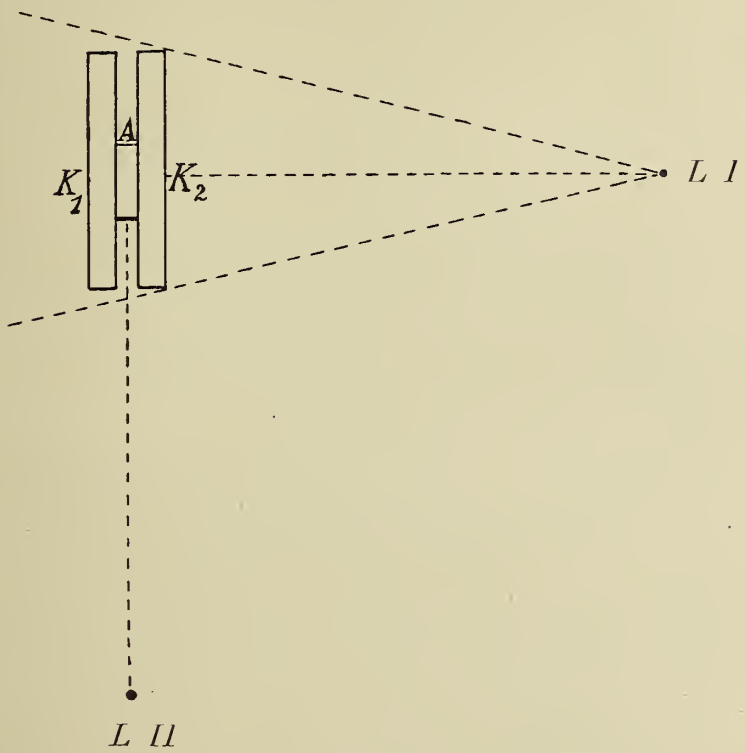
---

[1]) De weerstand van 't staafje wordt in dit laatste geval verminderd met een bedrag van ruim 950 millioen Ohm.

[2]) De bedoeling dezer voorzorgsmaatregelen zal later in eene publicatie met den Heer Vas Nunes worden uiteengezet.

[3]) De antimoniet splijt uiterst volkomen // (010), dus ⊥ *b*-as.

vermeerderd met 2 mM., d.i. dus met cirka 11 %. Wanneer men het licht echter *op denzelfden afstand* in II plaatste, dan bedroeg de vergrooting cirka 11,5 mM., d. i. dus 64 %!



In 't eerste geval, staat 't plaatje A nl. in den schaduwkegel van K_2, en ontvangt dus maar zeer weinig, door de muren teruggekaatst licht; in 't laatste geval daarentegen is de straling direkt.

§ 5. Brengt men tusschen de lichtbron in II en 't apparaatje, een dikke plaat van kleurloos spiegelglas. dan wordt merkwaardigerwijze, de uitslag aanzienlijk *vergroot*. De verklaring van dit verschijnsel werd spoedig gevonden. Immers een koperen bout, op eenige honderden graden verhit, en bij het toestel gebracht, deed onmiddellijk den verkregen uitslag aanzienlijk *dalen*. Derhalve, — en dit is een allermerkwaardigst resultaat, — heeft de *temperatuurstijging juist den tegengestelden invloed* als de lichtstraling: zij *vergroot* den weerstand, in plaats van haar te verkleinen, zooals de lichtstralen zulks doen.

Neemt men de plaat weer weg, dan daalt de uitslag weer op de waarde, die hij had, vóór de plaat werd tusschengeschoven, enz. Hiermede is dus ten volle bewezen, dat het de *lichtstraling* is, welke de geleidbaarheid van den antimoniet in zoo hooge mate beïnvloedt,

en *niet* de warmte; deze *verkleint* juist het geleidingsvermogen, in tegenstelling met de eerste.

§ 6. Tenslotte werden tusschen de lichtbron en het staafje, platen glas van verschillende kleur ingeschoven.

Daarbij bleek, dat de invloed van het diverse, gekleurde licht, zeer verschillend is. En wel bleek de antimoniet door *groen* licht haast *geene* verandering te ondergaan; voor *rood* licht was de toename vrij groot, voor *geel* nòg iets meer, voor *groen* zeer weinig, daarentegen voor *violet* licht weer sterker. In elk dezer gevallen, bleek de uitslag, na verwijdering van de lichtbron, weer zijne oorspronkelijke waarde herkregen te hebben [1]). Bij violette bestraling kreeg ik eene toename van het geleidingsvermogen, die cirka 150 °/₀ van de oorspronkelijke waarde bedroeg, bij wit licht, met tusschengeschoven glasplaat eene van cirka 250 °/₀.

Om voor een bepaald geval eenigszins een overzicht te verkrijgen omtrent de *kwantitatieve* werking, werden nog de volgende proeven verricht. Een gewone elektrische gloeilamp werd op 16 cM. afstand van een, met een 1 cM. dikke laag paraffine omkleed antimonietstaafje vastgemaakt. Vooreerst werd gekonstateerd, dat een lichtwerking alléén, *geen* elektrischen stroom in 't staafje opwekt. Voorts bleek, dat de uitslag van den galvanometer *evenveel* vergroot werd, onverschillig, of de doorgeleide stroom de eene of de andere richting heeft. De weerstandsvermindering is dus onafhankelijk van de stroomrichting. Door tusschenplaatsing van gekleurde glasruiten, werd daarop een ruw beeld ontworpen van den relatieven invloed der verschillende kleuren van 't spektrum. Aldus werd door mij gevonden:

't *Witte*	licht,	op	16	cM.	afst.	gepl.,	doet	't geleidingsverm.	stijgen	tot	200 °/₀	v. d. oorspr.	waarde.
't *Roode*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	194 °/₀	" "	"
't *Oranje*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	153 °/₀	" "	"
't *Groene*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	116 °/₀	" "	"
't *Blauwe*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	176 °/₀	" "	"

Aangezien warmte-stralen slechts uiterst weinig effekt hebben, en ook, zooals ik later in samenwerking met den heer Vas Nunes konstateerde, het door kadmiumpolen uitgestraalde ultraviolette licht slechts eén kleine vermeerdering van 't geleidingsvermogen veroorzaakt, zoo

---

[1]) Niet *geheel* de oorspronkelijke waarde. De stof bezit eene zekere *traagheid*, welke echter geringer is, dan bij het selenium. Soms werd na 20 à 40 minuten, nadat de lichtbron was weggenomen alweer de oorspronkelijke uitslag teruggevonden. Het mineraal schijnt geheel vrij te zijn van eenig gehalte aan selenium, zooals kwalitatief onderzoek mij leerde.

wordt blijkbaar de afhankelijkheid van golflengte en opgewekte weerstandsvermindering voorgesteld door eene kromme, welker minima in 't ultra-rood, in 't groen en in 't ultra-violet liggen, en wier maxima gelegen zijn in 't roode en in 't blauwe deel van het spektrum [1]).

Wij zullen later, als de weerstandsbepalingen aan deze stof tot een gunstig resultaat gevoerd zullen hebben, over de betrekking tusschen de warmte-, en elektriciteitsbeweging in dezen geleider, nadere mededeelingen doen.

§ 7. Het hier ontdekte verschijnsel herinnert sterk aan dàt, hetwelk men bij het *selenium* [2]) heeft waargenomen. Echter dient opgemerkt, dat ofschoon de afhankelijkheid van de lichtstraling, en zelfs die van de golflengte van 't licht op de toename van het geleidingsvermogen, [3]) zich geheel analoog kenbaar maakt als bij den antimoniet, toch beide gevallen in sommige opzichten van elkaar afwijken. Vooreerst spelen bij het seleen *polymorfe omzetting* en daarop betrekking hebbende evenwichtsverschuiving een groote rol; dàn echter neemt hier de weerstand bij temperatuursstijging steeds af, dus juist omgekeerd als bij mijne onderzoekingen, waarbij bovendien van polymorfe omzettingen, zoover bekend is in 't geheel geen sprake is. Een analogie tusschen beide gevallen is te vinden in het reeds door Adams [4]) ontdekte feit, dat de weerstand met stijgende elektromotorische kracht, en óók na langere inwerking daarvan, afneemt; eene dergelijke afwijking van de wet van Ohm wordt bij den antimoniet evenzeer gevonden.

Daarentegen schijnt het gedrag van den Japanschen antimoniet méér analogie te bieden met dat van het gekristalliseerde *telluur;* ook hier wordt de weerstand bij verwarming grooter, bij belichting kleiner [5]).

---

[1]) Ofschoon *niet* als verklaringswijze bedoeld, zoo wil ik hier toch even herinneren, dat uit het onderzoek van Müller (N. Jahrb. f. Miner. u. s. w. Beil. Bd. **17**, 187—251) omtrent de optische konstanten van den Japanschen antimoniet, volgt, dat de brekingsindices n_1 en n_2 juist voor de *groene* stralen (tusschen de lijnen E en F) hunne *maximum*-waarden hebben (nl. $n_1 = 5{,}47 - 5{,}53$ en $n_2 = 4{,}52 - 4{,}49$, terwijl ook de dubbele breking voor deze stralen haar maximale grootte bereikt. De polarisatie der teruggekaatste stralen is rechts-elliptisch (negatief).

[2]) G. Wiedemann, Die Lehre v. d. Elektricität. (1882). I. p. 544—553).

[3]) Sale, Phil. Mag. [4]. **47**. 216. (1874); Pogg. Ann. **150**. 333; Chem. News. **33**. 1. (1876).

[4]) Adams, Phil. Trans. **157**.; Pogg. Ann. **159**. 621. (1876), Phil. Mag. [5]. **1**. 115.

[5]) Ik heb mij met den Heer J. W. Giltay te Delft verstaan, omtrent het monteeren van antimoniet-preparaten, en de vervaardiging van antimonietcellen voor praktisch gebruik.

Binnen kort hoop ik, in medewerking met den heer VAS NUNES, ook kwantitatieve gegevens over het door mij ontdekte verschijnsel te kunnen verstrekken, alsmede zulke over 't gedrag van den gesmolten en weer gestolden antimoniet en de analoge seleenverbinding. Dit onderzoek is verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Amsterdam.

29 Januari 1907.

Scheikunde. — De Heer P. VAN ROMBURGH biedt mede namens Dr. A. D. MAURENBRECHER eene mededeeling aan: *Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen op s. trinitrophenyl-methylnitramine.*

Het s.trinitrophenyl-methylnitramine wordt, zooals sinds lang bekend is, door ammoniak in alkoholische oplossing, bij de gewone temperatuur, of door verwarming met een waterige oplossing van kaliumcarbonaat of kaliumhydroxyde ontleed, in het eerste geval onder vorming van picramide, in het tweede (onder ontwikkeling van monomethylamine) van picrinezuur. Een van ons, die vroeger de reactie met basen bestudeerde, besloot uit het optreden van het amine en de vorming van salpeterzuur, die eveneens geconstateerd werd, dat het methylnitramine, hetwelk men volgens de vergelijking:

$$C_6H_2(NO_2)_3 \cdot \underset{\displaystyle NO_2}{\overset{|}{N}}\text{-}CH_3 + KOH = C_6H_2(NO_2)_3 \cdot OK + \underset{\displaystyle NO_2}{\overset{|}{HN}}CH_3$$

zou mogen verwachten, zich ontleed zou hebben [1]).

Uit de reactie van methylamine op tetranitrophenyl-methylnitramine en op trinitromethylaminomethylnitraminobenzol leidde hij later af [2]), dat zich daarbij waarschijnlijk het intusschen door FRANCHIMONT-KLOBBIE [3]) ontdekte methylnitramine gevormd zou hebben.

De hoeveelheid amine, die zich bij de ontleding van het trinitrophenyl-methylnitramine door alkaliën vormt, is aanzienlijk kleiner dan volgens de theorie verwacht zou mogen worden, de mogelijkheid bestaat dus, dat inderdaad de reactie voor een groot deel in den boven aangegeven zin verloopt.

Wij hebben daarom het vraagstuk op nieuw ter hand genomen in de hoop tevens, door geschikte wijzigingen in de reactie, tot eene

[1]) Rec. d. Trav. chim. d. Pays-Bas, II. (1883) p. 115.
[2]) Ib. VIII (1889) p. 281.
[3]) Ib. VII (1888) p. 354.

bereidingsmethode van methylnitramine te geraken, die het voordeel zou hebben deze kostbare stof uit een weinig kostend, gemakkelijk toegankelijk uitgangsmateriaal te leveren. Wij zagen ons in onze verwachtingen niet bedrogen.

Kookt men het bij 127° smeltende eindproduct van de nitreering van dimethylaniline, het trinitrophenyl-methylnitramine met een 10% oplossing van kaliumcarbonaat dan verkrijgt men een bruinrood gekleurde vloeistof, die bij afkoeling rijkelijk kaliumpicraat afzet. Filtreert men dit af en zuurt het filtraat met zwavelzuur aan, schudt dan, na verwijdering van het afgescheiden picrinezuur, met aether uit, dan verkrijgt men, na verdamping van de verkregen aetherische oplossing, kristallen, die na zuivering bij 38° smelten en identisch zijn met methylnitramine, zooals door vergelijking met een praeparaat, dat wij aan de vriendelijkheid van Prof. FRANCHIMONT danken, bleek. De opbrengst was echter gering.

Overgiet men het fijngepoederde, bij 127° smeltende eindproduct met 20% methylalkoholische ammoniak, dan kleurt deze zich intensief rood, de massa wordt warm en na een paar uur staan is de reactie afgeloopen; er heeft zich rijkelijk picramide gevormd, dat men affiltreert. De alkoholische vloeistof wordt in vacuo gedistilleerd, het residu met verdund zwavelzuur behandeld, de oplossing vervolgens van een geel bijproduct afgefiltreerd en met aether uitgeschud. Na verdamping van den aether werden kristallen verkregen van methylnitramine. Ook bij deze reactie was de opbrengst niet groot en bedroeg slechts 15% van de theorie. Met aethylalkoholische ammoniak werd een overeenkomstig resultaat verkregen, terwijl een proef waarbij ammoniak in een oplossing van het eindproduct in benzol geleid werd nog minder gunstige uitkomsten gaf.

Een van ons had vroeger reeds gevonden, dat onder de aromatische aminen, die op een alkoholische oplossing van het eindproduct in 't algemeen even goed reageeren als op picrylchloride, het *p*-toluïdine vooral gemakkelijk een fraai kristalliseerend, bij 166° smeltend, *p*-toluylpicramide geeft [1]), terwijl de alkoholische vloeistof slechts betrekkelijk weinig donker gekleurde bijproducten bevat. Bij een proef, waarbij 35 gram eindproduct met het gelijke gewicht toluïdine en 100 c.c. 96% alkohol op het waterbad verhit werden, trad na eenigen tijd een vrij heftige reactie in. De verhitting werd gedurende 5 uur voortgezet. Nadat het gevonden picramidederivaat door filtratie verwijderd was, distilleerden we den alkohol af en trokken het residu

[1]) Wij verkregen deze stof thans in twee modificaties, een donker rood en een oranje gekleurd.

met verdund zwavelzuur uit. De van afgescheiden toluïdinesulfaat afgefiltreerde vloeistof werd met aether uitgeschud. Na verdamping van den aether bleef een nog geel gekleurd product achter, dat na enting met een kristal van methylnitramine bijna geheel kristalliseerde en na eenigen tijd boven zwavelzuur gestaan te hebben 7 gram woog. Door uitpersen tusschen filtreerpapier werden lichtgele kristallen verkregen, die na in vacuo gesublimeerd te zijn, een behandeling die het methylnitramine goed verdraagt, bij 38° smolten. Door mengen met een praeparaat van zuiver nitramine veranderde het smeltpunt niet.

Het *p*-toluïdine blijkt dus een geschikt middel te zijn om zich in korten tijd gemakkelijk methylnitramine te verschaffen uit het s. trinitro-phenylnitramine.

Wij zetten onze onderzoekingen met verschillende aminen en ook met andere genitreerde aromatische nitraminen nog voort en zullen de resultaten uitvoeriger in het Rec. d. Trav. chim. d. Pays-Bas et de la Belgique mededeelen.

Utrecht. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van Dr. PH. KOHNSTAMM: „*Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een binair mengsel.*"

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Bij de bewerking van de thermodynamische colleges van prof. VAN DER WAALS — waarmede ik mij sinds geruimen tijd bezig houd —, genaderd tot de behandeling van de driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig en de daarmede in verband staande metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde, kwam ik op enkele punten tot een andere meening dan die neergelegd is in de mij bekende literatuur dienaangaande. Het schijnt mij niet ondienstig de afwijkende punten in deze en de volgende mededeeling in 't kort toe te lichten.

Het eerste betreft den vorm der driephasenlijn vast-gasvormig-vloeibaar als de vaste stof een der komponenten is en wel de minst vluchtige. We vinden daaromtrent opgegeven, dat deze lijn steeds een drukmaximum moet bezitten [1]), en dat zij tevens een temperatuurmaximum moet bezitten [2]) wanneer de vaste stof, — zooals gewoonlijk — onder voluumvergrooting smelt. De laatste opmerkiug is de generalisatie van een vermoeden, door VAN DER WAALS geuit [3])

[1]) BAKHUIS ROOZEBOOM. Die heterogenen Gleichgewichte II. p. 331.

[2]) SMITS. Deze Verslagen XVI, p. 188; Zeitsch. phys. Ch. LIV, p. 498.

[3]) Deze Verslagen XII, p. 453.

ten opzichte van de lijn voor aether en anthrachinon. Nu gelden echter deze beschouwingen alleen voor bepaalde onderstellingen omtrent de grootte van het vluchtigheidsverschil der beide komponenten. Dit blijkt onmiddellijk uit de door VAN DER WAALS gegeven[1]) differentiaalvergelijking van de driephasenlijn:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\eta_d - \eta_s - \frac{x_d}{x_l}(\eta_l - \eta_s)}{v_d - v_s - \frac{x_d}{x_l}(v_l - v_s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin η, x en v resp. entropie, samenstelling en volume der coëxisteerende phasen aangeven, terwijl de index d, l en s aangeeft, dat resp. de dampvormige, vloeibare of vaste phase bedoeld is. x_s komt niet voor, omdat wij aannemen, dat de vaste phase de eerste komponent zelf is, dus $x_s = 0$. Het drukmaximum zal nu in de lijn voorkomen als de teller, het temperatuurmaximum als de noemer gelijk nul kan worden. Nu is $\eta_d - \eta_s > \eta_l - \eta_s$ en $v_d - v_s > v_l - v_s$; beide gevallen zijn dus alleen mogelijk als $x_d > x_l$, d. w. z. als de komponente, die niet de vaste phase vormt (immers in de vergelijking is gesteld $x_s = 0$) rijker in den damp aanwezig is dan in de vloeistof. Of met andere woorden, zooals wij boven reeds zeiden, de gezochte punten kunnen zich alleen voordoen in de driephasenlijn met de minst vluchtige komponent als vaste phase[2]). Of nu echter die punten *zullen* optreden, hangt af van de waarde, die $lim \left(\frac{x_d}{x_l}\right)_{x=0}$ zal verkrijgen. Is die waarde gelijk oneindig te stellen, dan krijgen wij voor $x = 0$:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\eta_l - \eta_s}{v_l - v_s}$$

dus gelijk aan de helling der smeltlijn. We moeten dus, als althans zooals gewoonlijk de vaste stof uitzet bij smelting, én druk- én temperatuurmaximum hebben. Dit was de bedoeling van de boven geciteerde opmerking van VAN DER WAALS omtrent aether en anthrachinon; mag echter $\left(\frac{x_d}{x_l}\right)_{x=0}$ niet oneindig gesteld worden, dan vervalt deze conclusie; het hangt dan af van de waarde, die

$$v_d - v_s - \frac{x_d}{x_l}(v_l - v_s)$$

---

[1]) Deze Verslagen V, p. 490.

[2]) Er is hier natuurlijk stilzwijgend verondersteld, dat geen maximumdampdruk aanwezig is; in dat geval zouden de genoemde punten in *beide* driephasenlijnen aanwezig kunnen zijn.

voor $x = 0$ verkrijgt of een temperatuurmaximum bestaat of niet; mocht het verschil in vluchtigheid, dus $\frac{x_d}{x_l}$, niet zoo groot zijn, dat die uitdrukking bij de limiet negatief wordt, dan treedt het maximum ook niet op, ook als is $v_l > v_s$.

De vraag of zulk een maximum bij vele stelsels zal voorkomen, laat zich nu voorshands niet met zekerheid beantwoorden. Daartoe zouden ons vele gegevens ten dienste moeten staan, waarover wij thans nog niet beschikken, wel echter laat het zich waarschijnlijk maken, dat slechts in zeer extrême gevallen de vluchtigheid der komponenten zoover zal uiteenloopen, dat een temperatuurmaximum te wachten is. Opdat dit maximum nog juist aanwezig zij, d. w. z. in het tripelpunt der vaste komponente, is blijkbaar noodig:

$$\frac{x_d}{x_l}\,\frac{v_l - v_s}{v_d - v_s} = 1.$$

Nu is het eerste gegeven, dat wij zouden moeten hebben de verhouding van v en v_s, dus de volume-verandering bij 't smelten. Daarover schijnen echter nog weinig nauwkeurige gegevens verzameld te zijn; in WINKELMANNS Handbuch [1]), en bij BAKHUIS ROOZEBOOM [2]) heb ik daarvoor enkele cijfers gevonden; de tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN vermelden er niets over. De op de vermelde plaatsen aangegeven cijfers bevestigen, wat trouwens wel à priori te verwachten was, dat percentsgewijze deze uitzettingen niet zeer aanzienlijk zijn; zij bedragen in de hoogste gevallen slechts zeer weinig meer dan 10% en zijn voor de meeste stoffen aanzienlijk lager. Nemen wij dus 10% als basis, dan zullen wij wel voor verreweg de meeste gevallen een te groote, dus voor ons bewijs te ongunstige waarde hebben aangenomen. Voeren wij deze waarde in, dan krijgen wij als conditie (met verwaarloozing van v_l tegen v_d):

$$\frac{x_d}{x_l}\,\frac{v_l}{v_d} = 10.$$

We moeten dus nu trachten een ruwe schatting te krijgen van de verhouding tusschen vloeistof- en dampvolume in het tripelpunt. Wanneer bij het tripelpunt de dampspanning van de orde van een atmosfeer was, dan zou deze verhouding ongeveer van de orde 1000 zijn: Nu is echter de dampspanning steeds zeer belangrijk lager; bijna van elke stof ligt het smeltpunt zeer belangrijk beneden het kookpunt. Nemen wij nu aan, dat het tripelpunt ligt op ongeveer

[1]) II, 2 p. 612. 2e druk p. 775.

[2]) l. c. I. p. 89.

$^1/_2\ T_k$ dan vinden wij de orde van de dampspanning uit de bekende formule:

$$-\ l.\ nat\frac{p_c}{p_k} = f\left(\frac{T_k}{T} - 1\right).$$

Met $f = 7$ en $T = {}^1/_2\ T_k$ geeft dit $log\frac{p_c}{p_k} = -7$ of $p_c = \frac{p_k}{1000}$. Stellen wij p_k op 100 Atm.[1]), dan wordt dus p_c van de orde van 0.1 Atm. Wij zullen dus veilig mogen zeggen, dat v_l/v_d in 't algemeen kleiner zal zijn dan 0.0001. Voor een temperatuurmaximum is dus noodig dat minstens

$$\frac{x_d}{x_l} = 10^5 \text{ of } l.\ nat\frac{x_d}{x_l} = 11.5.$$

Nu is volgens een formule, die door VAN DER WAALS herhaaldelijk is afgeleid [2]), voor lage temperaturen, (een voorwaarde, die in dit geval zeker vervuld is):

$$log.\frac{x_l}{1-x_l}\frac{1-x_d}{x_d} = \left(\frac{f}{m} - 1\right)\frac{dT_k}{T_k\,dx} + \frac{1}{b}\frac{db}{dx},$$

of voor de limiet, waar $\frac{1-x_d}{1-x_l} = 1$,

$$log.\frac{x}{x_d} = \left(\frac{f}{m} - 1\right)\frac{dT_k}{T_k\,dx} + \frac{1}{b}\frac{db}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Het is duidelijk, dat alles hier zal neerkomen op den eersten term, omdat de tweede in 't uiterste geval, d.w.z. als de b van de andere komponent nul zou zijn, toch nog slechts -1 zou bedragen. Zelfs zal de tweede term positief kunnen zijn en dus de waarde van het tweede lid kunnen verminderen.

De grootste moeilijkheid voor onze becijfering ligt nu in onze onbekendheid met de verandelijkheid van T_k met x, of juister daarin, dat voor die veranderlijkheid niet één vaste regel is op te geven, omdat zij in elk speciaal geval zal afhangen van de speciale eigenschappen van het mengsel in quaestie, n.l. van de grootheid a_{12}, een grootheid die zich althans voorloopig op geenerlei wijze laat uitdrukken [3]) in de karakteristieke grootheden der komponenten. Zeker

[1]) In de tabel van LANDOLT en BÖRNSTEIN komen slechts twee stoffen voor, ammoniak en water, die een hoogere p_k hebben; de overgroote meerderheid is belangrijk lager, vooral die van de weinig vluchtige stoffen, waarop wij het oog hebben.

[2]) Zie o.a. deze Verslagen XIII, p. 149.

[3]) De betrekking van GALITZINE-BERTHELOT $a_{12}^2 = a_1 a_2$, die ik bij een vroegere gelegenheid reeds wegens de eigenschappen van het mengsel aether-chloroform meende te moeten verwerpen als algemeenen regel (Deze Verslagen X, p. 667) kan

zou het dus ongeoorloofd zijn, voor alle soorten van stelsels uitkomsten te willen afleiden. Maar het is ons slechts te doen om het beloop van T_k in die gevallen, waarbij de komponenten uiterst veel in vluchtigheid verschillen, en voor die gevallen is het wellicht een niet al te onjuiste onderstelling voorloopig aan te nemen, dat de lijn, die T_k als functie van x aangeeft, niet al te veel van een rechte afwijkt.[1]) In die onderstelling dan mogen wij voor $\frac{1}{T_k}\frac{dT_k}{dx}$ schrijven $\frac{T_{k_2}-T_{k_1}}{T_{k_1}}$

Daar nu, zooals wij reeds onderstelden $\frac{f}{m}=14$, zal $\frac{T_{k_2}-T_{k_1}}{T_{k_1}}$ in absolute waarde niet belangrijk beneden 0.9 mogen dalen, opdat $log.\frac{x_d}{x_l}$ niet kleiner worde dan de vereischte waarde 11.5, of met andere woorden, opdat het temperatuurmaximum bereikt worde moet de kritische temperatuur van de eene komponent ongeveer 10 maal zoo hoog zijn als die van de andere. Een systeem, waarin waterstof optreedt zal dus, als de andere komponent haar kritisch punt boven 0° C. heeft waarschijnlijk wel het temperatuurmaximum vertoonen, maar reeds als de vluchtiger komponent stikstof of zuurstof is zal men meer beperkt zijn in de keuze van de andere komponent. Immers deze zal dan haar kritisch punt bij ongeveer 1000° C. resp. 1250° C. moeten hebben. Ware aether de vluchtigere komponent dan zou die temperatuur bijna 4500° C. bedragen.

Aan deze conclusie wordt zeer weinig veranderd, wanneer wij de temperatuur van het smeltpunt niet op $^1/_2$ maar op $^1/_3$ van de kritische temperatuur stellen, zooals zij bij een aantal stoffen, wier kritische temperatuur en smelttemperatuur gegeven zijn, inderdaad is. Immers daardoor wordt wel het tweede lid van verg. (2) belangrijk grooter, en dus $\frac{x_d}{x_l}$, maar in dezelfde verhouding stijgt ook $\frac{v_d}{v_l}$, zoodat

zeker niet als zoodanig aanvaard worden. Niet alleen zijn er gemakkelijk andere voorbeelden te noemen die in strijd zijn met dien regel (zie bijv. QUINT, Dissertatie, p. 44; GERRITS, Dissertatie, p. 68); maar bovendien — en dit geldt misschien nog als ernstiger bezwaar — verbreekt men door het aannemen dier betrekking geheel willekeurig het verband der isopiesten-figuur (v. D. WAALS, Dit Verslag p. 691), door een middenstrook daarvan links van de asymptoot voor onmogelijk te verklaren, terwijl de linker en rechter strook wel bestaanbaar worden geacht. Immers met $a_{12}=\sqrt{a_1 a_2}$ is het nooit mogelijk, dat $da/dx=0$ wordt in welk stelsel ook; en dit nu heeft juist in dat middengedeelte plaats. Ik had dit in de genoemde publicatie over het hoofd gezien; Prof. VAN DER WAALS maakte mij er sedert attent op. Het reeds genoemde stelsel van QUINT geeft juist een voorbeeld van het voorkomen van dit geval $\frac{da}{dx}=0$; a_{12} is daar nog kleiner dan de kleinste der beide a's.

[1]) Verg. VAN DER WAALS, Deze Versl. XIV, p. 231.

het quotient ongeveer onveranderd blijft. Men ziet dit het best, als men de voorwaarde, waaronder een temperatuurmaximum optreedt, schrijft:

$$\frac{x_l}{x_d}\frac{v_d}{v_l} < 0.1 \text{ of } log.\frac{x_l}{x_d} + log.\ v_d - log.\ v_l < log.\ 0.1.$$

Nu kunnen we voor $log.\frac{x_l}{x_d}$ de waarde invoeren uit de vergelijking[1]):

$$log.\frac{x_l}{1-x_l}\frac{1-x_d}{x_d} = \left(\frac{f}{T}\frac{dT_k}{dx} - \frac{1}{p_k}\frac{dp_k}{dx}\right),$$

en voor $log.\ v_d$ schrijven:

$$log.\ v_d = log.\frac{MRT}{p_c} = log.\ MRT + f\left(\frac{T_k}{T} - 1\right) - log.\ p_k,$$

zoodat de voorwaarde wordt:

$$\frac{m}{f}\left\{1 + \frac{dT_k}{T_k dx}\right\} - \frac{1}{p_k}\frac{dp_k}{dx} - log.\ p_k - log.\ v_l - f + log.\ MRT < log.\ 0.1.$$

Een vermeerdering van T zal dus alleen op den eersten term en den term $log.\ MRT$ invloed hebben en de logarithmische verandering van den laatstgenoemde zal zeker minder bedragen dan de verandering van den eersten. Deze nu neemt toe als T kleiner wordt, zoodat als bij $T = {}^1/_2\ T_k$ niet aan de ongelijkheid voldaan is, zeker niet bij $T = {}^1/_3\ T_k$ daaraan voldaan kan zijn.

Evenwel het zou toch te gewaagd zijn te beweren, dat nu met zekerheid als bewezen mocht gelden, dat bijv. bij het stelsel aether-anthrachinon geen temperatuurmaximum in de driephasenlijn *kan* voorkomen. Immers wij hebben gebruik moeten maken van de onderstelling dat T_k lineair van x afhangt, en deze onderstelling moge bij zeer uiteenloopende kritische temperaturen wel eenige waarschijnlijkheid bezitten, juist bij stoffen, die — zooals aether en anthrachinon — dichter bijeen liggen, is daardoor ook eerder reden om afwijking van de rechtlijnigheid te verwachten. Slechts zeer enkele experimenteele gegevens staan ons daaromtrent ten dienste. Als zoodanig zijn bijv. te gebruiken de bepalingen omtrent de verhooging der plooipuntstemperatuur door toevoeging van weinig vluchtige stoffen, door Smits, Centnerszwer en Büchner verricht. Immers door middel van de door van der Waals gegeven[2]) formule:

$$\frac{dT}{Tdx_0} = \frac{dT_k}{T_k dx} + \frac{49}{45}\left\{\frac{dT_k}{T_k dx} - \frac{1}{7}\frac{dp_k}{p_k dx}\right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin wij alleen op de hoofdtermen (die met T_k) behoeven te letten,

[1]) Deze Verslagen XIII p. 148.

[2]) Deze Verslagen XIV p. 231 en 257.

kunnen wij uit de direkt gemeten waarden die van $\frac{dT_k}{T_k dx}$ berekenen. Berekenen wij nu met de zoo gevonden waarde van $\frac{dT_k}{T_k dx}$ en de onderstelling van rechtlijnigheid T_{k_2}, d. w. z. de waarde van T_k voor de bijgemengde stof, dan vinden wij de gegevens in de volgende tabel bijeengebracht.

Tweede komponent	Eerste komponent	Waarnemer	T_k berekend	Tweevoud van smelttemperatuur
Anthrachinon	Aether	SMITS	932°	1120°
„	SC_2	CENTNERSZWER	1032	1120
Resorcine	„	„	903	960
Campher	„	„	790	900
Naphthaline	„	„	770	700
„	CO_2	BÜCHNER	640	700
Paradichloorbenzol	„	„	670	650
Paradibroombenzol	„	„	690	720
Bromoform	„	„	640	560
Orthochloornitrobenzol	„	„	760	610

De cijfers van BÜCHNER zijn ontleend aan diens dissertatie (Amsterdam 1905); die van CENTNERSZWER aan een tabel van VAN LAAR (Deze Verslagen XIV p. 115); dat van SMITS is berekend naar diens opgaaf: Plooipunt bij 203° en $x = 0.015$, (Deze Verslagen XIII p. 91).

Er blijkt uit, dat de zoo berekende waarden, althans van enkele stoffen, en speciaal juist van anthrachinon volgens de bepaling van SMITS, niet onbelangrijk lager zijn dan het dubbele van de smelttemperatuur. Het mag dus als hoogst waarschijnlijk worden aangenomen, dat deze lijnen bol naar beneden zijn, en dus zal de absolute waarde van $\frac{dT_k}{T_k dx}$ grooter zijn dan zich volgend de onderstelling van rechtlijnigheid zou laten verwachten. Bij de geringe kennis van het verdere beloop der plooipuntslijn, en à fortiori dus van de lijn voor T_k zal een schatting daaromtrent uit den aard der zaak zeer onzeker moeten blijven, toch kan, naar het mij voorkomt, op de volgende wijze althans iets daaromtrent worden beslist, Wij hebben aan den kant van aether:

$$\left(\frac{dT_k}{T_k dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{da}{adx} - \frac{db}{bdx}\right)_{x=0},$$

en dus wanneer wij voor a de kwadratische en voor b de lineaire functie invoeren:

$$\left(\frac{dT_k}{T_k dx}\right)_{x=0} = \frac{2a_{12} - 2a_1}{a_1} - \frac{b_2 - b_1}{b_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nu zal het wel een niet al te gewaagde schatting zijn, wanneer wij, in 't oog houdende dat de formule voor aether is $C_4H_{10}O$ en voor anthrachinon $C_{14}H_8O_2$, de grootte van het anthrachinonmolecuul op ongeveer twee à drie maal die van het aethermolecuul stellen; dus $b_2 = 2b_1$ à $3b_1$. Voeren wij deze waarde en de met behulp van verg. (3) berekende waarde van $\frac{dT_k}{T_k dx}$ in verg. (4) in, dan krijgen wij een waarde voor a_{12}. Voorts kunnen wij, aannemende dat de waarde van T_k voor anthrachinon $2 \times 560° = 1120°$ is, uit de verhouding der kritische temperaturen van aether en anthrachinon en de a voor aether een a_2 vinden; en met deze grootheden kunnen wij ten slotte de $\frac{dT_k}{T_k dx}$ aan de anthrachinonzijde berekenen uit:

$$\left(\frac{dT_k}{T_k dx}\right)_{x=1} = \frac{2a_2 - 2a_{12}}{a_2} - \frac{b_1 - b_2}{b_2}$$

Uitgaande van $b_2 = 2b_1$ vinden wij op die wijze $\left(\frac{dT_k}{T_k dx}\right)_{x=1} = 0.66$; met $b_2 = 2.5 : 0.65$ en met $b_2 = 3\,b_1 : 0.64$. De fout, die wij bij onze keuze van b_2 maakten, zal dus geen aanmerkelijke wijziging in 't resultaat geven; wel zou dit zich aanmerkelijk wijzigen als het kritische punt van anthrachinon zou blijken zeer aanmerkelijk hooger te liggen dan 1120°. Dit is niet in tegenspraak met onze vroegere opmerking, dat het er weinig toe doet of de gereduceerde temperatuur bij het tripelpunt $^1/_2$ of $^1/_3$ is; immers daarbij gingen wij uit van de onderstelling der lineaire afhankelijkheid, terwijl wij hier die onderstelling hebben losgelaten, en uit de experimenteele gegevens die afhankelijkheid willen berekenen. Door het experiment is dus bij den thans gevolgden gedachtengang de a_{12} gegeven, en de geringere waarde van m zou dus thans neerkomen op een hoogere waarde van a_2 bij gegeven b_1, b_2 en a_{12}. Mogen wij aannemen, dat onze schatting niet al te onjuist is, dan mogen wij concludeeren, dat de afwijking van de rechtlijnigheid wel de waarde van $\left(\frac{dT_k}{T_k dx}\right)_{x=1}$ verhoogt, maar op verre na niet in de mate, die noodig zou zijn om de kritieke waarde 0.9

te bereiken. (De waarde uit de onderstelling der rechtlijnigheid afgeleid is 0.58).

Mogen dus de voorgaande berekeningen ons weinig positiefs leeren; zij vestigden vooreerst de aandacht op de groote wenschelijkheid van meerdere gegevens omtrent de waarden van de grootheden a en b van zeer weinig vluchtige stoffen; immers het blijkt opnieuw, dat het geheele gedrag van alle stelsels, waarin zulke stoffen optreden door die grootheden wordt beheerscht, en voor de theorie der mengsels zou het juist van groot belang zijn haar uitkomsten te kunnen toetsen aan zoodanige gevallen, waar de beide komponenten in eigenschappen zeer sterk uiteenloopen. Weliswaar zal het niet gemakkelijk vallen op de gewone wijze het kritische punt van zulke stoffen vast te stellen, maar er zou al veel gewonnen zijn wanneer men een schatting der kritische temperatuur kon verkrijgen door berekening van de a en b uit de afwijkingen van de wet van BOYLE in verdunden gastoestand, dus toch altijd eenige honderden graden beneden het kritische punt.

En vervolgens meen ik na het voorgaande deze conclusie wel te mogen trekken, dat het optreden van een temperatuurmaximum in de driephasenlijn der minst vluchtige stof, verre van het algemeene geval te zijn, zich zal beperken tot mengsels van zeer exceptioneelen aard.

Veel veelvuldiger dan een temperatuurmaximum zal een drukmaximum optreden. Uit verg. (1) blijkt, dat dit altijd dan het geval zal zijn, als de uitdrukking

$$(\eta_d - \eta_s) - \frac{x_d}{x_l}(\eta_l - \eta_s)$$

negatief kan worden. Nu mogen wij wel niet zeggen, dat $\eta_d - \eta_s$ een sublimatie-warmte en $\eta_l - \eta_s$ een smeltwarmte is, omdat de η's niet op dezelfde stof betrekking hebben, maar wel mag gezegd worden, dat $\eta_d - \eta_s$ van de orde van een sublimatiewarmte, $\eta_l - \eta_s$ van de orde van een smeltwarmte is. Of met andere woorden $\eta_d - \eta_s$ zal ongeveer 7 à 8 maal $\eta_l - \eta_s$ zijn. In alle gevallen dus, waarin $\left(\frac{x_d}{x_l}\right)_{x=0} < 7$ zal ook het drukmaximum in de driephasenlijn ontbreken. Nu ontbreken ook hier de noodige gegevens om uit te maken of er veel systemen zijn, waarbij de $\frac{x_d}{x_l}$ bij het tripelpunt tot dit bedrag zal dalen. Immers dampspanningsbepalingen of direkte bepalingen van de gezochte verhouding zijn bijna altijd uitgevoerd bij aanmer-

kelijk hooger temperatuur [1]), en voor de berekening met behulp van de zooeven gebruikte formule ontbreken ook hier de noodige gegevens, terwijl het bovendien de vraag zou zijn of de formule, waar het zoo kleine bedragen geldt, nauwkeurig genoeg zou zijn. Maar — afgezien nog van het bestaan van mengsels met minimum dampdruk — bewijst reeds een systeem als aether-chloroform [2]), waar aan den

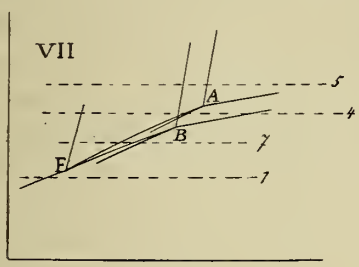


Fig. 1.

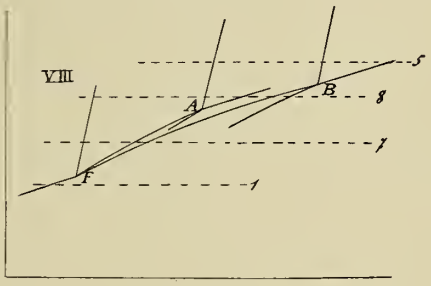


Fig. 2.

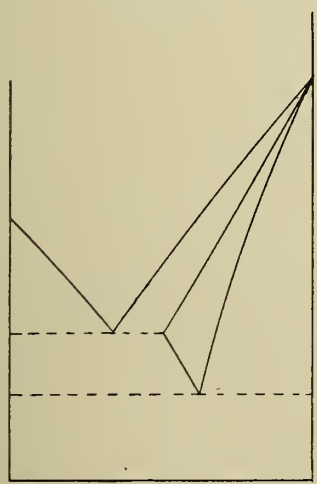


Fig. 3.

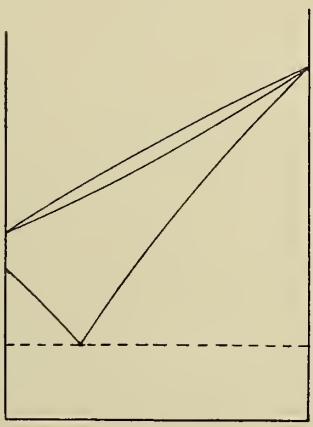


Fig. 4.

[1]) Vooral als men er op let, dat de verhouding van x_d en x_l uit dampspanningsbepalingen zou moeten berekend worden uit de formule:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dp_d} = \frac{x_l - x_l}{x_d(1-x_d)} \quad \text{of} \quad \frac{1}{p}\frac{dp}{dx_l} = \frac{x_d - x_l}{x_l(1-x_l)}$$

en de verkregen waarde dus sterk zal varieeren door een temperatuursverandering van een tiental graden, die in de nabijheid van het tripelpunt gewoonlijk percentsgewijze op den druk een enormen invloed heeft.

[2]) KOHNSTAMM & VAN DALFSEN, Deze Verslagen X, p. 667. BAKHUIS ROOZEBOOM (l.c. I p. 41) acht het waarschijnlijk, dat ook systemen van gassen met water en van water met vele zouten een soortgelijken vorm vertoonen. Voor zulke systemen, wier driephasenlijn voor de minst vluchtige stof een maximumdruk vertoont zal echter, althans bij temperaturen die niet al te ver van het tripelpunt liggen, de vorm der p, x-lijn aanmerkelijk van de daar in Fig. 15 en 19 geteekende lijn moeten afwijken, daar uit dien vorm zou volgen $x_d = x_l$.

chloroformkant x_d bijna gelijk aan x_l wordt, dat zulke mengsels mogelijk zijn.

In elk geval zal dus het schema voor het mogelijk verloop der beide driephasenlijnen in een binair stelsel, door BAKHUIS ROOZEBOOM in Fig. 108 van deel II Het. Gl. ontworpen, nog vermeerderd moeten worden met de typen VII en VIII, gekarakterizeerd door een opeenvolging van doorsneden in ROOZEBOOM's nomenclatuur als 1 . 7 . 4 . 5 en 1 . 7 . 8 . 5 te betitelen [1]). Type VII (zie Fig. 1) onderscheidt zich dus van III, doordat doorsnede 3 wegvalt; in de plaats daarvan komt onze (bij ROOZEBOOM ontbrekende) Fig. 3. Van type V onderscheidt zich VIII (zie Fig. 2) doordat inplaats van doorsnede 6 tusschen 8 en 5 optreedt de doorsnede aangegeven in Fig. 4.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van Dr. PH. KOHNSTAMM: *„Over metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde."*

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

In een vorige mededeeling [2]) heb ik een punt besproken waarop ik meen te moeten afwijken van de bestaande literatuur omtrent de evenwichten vast-fluïde. Een tweede punt,, dat met het voorgaande in verband zal blijken te staan, betreft den loop der krommen, die de metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde moeten aangeven in de T , x-figuren, door VAN DER WAALS [3]), en de v , x- en p , x-figuren door SMITS [4]) ontworpen. VAN DER WAALS zelf heeft op een onjuistheid in die figuren reeds attent gemaakt [5]), dat nl. de spinodale lijn hier binnen de connodale valt, terwijl zij in werkelijkheid bij lage temperaturen verre daarbuiten valt, maar het is niet hierop, dat ik het oog heb.

Nemen wij vooreerst de p , x-figuren. Volgens deze zal de complicatie, die de binodale vast-fluïde voor temperaturen beneden het tripelpunt vertoont, in dier voege verdwijnen, dat bij het tripelpunt een *nieuwe complicatie* met driephasendruk, horizontale en verticale raaklijn ontstaat, dat dan die beide complicaties samen door afsnoe-

1) l. c. p. 392.

2) Dit verslag p.

3) Deze Verslagen XIV, p. 185.

4) Deze Verslagen XIV, p. 187.

5) 1 c. p. 187.

ring aanleiding geven tot het ontstaan van een geheel gesloten tak, die zich meer en meer samentrekt en eindelijk als geïsoleerd punt verdwijnt. Het is duidelijk, dat op deze wijze ondersteld wordt, dat de complicatie alleen kan verdwijnen *boven* het tripelpunt en niet in het tripelpunt zelf, of met andere woorden, dat bij het doorgaan door het tripelpunt steeds bij den éénen bestaanden driephasendruk een tweede bijkomt, en deze twee eerst meer of minder hoog, maar altijd boven den tripelpuntsdruk en de tripelpuntstemperatuur samenvloeien en verdwijnen. Of nog anders uitgedrukt, in deze figuren is ondersteld, dat altijd een temperatuurmaximum in de driephasenlijn aanwezig is. In het licht van de beschouwingen van onze vorige mededeeling is deze onderstelling geenszins gewettigd. Maar nog afgezien daarvan rijzen zeer ernstige bezwaren tegen die voorstellingen. Vooreerst laat zich, als men daaraan vasthoudt, op geenerlei wijze inzien hoe het beloop der binodale vast-fluïde zijn moet als de vaste stof de vluchtigere component is. Vervolgens heeft in de geheele opeenvolging der p , x-figuren de binodale vast-fluïde slechts één punt met de as $x = 0$ gemeen. Nu is het echter bekend, dat voor de komponenten zelf, dus voor de concentraties $x=0$ en $x=1$ het p,T-diagram van fig. 1 (zie de plaat) geldt, d.w.z. bij de tripelpuntstemperatuur bestaat naast den tripelpuntsdruk C nog een tweede evenwichtsdruk vast-fluïde (en wel van een labiele phase C') en boven en onder de tripelpuntstemperatuur bestaan zelfs nog twee zulke drukken, waarvan dan de eene bij metastabiel, de ander bij labiel evenwicht behoort. Maar dan zal dus ook de binodale vast-fluïde voor het mengsel de as van de komponente, die vast wordt, niet eens, maar driemaal moeten snijden. En ten slotte laten zich de p , x-figuren van Smits en de T , x-figuren van Van der Waals ook niet in overeenstemming brengen met de door den eerste ontworpen v , x-figuren ; immers bij deze treedt wel degelijk vóór de afsnoering plaats vindt drievoudige snijding van de binodale met den rand op. (Men vergelijke in fig. 6 van het genoemde stuk van Smits den stand $f\,e\,d$ met $f_1 c_1 e_1 e_1' c_1' f_1'$; daartusschen moet noodzakelijk een v , x-lijn liggen, die den rand in drie punten snijdt). Nu de aandacht eenmaal op deze labiele en metastabiele evenwichten gevestigd is, schijnt het wenschelijk deze tegenstrijdigheden weg te nemen.

We gaan daartoe het best uit van de v , x-figuur. De algemeene coëxistentievergelijking van phasen in de variabelen v , x en T wordt in dit geval, als wij de phase 2 thans als vaste phase, 1 als fluïde phase beschouwen [1]):

[1]) Cont.. II p. 104.

$$(v_s - v_f)\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial {v_f}^2}\,dv_f + \frac{\partial^2\psi}{\partial v_f \partial x}\,dx_f\right\} + (x_s - x_f)\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial v_f \partial x_f}\,dv_f + \frac{\partial^2\psi}{\partial {x_f}^2}\,dx_f\right\} + + \left(\frac{\varepsilon_{sf}}{T}\right)dT = 0,$$

zoodat wij voor konstante temperatuur krijgen :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial v \partial x}(v_s - v_f) + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x_s - x_f)}{\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(v_s - v_f) + \frac{\partial^2\psi}{\partial v \partial x}(x_s - x_f)}.$$

We zullen teller en noemer van deze breuk in 't vervolg met T en N aanduiden. De geometrische beteekenis van N is door VAN DER WAALS in zijn eerste verhandeling over deze onderwerpen reeds gegeven [1]) : de plaats $N = 0$ is de meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen uit het punt voor de vaste stof aan de isopiësten getrokken. Gemakkelijk toont men aan, dat de plaats $T = 0$ de plaats is, die men verkrijgt als men hierin in stede van de p-lijnen de q-lijnen stelt, d. w. z. de lijnen $\frac{\partial\psi}{\partial x} = C$. Een dubbelpunt of een geïsoleerd punt, zooals zij door SMITS worden aangenomen, kunnen dus alleen voorkomen waar de meetkundige plaatsen $T = 0$ en $N = 0$ elkaar snijden. Daar in zulk een punt, zooals uit de geometrische beteekenis blijkt, de p- en de q-lijnen dezelfde raaklijn hebben en dus elkaar raken, moet zulk een punt tevens op de spinodale lijn liggen [2]). Geheel in overeenstemming daarmede verkrijgt men dan ook gemakkelijk, voor het geval x_s niet 0 of 1 is, het beloop der genoemde meetkundige plaatsen in fig. 2 aangegeven. De gestippelde lijn geeft de concentratie aan der vaste phase P; de lijnen $A\,Q\,B$ en $C\,Q'\,D$ zijn de beide takken van de spinodale, de beide andere lijnen die A met B en C met D verbinden de takken van $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x = 0$. Wan-

[1]) Deze Verslagen XII, p. 444.

[2]) Immers uit de verg. der spinodale

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v}\right)^2 = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial v \partial x}}{\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}} = \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2\psi}{\partial v \partial x}}$$

volgt:

$$-\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_v}{\left(\frac{dp}{dv}\right)} = \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial v dx}}{\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}} = \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v}} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_v}{\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_x} = -\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$$

neer nu $x_s=0$ wordt, dan is het duidelijk dat de lijn $N=0$ aan dien rand moet gaan door het punt, waar $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=0$, en dat punt valt, zooals bekend is aan den rand met de spinodale samen. De conclusie schijnt voor de hand te liggen, dat dus de punten Q en Q', de snijpunten van de spinodale en $N=0$, naar den rand zullen verschoven zijn, en dat dus de afsnoerings- en samentrekkingspunten uit fig. 2—8 van den Heer Smits (l. c.) aan den rand zouden moeten liggen. Evenwel deze conclusie is toch niet juist. Immers de gevolgtrekking, dat waar de spinodale en $N=0$ elkaar snijden ook — wegens de geometrische beteekenis van $N=0$ en $T'=0$ — deze elkaar moeten doorsnijden, gaat hier aan den rand niet op. Dit hangt samen met het nul worden van $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}$ en het oneindig worden van $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$. Voeren wij de waarde MRT/x, die de laatste grootheid voor $x=0$ krijgt, in, dan verkrijgt T de waarde:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial x}(v_s-v_f)-xf\frac{MRT}{xf}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v(v_f-v_s)-MRT$$

en deze uitdrukking zal in het algemeen volstrekt niet gelijk nul zijn in de punten waar $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{x=0}=0$, zooals reeds blijkt uit de eenvoudige overweging, dat er geen samenhang kan bestaan tusschen $\frac{MRT}{v_f-v_s}$, een grootheid, die uitsluitend afhangt van de eigenschappen van de zuivere komponente, en $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ in de maximum en minimumpunten van haar isotherm, omdat die laatste grootheid mede zal moeten afhangen van de eigenschappen der tweede komponente. De punten Q en Q' zullen dus zeker niet aan den rand liggen en in de punten, waar $N=0$ den rand snijdt zal de binodale eenvoudig een raaklijn evenwijdig aan de v-as hebben.

De gedaante, die de verschillende figuren zullen aannemen, zal nu geheel afhangen van het antwoord op de vragen of zoodanige punten Q en Q', wanneer de vaste stof een der komponenten is, ook blijven bestaan, en zoo ja, waar zij liggen. Op de fraaiste en meest algemeene wijze zou men deze vragen tot oplossing brengen door een uitvoerige beschouwing van de verschillende vormen, die de q-lijnen kunnen vertoonen. Daar evenwel voor de beantwoording van de speciale vraag, die ons bezig houdt, zulk een discussie gemist kan worden, heb ik gemeend aan een andere, kortere bewijsvoering de voorkeur te mogen geven. Ik merk daartoe

vooreerst op, dat het gemakkelijk in te zien is, dat althans in een speciaal geval zulk een punt ook thans moet bestaan. Denken wij ons een plooi, waarvan het plooipunt zoover naar de zijde der kleine volumes verschoven is, dat de raaklijn aan de plooi in 't plooipunt naar het punt wijst, dat den vasten toestand aanduidt. [1]) Daar de plooi in 't plooipunt den isopiest raakt, ligt in dat geval het plooipunt blijkbaar op de lijn $N = 0$. [2]) Maar het plooipunt ligt ook op de spinodale lijn, dus het punt Q ligt hier in het plooipunt, daar nu noch $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$, noch $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \infty$. We mogen daaruit wel concludeeren dat in soortgelijke gevallen, dus die gevallen, waar het plooipunt nog iets verder of iets minder ver naar de zijde der kleine volumina verschoven is, en misschien in 't algemeen wanneer het vluchtigheidsverschil tusschen de beide komponenten groot is, een tak van $T = 0$ door de figuur zal loopen, en deze dan wel waarschijnlijk een snijpunt met de lijn $N = 0$ zal hebben. Nadere preciseering dier onderstelling kan natuurlijk alleen de berekering geven.

Wij zullen daarbij beginnen met het geval, dat b met toenemende x toe- en a afneemt zoodat $T_{k\xi}$ sterk afneemt en $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ overal positief is; en wij bepalen ons voorloopig alleen tot het vast worden van de minst vluchtige componente, dus $x_s = 0$. Schrijven wij de waarde, die T aan den rand krijgt met behulp van de waarde voor $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ uit de toestandsvergelijking afgeleid, in den vorm:

$$(v_f - v_s)\left\{\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx} - \frac{da/dx}{v^2}\right\} - MRT. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Het is duidelijk, dat deze waarde voor $v = \infty$ negatief zal worden,

---

[1]) Het bovenstaande werd geschreven, voordat de merkwaardige proef van Prof. ONNES (Deze Verslagen Nov. 1906) de aandacht gevestigd had op „barotropische" plooipunten. Nu de onderzoekingen, die zich aan die proef hebben vastgeknoopt, het bewijs hebben geleverd, dat plooipunten kunnen bestaan, waarin de raaklijn // x-as loopt, is natuurlijk à fortiori bewezen het bestaan van plooipunten, als in den tekst worden verondersteld, waarin de helling der raaklijn nog niet eens zoo bijzonder gering behoeft te zijn.

[2]) Wij merken terloops op, dat het dus niet juist is, om in 't algemeen te zeggen dat de lijn $N = 0$ om de plooi heenloopt, in den zin, zooals VAN DER WAALS (Deze Verslagen XII, p. 610) dit blijkbaar bedoelt, d. w. z. dat de snijpunten van de lijn $N = 0$ met de binodale en spinodale ter weerszijden van het plooipunt zouden liggen. Immers mocht het plooipunt nog iets verder naar de zijde der kleine volumina verschoven zijn, dan liggen blijkbaar beide snijpunten van $N = 0$ met binodale en spinodale op den damptak dier lijnen, (het gedeelte dier lijnen tusschen het plooipunt en het punt met het grootste volume op de x-as).

daarentegen positief voor $v = b$ [1]); er zal dus altijd een punt op de as $x = 0$ moeten liggen, waar $T' = 0$. De waarde, die T' verkrijgt voor $x = 1$, luidt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v (v_f - v_s) - \frac{MRT}{1-x}$$

en deze uitdrukking zal dus voor $x = 1$ voor alle mogelijke vloeistof-volumina negatief en zelfs negatief oneindig zijn. Daaruit volgt, dat, van het snijpunt van $T' = 0$ met de as $x = 0$ uit, de plaats $T' = 0$ naar kleinere volumina zal loopen[2]). Of nu $T = 0$ en $N = 0$ elkaar in onze figuur kunnen snijden zal afhangen van de plaats waar $T = 0$ de as $x = 0$ snijdt. We kunnen daarbij drie gevallen onderscheiden:

1°. Het snijpunt van $T' = 0$ en de as ligt bij kleiner volume dan de plaatsen, waar $N = 0$ de as snijdt, dan zal geen snijding van $T = 0$ en $N = 0$ ontstaan; de punten Q en Q' liggen geheel buiten de assen $x = 1$ en $x = 0$;

2°. Het snijpunt van $T = 0$ met de as ligt tusschen de snijpunten van $N = 0$ daarmede; dan valt wel het afsnoeringspunt, maar niet het samentrekkingspunt binnen de figuur;

3°. Het snijpunt van $T = 0$ en de as ligt bij grooter volume; dan zal zoowel het afsnoerings- als het samentrekkingspunt in de figuur vallen.

De gevolgen voor de verandering van de v, x-projectie der binodale met verandering van temperatuur in deze drie gevallen zijn waarschijnlijk uit de figuren 3—5 zonder verdere toelichting duidelijk. Wat de veelvuldigheid van voorkomen der drie gevallen betreft, is het duidelijk, dat het laatste geval slechts zelden, bij bijzonder groote waarden van $\frac{db}{dx}$ en $-\frac{da}{dx}$ of in 't algemeen van $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ zal optreden. Geheel onmogelijk zou dit geval zijn, wanneer wij moesten letten op de temperatuur van het tripelpunt en het volume dat de verzadigde damp

---

[1]) Mocht men bezwaar hebben $v = b$ te stellen, daarbij toch nog aannemende, dat $v_f > v_s$ dan zal men in elk geval moeten toegeven, dat er niets tegenstrijdigs in ligt aan te nemen, dat bij zekeren hoogen druk het volume in vasten toestand kleiner kan zijn dan dat in vloeibaren en dat er toch een zeer groote drukvermeerdering noodig kan zijn om de stof in hetzelfde volume te houden, nadat men enkele der moleculen door veel grootere zal hebben vervangen (dus $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v = \infty$).

[2]) In elk punt der lijn $T = 0$ wijst de daardoor gaande q-lijn als gezegd naar het punt dat de vaste stof aanduidt. Daar nu elke q-lijn voor oneindig volume $//$ v-as is en eindigt in het punt $v = b$, volgt uit het bestaan der lijn $T = 0$ dat elke q-lijn, die deze meetkundige plaats snijdt, minstens één buigpunt bezitten moet.

dan heeft, immers dit bedraagt zeker eenige duizende malen b en bij de tripelpuntstemperatuur zal dan ook nog wel nooit sprake zijn van een snijding van $T = 0$ met den tak van $N = 0$, die voor de groote volumina geldt. Maar voor ons geval hebben wij niet met die temperatuur te rekenen, maar met de hoogste temperatuur, waarbij de binodale vast-fluide nog drie punten met de as $x = 0$ gemeen heeft en dit is blijkbaar de temperatuur van punt A in fig. 1. Deze nu kan waarschijnlijk zeer aanzienlijk liggen boven het tripelpunt, en voorts komt hierbij, dat — gelijk wij reeds opmerkten — niet het volume van den verzadigden damp maar het veel kleinere van het maximum der isotherm moet ingevoerd worden. Stellen wij de temperatuur van A eens zoo hoog, dat het maximum punt der isotherm bij een volume $4b$ ligt, dan zal reeds met $\frac{db}{dx} = 3b_1$ of $b_2 = 4b_1$ en v_s dicht bij b de uitdrukking positief worden, (da/dx is negatief). Mogelijk is dus het geval sub 3°. wel, maar het blijkt tevens, dat het alleen in exceptioneele gevallen zal optreden.[1])

Met geen dezer drie gevallen nu stemmen de door VAN DER WAALS en SMITS ontworpen T, x- en p, x-figuren overeen. Met het sub 3_0 genoemde in zooverre, dat aangenomen wordt, dat het afsnoerings- en samentrekkingspunt binnen de figuur valt. Maar tevens is het uit de vx-figuren duidelijk, dat lang beneden het tripelpunt, n.l. reeds bij .de temperatuur B van fig. 1 dat is de temperatuur, waarbij in fig. 5 de nieuwe tak der binodale (aan de linkerzijde) in de figuur optreedt, een complicatie moet beginnen in de p, x- en T, x-figuren. Letten wij weer eerst op de p, x-lijnen.

Bij de genoemde temperatuur (T_1) begint zich ter hoogte van de spinodale lijn, dus ver beneden het punt der stabiele coëxistentie een nieuwe tak te vormen. In de p, x-figuur is het punt, waar deze optreedt in tegenstelling met de v, x-figuur wel een punt, waar de raaklijn onbepaald is; immers voor de eerste figuur geldt de vergelijking:

---

[1]) Het blijkt uit het hier gezegde, dat de figuren 3—5 geheel schematisch bedoeld zijn, want terwijl wij verschillende binodalen vast-fluïde aangebracht hebben, die alle voor verschillende temperaturen gelden, hebben wij de meetkundige plaatsen $T = 0$ en $N = 0$ onveranderd gelaten. Dit is natuurlijk alleen met het oog op ruimtebesparing geschiedt, omdat men anders zonder de figuren onoverzichtelijk te maken, niet veel meer dan één temperatuur in elke figuur had kunnen weergeven. Maar het is na het gezegde wel duidelijk, dat ook de punten Q en Q' zich bewegen en dat het bijv. best zou kunnen gebeuren, dat het punt Q' bij lagere temperaturen nog niet in de figuur aanwezig is, en eerst bij hoogere verschijnt. Ook de volgende figuren zijn schematisch bedoeld, en dienen alleen ter verduidelijking van de eigenschappen in den tekst genoemd.

$$N \,.\, dp = (x_s - x_f) \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v_f{}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_f{}^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v_f \partial x_f} \right)^2 \right\} dx_f ;$$

de factor van dx_f is nul op de spinodale lijn en de factor van dp op de lijn $N = 0$, die beide door het bedoelde punt gaan, $\frac{dp}{dx}$ is daar dus onbepaald. De nieuwe tak breidt zich nu meer en meer uit, (fig. 6) terwijl zijn maximum op de spinodale en het punt met verticale raaklijn op de lijn $N = 0$ blijft liggen. Wanneer de temperatuur van afsnoering in de v,x-figuur (T_2) bereikt is, heeft er samenvloeiing van den ouden en den nieuwen tak plaats, (fig. 7) die dan weer uit elkaar gaan, zooals figuur 8 aangeeft. Bij de tripelpuntstemperatuur (T_3) vallen het midddelste en het bovenste der drie snijpunten met de as juist samen (in het eindpunt van de dubbellijn gasvormig-vloeibaar) (fig. 9); daarna verruilen zij hun plaatsen. Bij nog hoogere temperatuur vallen het onderste en het nu middelste geworden snijpunt met de as samen, er is daar ter plaatse weer een punt met onbepaalde raaklijn (T_4, de temperatuur A van fig. 1) (fig. 10); bij nog hoogere temperatuur heeft de binodale vast-fluïde de as geheel losgelaten en vormt haar onderste tak een gesloten kromme, die zich meer en meer samentrekt en eindelijk bij de temperatuur van het geïsoleerde punt van fig. 5 verdwijnt. Het is hierbij klaarblijkelijk essentieel dat T_4 boven T_3 en T_3 boven T_1 ligt, volgens de beteekenis, die zij in fig. 1 hebben, ook moet T_5, het punt waarop de afgesnoerde tak uit de figuur verdwijnt boven T_3, het tripelpunt, liggen, omdat in het tripelpunt de binodale vast-vloeibaar altijd nog twee punten met den rand gemeen moet hebben (even daarboven zelfs drie). Maar het is niet essentieel, dat T_2 tusschen T_3 en T_1 ligt; T_2 zou evengoed boven T_3 kunnen liggen. Men krijgt dan de opeenvolging: fig. 6, fig. 9a (tripelpunt), fig. 10a. Ligt nu T_2 beneden T_4, dan heeft er samenvloeiing en doorsnijding plaats en men krijgt na fig. 10a fig. 11 en verder fig. 4 en 5 van Smits (l.c.); ligt T_2 ook boven T_4 dan vereenigen zich eerst de beide onderste snijpunten der binodale vast-vloeibaar met den rand, maken zich daarvan los eu men verkrijgt dus in dit geval, maar altijd eerst boven T_4, dus boven temperatuur A van fig. 1 de door Smits geteekende continue lijn fig. 3 (l.c.), die dan in fig. 4 en 5 (l.c.) overgaat.

Het sub 2°. genoemde geval, dat het samentrekkingspunt buiten de figuur valt, laat zich uit het voorgaande eigenlijk daardoor afleiden, dat men T_5, de temperatuur waarbij de afgesnoerde tak uit de figuur verdwijnt, beneden T_4 stelt, de temperatuur waarbij hij zich van den rand losmaakt. Op onze figuren heeft dit alleen den invloed, dat de

lus van fig. 9 en fig. 10*a* zich niet van den rand los kan maken, zooals in fig. 10, om als geïsoleerd punt te verdwijnen; maar deze lus trekt zich meer en meer aan den rand samen en verdwijnt daar. Ook in dit geval kan T_2 boven T_3 maar natuurlijk niet boven T_4 liggen. Ligt T_2 onder T_3, dan heeft men dus de opeenvolging 6, 7, 8, 9 en verdwijnen van de lus in den rand; ligt T_2 boven T_3 dan: 6, 9*a*, 10*a*, 11 en verdwijnen van de lus in den rand.

Het boven sub 1°. genoemde geval eindelijk, dat ook het afsnoeringspunt buiten de v, x-figuur valt, is te beschouwen als het geval, dat T_2 beneden T_1 ligt en T_4 boven T_5. Men heeft dan de opeenvolging: het bovenste stuk van fig. 6 (n.l. zonder de lus beneden), fig. 12, 8, 9, waarna de lus in den rand verdwijnt. In al de genoemde gevallen nu, behalve in het tweede ondergeval van het geval sub 3°. (dus T_2 boven T_3) kunnen zich nog twee mogelijkheden voordoen. Wij hebben voor die gevallen tot nu toe aangenomen, dat de tripelpuntstemperatuur de hoogste temperatuur is, waarbij beide binodalen elkaar in het stabiele gebied snijden, en dat zij daarboven elkaar hebben losgelaten. Het is nu echter ook mogelijk, dat ook in deze gevallen de beide binodalen elkaar bij het tripelpunt en daarboven nog tweemaal snijden. Overal waar boven fig. 9 staat komt dan fig. 9*b*, die vervolgens overgaat in fig. 11.

Wij krijgen dus het volgende overzicht:

Geval sub 1°.

Bovenste stuk van 6, 12, 8, 9,	verdwijnen van de lus in den rand
„ „ „ 6, 12, 8, 9*b*, 11	„ „ „ „ „ „ „

Geval sub 2°.

6, 7, 8, 9,	„ „ „ „ „ „ „
6, 9*a*, 10*a*, 11	„ „ „ „ „ „ „
6, 7, 8, 9*b*, 11	„ „ „ „ „ „ „

Geval sub 3°.

6, 7, 8, 9, 10,	verdwijnen van de lus in de fig.
6, 9*a*, 10*a*, 11, 4 en 5 SMITS	„ „ „ „ „ „ „
6, 9*a*, 10*a*, 3, 4 en 5 SMITS	„ „ „ „ „ „ „
6, 7, 8, 9*b*, 11, 4 en 5 SMITS	„ „ „ „ „ „ „

De meeste kans op slechts eenmalige snijding met de binodale vloeibaar-gasvormig biedt natuurlijk, zooals men het best uit de *vx*-figuur ziet, het geval sub 1°, vooral wanneer daarbij de lijn $T = 0$ de as bij zoo kleine volumes snijdt, dat zij niet alleen met de spinodale, maar ook met de binodale der dwarsplooi geen punt meer gemeen heeft. Alleen door zeer bijzonderen loop der binodale van de dwarsplooi zou dan nog dubbele snijding kunnen optreden. Aan den

anderen kant zal hoogst waarschijnlijk altijd als de lijn $T = 0$ de binodale der dwarsplooi snijdt, (wat altijd in de gevallen sub 2 en 3° genoemd gebeuren moet) ook dubbele snijding der beide binodalen optreden.

Hieruit blijkt tevens de samenhang van dit onderzoek met dat van de vorige mededeeling. Immers het blijkt nu, dat de voor het geval sub 1°. geldende vorm der p,x-lijnen met eenmalige snijding eigenlijk de verreweg het meeste voorkomende zijn zal n.l. in bijna alle gevallen waar geen temperatuurmaximum in de driephasenlijn aanwezig is; in dat geval immers is altijd de tripelpunts-temperatuur de hoogste temperatuur, waarbij een driephasencoëxistentie bestaat.

Voor een volledig overzicht heb ik in figuur 13—16 tevens aangegeven, hoe de binodale voor de andere vaste phase zich van de dwarsplooi losmaakt. Dit is maar op ééne wijze mogelijk, omdat hier nergens snijding der lijnen $N = 0$ en $T = 0$ kan zijn. Immers voor deze binodale is $x = 1$ en dus wordt de uitdrukking voor T aan den rand

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v (v - v_s) + \frac{MRT}{x}$$

dus voor beide randen steeds positief. De lijn $T = 0$ zou dus een gesloten kromme moeten worden, wat wegens den vorm der q-lijnen als uitgesloten mag beschouwd worden [1]).

In de T,x-lijnen zal natuurlijk dubbele snijding boven het tripelpunt altijd voorkomen wanneer de driephasenlijn een maximum druk heeft. Overigens valt van de T,x-lijnen niets bijzonders te zeggen; zij hebben hetzelfde algemeene verloop als de hier gegeven p,x-lijnen, mits men de figuren om de x-as 180° laat draaien of m. a. w. mits men van de p-as een negatieve T-as maakt. Voorts liggen de punten met verticale raaklijn hier natuurlijk op de lijn $W_{sf} = 0$ in stede van op $N = 0$; alleen aan den rand vallen beide samen. Mocht het drukmaximum der driephasenlijn zich bevinden bij hooger druk dan het punt A van fig. 1 dan moet men zich natuurlijk bevinden in het geval sub 3°., d. w. z. het samentrekkingspunt moet binnen de figuur gelegen zijn.

In het bovenstaande is aangenomen, dat in het geheele gebied

---

[1]) Zoolang altans niet de complicaties optreden, die samenhangen met het aanwezig zijn van een meetkundige plaats $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$. (Zie v. d. WAALS, Dit Verslag p. 703). Op de veranderingen, die tengevolge daarvan in het bovenstaande moeten gebracht worden, zal ik later wellicht nog terugkomen.

$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ = positief en wel a afnemende bij toenemende b. Het geval, dat a toeneemt bij toenemende b levert geen nieuwe gezichtspunten op. Hebben wij een systeem waarin a sterk toeneemt zoodat de kritische temperatuur met b stijgt en $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ negatief is, dan blijft de uitdrukking

$$(v - v_s)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v + (x_s - x_f)\frac{MRT}{x_f(1-x_f)}$$

blijkbaar altijd negatief voor $x_s = 0$. En dit is begrijpelijk, omdat die as nu ook die van de vluchtigere komponent is; daarentegen zal de teekenverandering thans kunnen optreden aan de andere as. Wat zooeven links geschiedde zal nu rechts geschieden en omgekeerd. Alleen valt op te merken, dat thans de lijn $T = 0$ als zij bestaat de as $x = 1$ in twee punten moet snijden. Immers de uitdrukking

$$(v - v_s)\left\{\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx} - \frac{da/dx}{v^2}\right\} + MRT$$

waar db/dx en da/dx positief zijn, wordt positief voor $v = b$ en $v = \infty$. Daaruit volgt dat naast de gevallen van zooeven thans nog deze mogelijkheid bestaat, dat wel het samentrekkingspunt, maar niet het afsnoeringspunt binnen de figuur valt. Voor de p,x- en Tx-figuren maakt dit alleen dit verschil, dat een lus ontstaan op de wijze van fig. 12, (die in de vroegere gevallen altijd in den rand verdween) nu ook als de lus van fig. 10 in een punt binnen de teekening kan verdwijnen. Voorts is het duidelijk, dat in dit geval het samentrekkingspunt veel eerder binnen de figuur zal vallen dan in het vorige. Immers volgens formule (1) moet $\frac{db}{dx}$ een excessief hooge waarde hebben opdat de uitdrukking bij een volume $v = 10b$ nog positief worden kan. Zij echter bijv. $da/dx = 2a_2 - 2a_{12} = 1.8\, a_2$ [1]) dan wordt

$$\frac{da/dx}{v^2} = 1.8\frac{a}{v^2} = 1.8\left(\frac{MRT}{v-b} - p\right)$$

---

[1]) Met de waarden voor a en b van tabel 82 bij Landolt en Börnstein vindt men voor de hoogste waarde van $\frac{b_2}{b_1}$ ongeveer 12, voor die van $\frac{a_2}{a_1}$ ongeveer 250; sluit men waterstof uit dan worden die getallen resp. 8 en 40. Terwijl dus bij uitsluiting van waterstof paren met een verhouding $\frac{b_2-b_1}{b_1} > 7$ niet kunnen voorkomen kan, a_2-a_1 de waarde 39 bereiken.

$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ = positief en wel a afnemende bij toenemende b. Het geval, dat a toeneemt bij toenemende b levert geen nieuwe gezichtspunten op. Hebben wij een systeem waarin a sterk toeneemt zoodat de kritische temperatuur met b stijgt en $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ negatief is, dan blijft de uitdrukking

$$(v - v_s)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v + (x_s - x_f)\frac{MRT}{x_f(1-x_f)}$$

blijkbaar altijd negatief voor $x_s = 0$. En dit is begrijpelijk, omdat die as nu ook die van de vluchtigere komponent is; daarentegen zal de teekenverandering thans kunnen optreden aan de andere as. Wat zooeven links geschiedde zal nu rechts geschieden en omgekeerd. Alleen valt op te merken, dat thans de lijn $T = 0$ als zij bestaat de as $x = 1$ in twee punten moet snijden. Immers de uitdrukking

$$(v - v_s)\left\{\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx} - \frac{da/dx}{v^2}\right\} + MRT$$

waar db/dx en da/dx positief zijn, wordt positief voor $v = b$ en $v = \infty$. Daaruit volgt dat naast de gevallen van zooeven thans nog deze mogelijkheid bestaat, dat wel het samentrekkingspunt, maar niet het afsnoeringspunt binnen de figuur valt. Voor de p,x- en Tx-figuren maakt dit alleen dit verschil, dat een lus ontstaan op de wijze van fig. 12, (die in de vroegere gevallen altijd in den rand verdween) nu ook als de lus van fig. 10 in een punt binnen de teekening kan verdwijnen. Voorts is het duidelijk, dat in dit geval het samentrekkingspunt veel eerder binnen de figuur zal vallen dan in het vorige. Immers volgens formule (1) moet $\frac{db}{dx}$ een excessief hooge waarde hebben opdat de uitdrukking bij een volume $v = 10b$ nog positief worden kan. Zij echter bijv. $da/dx = 2a_2 - 2a_{12} = 1.8\ a_2$ [1]) dan wordt

$$\frac{da/dx}{v^2} = 1.8\frac{a}{v^2} = 1.8\left(\frac{MRT}{v-b} - p\right)$$

---

[1]) Met de waarden voor a en b van tabel 82 bij LANDOLT en BÖRNSTEIN vindt men voor de hoogste waarde van $\frac{b_2}{b_1}$ ongeveer 12, voor die van $\frac{a_2}{a_1}$ ongeveer 250; sluit men waterstof uit dan worden die getallen resp. 8 en 40. Terwijl dus bij uitsluiting van waterstof paren met een verhouding $\frac{b_2-b_1}{b_1} > 7$ niet kunnen voorkomen kan, $\frac{a_2-a_1}{}$ de waarde 39 bereiken.

Fig. 1.

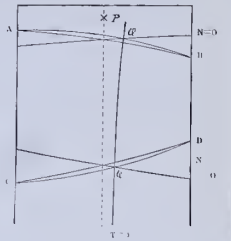


Fig. 2.

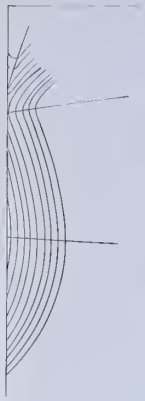


Fig. 3.

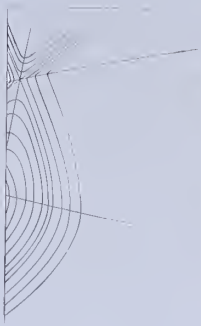


Fig. 4.

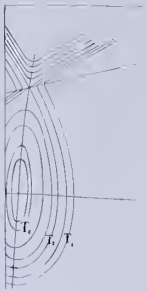


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

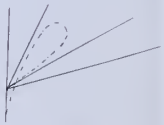


Fig. 9.

Fig. 9a.

Fig. 9b.

Fig. 10.

Fig. 10a.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

en dus $(v-v_s)\frac{da/dx}{v^2}$ van de orde 1.8 $\{MRT-p(v-v_s)\}$. De laatste term is bij dit volume en de hier geldende lage temperatuur zeker een kleine fractie van MRT, evenzoo $\frac{MRT}{v-b}\frac{db}{dx}$, zoodat de uitdrukking negatief wordt.

Ook bij het geval, dat $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ in het onderzochte gebied nul kan worden, behoeven wij niet stil te staan; immers dit levert niets nieuws op. Wordt $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$ nul doordat $\frac{da}{dx}$ eerst negatief, dan positief is (minimum kritische temperatuur) dan zal men aan beide kanten hebben wat in het eerste geval aan den linker kant (fig. 6—12) plaats greep; is da/dx eerst positief, dan negatief (minimum van dampdruk) dan heeft men aan beide kanten, wat aan den rechter kant fig. 13—16 gebeurt.

Ook het optreden van gevallen, waarin de plooipuntskromme de driephasenlijn ontmoet, geeft in verband met het voorgaande geen bezwaar meer. Alleen is het duidelijk, dat de twee punten, waar die ontmoeting plaats grijpt én in druk én in temperatuur beneden het punt van afsnoering (dubbelpunt der binodale vast-fluïde) moeten liggen. Immers als de afsnoering heeft plaats gehad en dus de binodale in twee stukken is uiteengevallen, schijnt het bij een voortdurend samentrekken der v,x-figuur en dus een negatieve waarde van $(\varepsilon_{sf})_v$ niet meer mogelijk, dat de driephasendruk met een plooipuntsdruk samenvalt [1]). Maar niets pleit dan ook tegen deze conclusie. Wel daarentegen komt men in onoverkomelijke moeilijkheden als men vasthoudt aan de onderstelling, dat steeds het afsnoeringspunt aan den rand zou moeten liggen. Immers dan valt de afsnoeringstemperatuur en -druk samen met die van B (fig. 1) en dit punt ligt, daar het nog aanmerkelijk beneden het tripelpunt ligt, althans in druk zeker ver beneden eenig plooipunt.

Wat ten slotte de gevallen betreft waar x_s tusschen 1 en 0 inligt, d.w.z. waar de vaste stof een in fluïden toestand geheel of gedeeltelijk gedissocieerde verbinding is, deze laten zich uit de v, x-figuur (fig. 2) zonder verdere moeilijkheid in alle volledigheid afleiden. Men krijgt dan bij lage temperaturen de diagrammen van SMITS in de figuren 4—7 bij zijn opstel: Bijdrage tot de kennis der p, x- en p, T-

[1]) Verg. de desbetreffende figuren bij VAN DER WAALS (Deze Verslagen XII, 447, XIV, 186 (fig. 2)) en SMITS (Deze Verslagen XII, p. 666 en 671 en XIV, p. 192 (fig. 10)).

lijnen enz.,[1]) wanneer men althans de maxima daarvan zeer veel hooger neemt en de minima zeer veel lager, zoodat in de linkerhelft de figuur zich zelve tweemaal doorsnijdt. De losmaking van beide binodalen heeft dan op een zeer ingewikkelde wijze plaats door middel van een reeks van wijzigingen, die ik echter met het oog op de plaatsruimte zal achterwege laten. Ik moet daarvoor verwijzen naar de in den aanhef der vorige mededeeling genoemde bewerking, al zal het verschijnen daarvan zich nog wel eenigen tijd laten wachten.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement N°. 15 bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM: *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. XV. *Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen."*

§ 1. *Inleiding.* In het Zittingsversl. van Dec. '06, p. 507 (Meded. N°. 96*b*) werd medegedeeld, dat het onderzoek der ψ-vlakken van binaire mengsels, waarin de moleculen van de eene component uitgebreidheid hebben, doch volstrekt geene aantrekking uitoefenen, als eenvoudiger geval ter vergelijking met wat de waarnemingen betreffende mengsels van het nagenoeg aantrekkinglooze He opleveren, zou worden ter hand genomen. Wij hopen eerlang omtrent een dergelijk ψ-vlak eene nadere mededeeling te doen[2]). Intusschen zijn bij dit onderzoek reeds eenige resultaten verkregen, die wij hier zullen mededeelen.

Zoo is daarbij gebleken, dat bij geschikte temperaturen, indien althans voor deze mengsels de in § 2 genoemde onderstellingen betreffende de toepasselijkheid van de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS met voor zekere x niet van v en T afhangende a en b, enz., gelden, *twee verschillende phasen met elkander in evenwicht kunnen zijn, die men beide als gasphasen zal hebben te beschouwen.* De twee stoffen, die als componenten dier mengsels optreden, zijn dan zelfs *in den gastoestand niet in alle verhoudingen mengbaar.* En dit zal bij de vervulling van bepaalde voorwaarden het geval kunnen blijven wanneer de eene component niet volstrekt aantrekkingloos is,

[1]) Deze Verslagen XIV, p. 192.

[2]) VAN LAAR, Zittingsversl. Mei '05, p. 19, behandelde reeds de projectie der plooipuntslijn op het v, x-vlak voor een dergelijk mengsel, zonder echter nader de vorm der spinodale lijn en der plooi te onderzoeken.

doch nog een zekere aantrekking bezit, die echter slechts zeer gering zijn mag.

Uit de beschouwingen van VAN DER WAALS, Contin. II p. 41 sqq. en p. 104, volgt, dat de vermenging van twee stoffen in den fluiden toestand tot stand komt tengevolge van de van de temperatuur T afhangende moleculaire beweging, en bevorderd wordt door de wederzijdsche aantrekking der moleculen der twee componenten, bepaald door de grootheid a_{12}, terwijl de aantrekking der moleculen van elke component onderling, bepaald door a_{11} en a_{22}, de vermenging tegengaan. Is de wederzijdsche aantrekking der moleculen der beide componenten, a_{12}, klein ten opzichte van de onderlinge aantrekking van een der componenten, a_{11}, dan zal het optreden van volledige mengbaarheid alleen door de moleculaire beweging worden bepaald, en de temperatuur daartoe tot een bedrag moeten worden opgevoerd, dat de kritische temperatuur van de minst vluchtige component, T_{k_1}, en daarmede de kritische temperaturen van alle mengsels dier componenten, als sommige verhoudingen der b's daarbij kunnen optreden, belangrijk zal kunnen overtreffen. Zoo volgt bv. uit de verg. (a) van VAN DER WAALS, Contin. II p. 43, voor de kritische temperatuur van volledige mengbaarheid (VAN DER WAALS l. c.) T_{km}, indien $a_{22} = a_{12} = 0$ en $b_{11} = b_{22}$ gesteld wordt: $T_{km} = 1.6875\ T_{k_1}$. Bij eene lagere temperatuur zijn de twee beschouwde stoffen slechts gedeeltelijk mengbaar, terwijl men voor eene dergelijke temperatuur boven T_{k_1} coëxistentie kan hebben van twee phasen, welke, zooals in § 3 en 4 nader zal worden uiteengezet, als gasphasen zijn te beschouwen.

Nu schijnt het wel in den aard der ons meest bekende stoffen, waarschijnlijk in den bouw hunner atomen te liggen, dat b_{22} tevens klein is, wanneer a_{22} zeer klein wordt; derhalve mag voor een aantrekkingloos gas b_{22} niet gelijk b_{11} van een gas met aantrekking worden gesteld, en zal, daar eene kleine waarde van b_{22} volgens de aangehaalde vergelijking van VAN DER WAALS de menging weder zeer in de hand werkt, de kritische temperatuur van volledige mengbaarheid niet zoo hoog kunnen stijgen als zooeven werd afgeleid. Maar al doet het boven als voorbeeld genoemde geval zich waarschijnlijk in de natuur niet voor, het is wel geschikt om bij te dragen tot het inzicht van wat bij gassen met uiterst zwakke aantrekking te verwachten is.

§ 2. *Het beloop der spinodale lijnen en de vorm der plooi op het ψ-vlak voor binaire mengsels, waarvan eene component een gas is met uitgebreide moleculen zonder aantrekking.* In fig. 1 zijn de spinodale lijnen voor een zoodanig geval voorgesteld. De figuur

heeft betrekking op het ψ-vlak voor de gewichtseenheid der mengsels, daar wij mede met het oog op de behandeling der barotropische verschijnselen, die bij geschikte verhouding der moleculairvolumina der componenten bij deze mengsels kunnen optreden [1]), voor welke behandeling het gebruik van het ψ-vlak voor de gewichtseenheid voor de hand ligt, over een dergelijk ψ-vlak eene nadere mededeeling hopen te doen (verg. § 1). Gelijk ook in Meded. N°. 96 *b* werd opgemerkt, zijn de coëxistentie-voorwaarden met behulp van het ψ-vlak voor de gewichtseenheid op dezelfde wijze te bestudeeren als met behulp van dat voor de moleculaire hoeveelheid, terwijl men, indien gewenscht, zeer gemakkelijk van het eerste op het laatste, hetwelk voor de behandeling van vele vraagstukken voordeel oplevert (verg. § 6), kan overgaan.

De vergelijking van de spinodale lijn op het ψ-vlak voor de gewichtseenheid van mengsels, voor welke de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS voor binaire mengsels, met voor zekere x niet van v en T afhangende a en b, mag worden toegepast en $a_{12} = \sqrt{a_{11}\, a_{22}}$, $b_{12M} = {}^1/_2\ (b_{11M} + b_{22M})$ (vergel. Meded. No. 96 *c*, Dec. '06, p. 516) mag gesteld worden, luidt [2]):

$$R_1 R_2\, Tv^3 = 2\, R_2\, (1-x)\, \{v\sqrt{a_{11}} - b_{11}\sqrt{a}\}^2 + 2\, R_1\, x\, \{v\sqrt{a_{22}} - b_{22}\sqrt{a}\}^2.$$

Hierin zijn R_1 en R_2 de gasconstanten voor de gewichtseenheid der betreffende componenten. Voor $a_{22} = 0$ gaat deze verg. over in:

$$4\,\tau\omega^3 = (1-x)\,[\{3\,\omega - (1-x)\}^2 + \frac{R_1}{R_2}\,.\,\frac{b^3_{22}}{b^2_{11}}\,x\,(1-x)]$$

als we $\dfrac{T}{T_{k_1}} = \tau$, $\dfrac{v}{v_{k_1}} = \omega$ noemen. De wortels dezer vergelijking in ω zijn voor bepaalde waarden van x en τ op grafische wijze gevonden. De figuur is geconstrueerd voor mengsels waarvoor $R_2/R_1 = {}^1/_2$, $b_{22}/b_{11} = {}^1/_4$ (vergel. Meded. N°. 96*c*, Jan. '07, p. 655, noot 2).

We merken naar aanleiding van Fig. 1 op, dat voor $T < T_{km}$ ($= 1.299\ T_{k_1}$) en $> T_{k_1}$ eene aan de zijde der toenemende v's gesloten spinodale lijn en daarmede eene dergelijke plooi van af de kant der kleine v's zich op het ψ-vlak uitstrekt. Bij $T = T_{k_1}$ bereikt deze plooi de zijde van de minst vluchtige component. Bij lagere T heeft de spinodale lijn twee van elkaar gescheiden takken en loopt de plooi in schuine richting van af de lijn $v = b$ naar de kant van de minst vluchtige component.

---

1) Verg. Meded. N°. 96 *a* (Nov. '06), 96 *b* (Dec. '06) en 96 *c* (Dec. '06, Jan. '07).

2) De grootheden a_{11}, a_{22}, a_{12}, b_{11}, b_{22}, b_{12}, enz. hebben betrekking op de gewichtseenheid, a_{11M}, a_{22M}, enz. op de moleculaire hoeveelheid.

Zoo vestigt het onderzoek van mengsels met een aantrekkingloos gas de aandacht op eene van de zijde der kleine volumina uitgaande en bij lagere temperatuur naar de zijkant scheef overstekende plooi, die van de dwars- en van de lengteplooi kan onderscheiden worden.

De spinodale lijn voor $\tau = 1.040$ heeft een barotropisch plooipunt P_b. (zie Fig. 1). Voor $1.299 < \tau < 1.040$ is de hoek met de v-as van de raaklijn aan de plooi in het plooipunt [1]) $\theta_{pl} > \frac{\pi}{2}$, voor $1.040 < \tau < 1$ is $\theta_{pl} < \frac{\pi}{2}$. De barotropische verschijnselen voor eene zoodanige plooi zullen in eene volgende mededeeling (verg. Meded. N°. 96*c*, Jan. '07, p. 655, noot 1) nader behandeld worden.

In Fig. 2 is schematisch het beloop van de plooi geteekend voor eene temperatuur tusschen de barotropische plooipuntstemperatuur en de kritische temperatuur der eerste component. De — · — · — lijnen stellen de druklijnen voor, de — — — — lijn de spinodale, de getrokken kromme de connode. De rechte AB is de raakkoorde die de coëxisteerende phasen A en B verbindt, CD is de barotropische raakkoorde (Meded. N°. 96*b*, Dec. '06, p. 508).

§ 3. *Beperkte mengbaarheid van twee gassen.* Wij zullen bij mengsels, waar zich als in Fig. 2 bij temperaturen boven de kritische temperatuur van de minst vluchtige component eene plooi van af de kant der kleine v's op het ψ-vlak uitstrekt, welke tot paarsgewijze coëxisteerende, *door een meniscus gescheiden phasen*, op de figuur bv. aangegeven door A en B, aanleiding geeft, terwijl mengsels in tusschen gelegen verhoudingen niet stabiel zijn, niet alleen de eene phase B, van welke dit vanzelf spreekt, doch ook de andere phase A eene gasphase, en de laatste dus eene *tweede gasphase* noemen, en bij die temperaturen dus van *evenwichten tusschen twee gasvormige mengsels* spreken. Dat daartoe in het in § 2 behandelde geval alle aanleiding bestaat blijkt reeds daaruit, dat de gereduceerde temperatuur van de phase A, berekend met de kritische temperatuur van het ongesplitste mengsel met het gehalte van A, zoo hoog is dat reeds door het geheel harer eigenschappen de phase onmiddellijk den indruk van eene gasphase (eene tweede dus) moet maken.

Het beloop der p-lijnen in Fig. 2 doet verder zien, hoe beide coëxisteerende gasphasen kunnen verkregen worden door isopiestische en isothermische vermenging, waarbij niets een overgang tot den vloeistoftoestand

---

[1]) Vergel. Meded. N°. 96*b*, Dec. '06, p. 508.

zou aanduiden, van uit de gasphasen M en N der enkelvoudige stoffen [1]).

In de volgende § zullen wij uiteenzetten, dat het inderdaad in overeenstemming met de onderscheiding van gastoestand en vloeistoftoestand bij binaire mengsels in het algemeen is, wanneer wij A een tweede gasphase noemen.

§ 4. *Onderscheiding van gas- en vloeistoftoestanden bij binaire mengsels.* Wel is waar kan, sinds de continuiteit van den gasvormigen en den vloeibaren aggregaatstoestand vaststaat, met een zeker recht gezegd worden dat eene afgrenzing van beide toestanden niet meer mogelijk is; doch wanneer men in de definitie van wat men dan onder vloeistof en wat onder gas zal verstaan de tegenstelling en den samenhang van het heterogeen en homogeen gebied behoorlijk wil uitdrukken, en gevolgtrekkingen wil afsnijden [2]), die in strijd zijn met de meest voor de hand liggende opvatting der verschijnselen, zoo is de speelruimte, welke bij het vaststellen dier definitie toegelaten blijft, zeer gering.

Zoo is bij eene enkele stof wel geen andere onderscheiding mogelijk dan met behulp van de isotherm der kritische temperatuur en de grenslijn (connodale op het oppervlak van Gibbs), die door den kritischen toestand (plooipunt der connodale) in twee takken wordt verdeeld, van welke die met de grootere volumina als gastak, die met de kleinere als vloeistoftak moet worden gedefinieerd. Vloeistofphasen zijn alleen die, welke door isothermische uitzetting in zulke, die op den vloeistoftak der connodale liggen, kunnen overgaan, benevens de tusschen connodale en spinodale gelegen metastabiele [3]) phasen, die door isothermische samendrukking op den vloeistoftak der connodale gebracht kunnen worden.

Bij de binaire mengsels leidt de beschouwing van het ψ-vlak van van der Waals in vele gevallen tot even dwingende bepalingen. Wij zullen bij het behandelen daarvan het geval van vaste aggregaatstoestanden en driephasenevenwichten buiten beschouwing laten.

Gastoestanden zijn in de eerste plaats al de toestanden op ψ-vlakken op welke geen plooien zijn waar te nemen. Als criterium om toestanden, welke behooren tot het stabiele of metastabiele gebied [4]) van ψ-vlakken, die plooien vertoonen, in gastoestanden en vloeistoftoe-

---

[1]) Vergelijk noot 1 pg. 760.

[2]) Zoo de definitie van Thiesen, Z.S. für compr. und fl. Gase 1 (1897) p. 86, volgens welke b.v. sterk samengedrukte waterstof bij gewone temperaturen een vloeistof zou moeten worden genoemd.

[3]) De metastabiele toestanden zijn in de definitie van Boltzmann, Gastheorie II, p. 45, niet opgenomen.

[4]) Labiele toestanden blijven uit den aard der zaak buiten beschouwing.

standen te verdeelen wijst de analogie met de enkelvoudige stof hun betrekking tot de connodalen dier plooien aan, bij welke voor de metastabiele toestanden de spinodalen te hulp moeten komen.

Daarbij is in de eerste plaats noodig de onderscheiding van de twee takken van de connodale eener plooi. Men zal toch aan ieder der twee door een of twee plooipunten gescheiden takken eener connodale in de eerste plaats over hunne geheele lengte denzelfden naam dienen te geven.

Wegens het bestaan van het barotropisch verschijnsel kan men nu niet eenvoudig gastak van de connodale dien noemen, bij welken de eene der isopiestisch verbonden toestanden de kleinste dichtheid heeft.[1]) Het komt er dus op aan op elken tak een toestand aan te wijzen, van welken men op grond van de voor enkelvoudige of zich bij splitsing in twee phasen als enkelvoudige gedragende stoffen geldige definitie reeds de soort kent. Daarbij zijn nu verschillende gevallen te onderscheiden.

Voor het geval, dat de beschouwde plooi [2]) van uit een der zijvlakken $x = 0$ of $x = 1$ zich over het ψ-vlak uitstrekt, volgt uit de definitie van gasphase en vloeistofphase van eene enkele stof, dat men den tak van de connodale van af den gastoestand der zuivere stof tot aan het plooipunt gastak en evenzoo den tak van uit de vloeistofphase van de enkele stof tot aan het plooipunt vloeistoftak heeft te noemen. Op dezelfde wijze als van de connodale zijn van de spinodale de gastak en de vloeistoftak te onderscheiden.

Bepalen wij ons voorloopig tot de verdere onderscheiding van gas en vloeistof in dit geval. Wij maken daartoe in de eerste plaats gebruik van de isomignische (Med. N°. 96*b*) samendrukking en uitzetting. Elke phase, die door deze bewerking niet op de connodale gebracht kan worden of zoo zij daarop gebracht kan worden op den gastak komt zullen wij eene gasphase moeten noemen, elke phase die door isomignische uitzetting op den vloeistoftak gebracht wordt eene vloeistofphase. Buitendien zijn metastabiele vloeistofphasen de tusschen connodale en spinodale gelegen phasen, welke isomignisch op den vloeistoftak der connodale kunnen worden gebracht.

Behalve de isothermische en isomignische samendrukking zonder splitsing is er nog eene andere reeds in § 3 genoemde bewerking,

---

[1]) Wil men van de zwaartekracht afzien en alleen letten op het moleculairvolume der phase zoo hebben toch de barotropische verschijnselen de aandacht gevestigd op de mogelijkheid, dat men langs dezelfde connode gaande het dampvolume eerst grooter en daarna kleiner dan het vloeistofvolume zal kunnen vinden.

[2]) Het geval van de twee plooien bij minimum kritische temperatuur is hierin begrepen.

die tot beoordeeling van de gelijksoortigheid van verschillende phasen kan bijdragen, nl. de isopiestische en isothermische menging.[1]) Daarop lettende zullen phasen, die door isopiestische bijmenging zonder splitsing continu uit phasen, waarvan vaststaat, dat zij vloeistofphasen moeten worden genoemd, verkregen zijn, zoolang vloeistofphasen moeten worden genoemd tot op andere wijze (b.v. doordat bij isomignische samendrukking en uitzetting geen splitsing optreedt) vaststaat, dat zij in gasphasen zijn overgegaan.[2])

Thans overgaande tot het geval, dat de plooi van hoogere temperatuur af als een gesloten plooi op het ψ-vlak te voorschijn komt, zal men zoolang het plooipunt, dat bij dalende temperatuur het eerst tot aanraking met de zijkant komt nog geen aanraking gekregen heeft, en de plooi bij de daling der temperatuur nog niet een mengsel bereikt, dat zich bij de splitsing als eene enkelvoudige stof gedraagt en waarbij dus de onderscheiding in vloeistoftoestand en gastoestand vaststaat, dien tak van de connodale terzijde van dit plooipunt, die bij lagere temperatuur in dien der gasphase overgaat als bij de gewone gasphase behoorende moeten beschouwen, terwijl men den tak, die bij lagere temperatuur in den vloeistoftak overgaat, tot eene *tweede gasphase* zal kunnen rekenen en dit met des te meer recht naarmate de temperatuur verder mocht liggen boven de kritische temperaturen der ongesplitste mengsels behoorende bij de daarop liggende phasen.

Terwijl in het geval, dat bij betrekkelijk weinig lagere temperatuur ook de andere zijde van het ψ-vlak door de oorspronkelijk gesloten plooi bereikt wordt het verschil der tweede gasphase met eene vloeistofphase nog weinig in 't oog valt, kan dit zeer duidelijk worden voor het geval van § 2, tot hetwelk wij nu eindelijk komen, dat nl. bij dalende temperatuur eene plooi van de zijde $v=b_x$ op het ψ-vlak komt, en de plooi voor het eerst als lengteplooi verschijnt. Thans kan men weder *PBDF* den tak der eerste gasphase, *PACE* den tak der tweede gasphase noemen. Zeker zal het gedwongen zijn niet van gasphasen te spreken, wanneer zich *alle* deelen der plooi bevinden

---

[1]) Bij de continue isothermische en isopiestische menging van twee gelijksoortige phasen a en b kan zich het geval voordoen (gesplitste plooi in het geval van minimum krit. temp.), dat eene tusschengelegen phase c van de andere soort verkregen wordt. Men kan uit de isothermische en isopiestische menging van gelijksoortige a en b dus niet in het algemeen besluiten tot de gelijksoortigheid van c.

[2]) Dit criterium is in 't bijzonder van toepassing op de retrograde condensatie 2de soort. Immers phasen op de connodale tusschen het plooipunt en het kritisch raakpunt zijn dan vloeistofphasen, phasen op de p-lijn door het plooipunt en phasen met dezelfde x als het kritische raakpunt juist de overgangen tot gasphasen. De phasen binnen den driehoek begrensd door deze beide lijnen en de connodale zijn ook als vloeistofphasen te beschouwen.

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM. „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen."

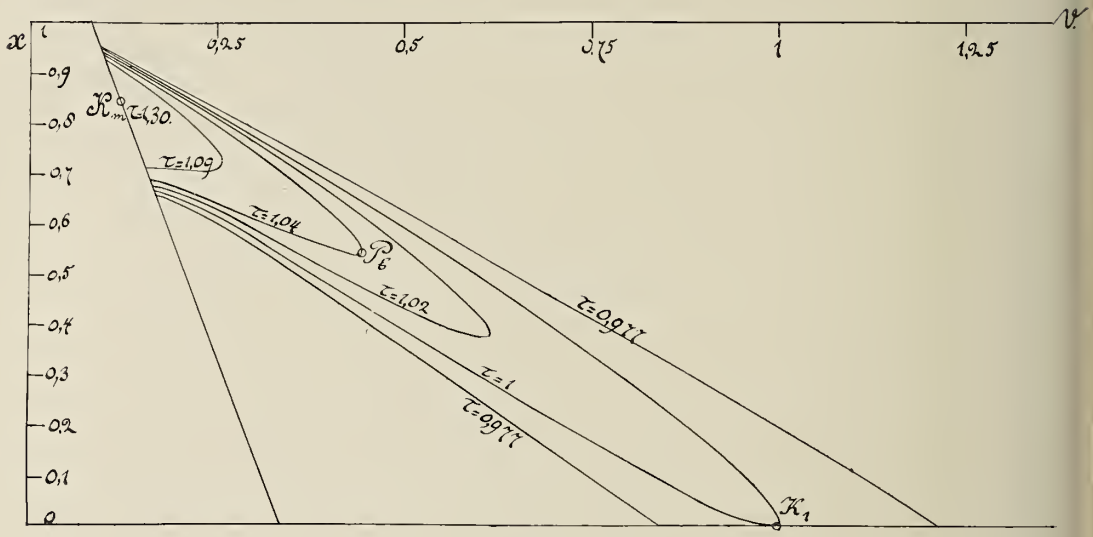


Fig. 1

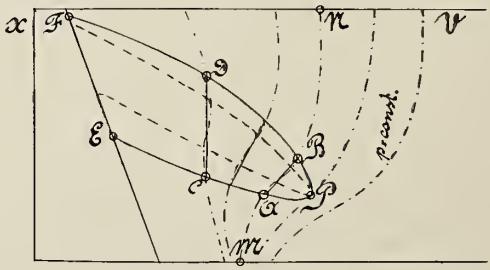


Fig. 2.

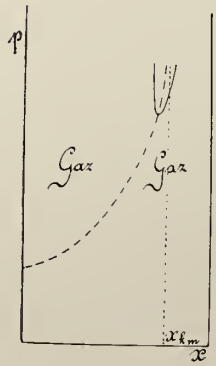


Fig. 3.

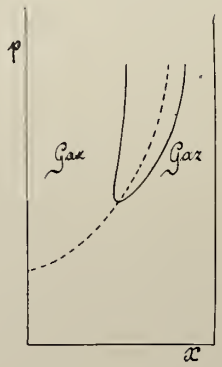


Fig. 4.

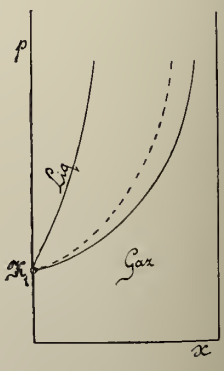


Fig. 5.

boven de kritische temperaturen der ongesplitste mengsels, en men zal bepaald van twee gasphasen *moeten* spreken, wanneer de tweede tak der connodale over hare geheele lengte door isomignische lijnen waarop geen splitsing voorkomt, gesneden of hoogstens in het punt $v = b$ daardoor aangeraakt wordt. Immers dan staat vast, dat het eindpunt van dien tak eene gasphase genoemd moet worden.

Tot de tweede gasphase behooren ook mogelijkerwijze de phasen tusschen de isomignische lijn van het kritisch raakpunt, de lijn $v = b_x$ en den tweeden gastak.

§ 5. *Het verzadigingsoppervlak voor evenwichten op de gas-gasplooi.* In fig. 3, 4 en 5 zijn voor een mengsel waarin eene component een aantrekkingloos of bijna aantrekkingloos gas is schematisch de doorsneden $T =$ const. van het verzadigings- p, T, x-oppervlak voor evenwichten op de gas-gasplooi geteekend, fig. 3 en 4 voor temperaturen hooger dan de kritische temperatuur van de eerste component, fig. 5 voor deze laatste temperatuur.

In deze figuren treedt mede de scheiding van eene gasphase in twee gasphasen, en de overgang van een gedeelte van het gasgebied in het vloeistofgebied bij $T = T_{k_1}$ duidelijk aan het licht. De — — — — lijn is de meetkundige plaats der plooipunten.

In eene volgende mededeeling, waarin de eigenschappen van het ψ-vlak voor dergelijke mengsels nader zullen behandeld worden, zullen van dit verzadigingsoppervlak T, x-doorsneden enz. worden geteekend. Tevens zal dan nader blijken in hoeverre *retrograde ontmenging* van eene phase in twee andere phasen zal te verwachten zijn.

Dat men de eene dier phasen eene tweede gasphase zal mogen noemen, blijkt in § 4.

§. 6. *Over de voorwaarden die vervuld moeten zijn, opdat beperkte mengbaarheid van twee gassen is te verwachten.* Nu gebleken is, dat bij de veronderstellingen genoemd in § 2, bij mengsels waarin eene component een aantrekkingloos gas is met uitgebreide moleculen, beperkte mengbaarheid in den gastoestand verwacht zou moeten worden, doet zich de vraag voor of ook bij mengsels met een aantrekkingszwak gas dit verschijnsel te verwachten zal zijn. Daar bij de genoemde onderstellingen geen maximum kritische temp. is te verwachten, zal dat het geval zijn, als $T_{km} > T_{k_1}$ gevonden wordt [1]). Wij hebben deze vraag behandeld met behulp van het

[1]) Of ook indien $T_{km} < T_{k_1}$ in bepaalde gevallen en bij geschikte temperaturen beperkte mengbaarheid in den gastoestand kan voorkomen, zal nader behandeld worden.

ψ-vlak voor de moleculaire hoeveelheid (vergel. § 2). Men komt dan tot de vergelijkingen ontwikkeld door VAN DER WAALS Contin. II p. 43. De voorwaarde opdat $T_{km} < T_{k_1}$ luidt:

$$\{b_{22M}/b_{11M} - \sqrt{a_{22M}/a_{11M}}\}^2 > \frac{4}{27} b^3{}_M/b^3{}_{11M} \cdot \frac{1}{x_M(1-x_M)}$$

waarin b_M en $x_M(1-x_M)$ volgen uit de door VAN DER WAALS l. c. gegeven vergelijkingen. Men vindt hieruit [1]) $T_{km} < T_{k_1}$,

bij	$b_{22M}/b_{11M} = 2$	, als	$a_{22M}/a_{11M} < 0.58$
	1		0.053
	$^1/_2$		0.0037
	$^1/_4$		0.00023
	$^1/_8$		0.000015

Bij onderzoek blijkt dat voor slechts weinig stoffenparen de verhoudingen der a's en b's [2]) aan deze voorwaarde zullen kunnen voldoen. De nog onbekende betrekkingen tusschen a en b voor eene zelfde stof, op welke in § 1 gedoeld werd, en welke ten gevolge hebben, dat in het algemeen stoffen met kleine a ook eene kleine b bezitten, en dat met groote b in den regel ook groote a gepaard gaat, schijnen hieraan in den weg te staan. Voor het hier behandelde verschijnsel gunstige uitzonderingen op dien algemeenen regel vormen He, dat bij eene met H_2 vergeleken nog niet zeer kleine b eene zeer kleine a, dus zwakke aantrekking, bezit, en H_2O, dat, in aanmerking genomen de waarde van a, eene betrekkelijk kleine b, dus een molecuul met klein volume, bezit.

Indien voor He — H_2: $b_{22M}/b_{11M} = {}^1/_2$, en $a_{22M}/a_{11M} = {}^1/_{176}$ (Meded. N°. 96*c*, Jan. '07, p. 655 noot 2), zal bij de bovengenoemde onderstellingen $T_{km} < T_{k_1}$ verwacht moeten worden. Ook voor helium-argon en helium-zuurstof b. v. zou hetzelfde te verwachten zijn. Waarschijnlijk zijn de verhoudingen bij mengsels van helium en neon gunstiger [3]) dan bij die van helium en waterstof.

Bij mengsels van helium en water zijn de verhoudingen bij de boven aangenomen a_{He} en b_{He} van dien aard dat bij deze beperkte

---

[1]) Voor $b_{22M}/b_{11M} = {}^1/_8$ b.v., vindt men ook $T_{km} > T_{k_1}$ voor $0.125 > a_{22M}/a_{11M} > 0.061$. Deze gevallen zullen nader behandeld worden.

[2]) Zie b. v. KOHNSTAMM, LANDOLT-BÖRNSTEIN-MEYERHOFFER'S Physik. Chem. Tabellen.

[3]) Vergel. opgaven omtrent brekend vermogen en kritische temperatuur van neon bij RAMSAY en TRAVERS, Phil. Trans. A. 197 (1901) p. 47.

mengbaarheid in den gastoestand, indien de in § 2 genoemde onderstellingen toegepast mogen worden, verwacht moet worden.

De wrijvingscoëfficient en warmte-geleidingscoëfficient (verg. Meded. N°. 96*c*, Jan. '07, p. 655 noot 2) laten nog wel eene iets, hoewel weinig, grootere waarde van b_{He} toe; hierdoor zou ook bij de andere genoemde stoffenparen het genoemde verschijnsel, vooral als men bedenkt dat zonder nader onderzoek bij $T_{km} < T_{k_1}$ het optreden daarvan niet buitengesloten is (vergel. het begin dezer §), misschien verwezenlijkt kunnen worden.

Het proefondervindelijk onderzoek dezer mengsels is in het Leidsche Laboratorium ter hand genomen.

Dierkunde. — De Secretaris biedt namens den Heer HUBRECHT voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer HANS STRAHL te Giessen, getiteld: *„Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L."*

De Voorzitter benoemt de Heeren HUBRECHT en WEBER om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer A. BREMSTER Jr., getiteld: *„Explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables"*.

De Voorzitter benoemt de Heeren JULIUS, J. C. KAPTEYN en SCHREINEMAKERS om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In het Zittingsverslag van December 1906.

p. 510 r. 15 v. b.: i. p. v. 2^0 leze men 4^0.
„ 517 „ 13 „ „ : „ „ „ 0.052 „ „ 0.104.

In het Zittingsverslag van Januari 1907.

p. 658 r. 4 v. o. in p. v. b_{11}/b_{22} leze men b_{22}/b_{11}.
„ 661 r. 4 v. b. te lezen p_k voor p_x en v_k voor v_x.
„ 661 r. 12 v. o. achter „wij" te lezen: bij het detailmodel van 26° (zie § 5).
„ 661 „ 11 „ „ voor „een" te lezen „die".
„ 661 „ 9 „ „ voor t te lezen t_x.
„ 661 „ 8 „ „ voor „Noemen wij in het algemeen de" te lezen: „Bij het algemeene overzicht voor 26° hebben wij". voor „aangebrachte", te lezen „aangebracht eene".
„ 661 „ 7 „ „ voor „dan is" te lezen „zoodat".
„ 665 r. 11 v. b. achter „zijn", te lezen „in dit opzicht".
„ 666 „ 19 „ „ achter „aan". in te voegen: Pl. I, fig. 3 geeft een afbeelding van dit model.
„ 666 „ 26 „ „ in plaats van IV te lezen III.

(6 Maart, 1907).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 30 Maart 1907.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 766.

Verslag van de Heeren A. A. W. HUBRECHT en MAX WEBER over eene verhandeling van den Heer HANS STRAHL: „Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L.", p. 766.

C. E. A. WICHMANN: „Ertsgangen in de provincie Limburg", p. 767.

C. LELY: „Stroomsnelheden in een open Panamakanaal", p. 767. (Met 2 platen).

A. A. W. HUBRECHT: „Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de placenta van de vliegende maki (Galeopithecus)", p. 793.

L. RUTTEN: „Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en België". (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en MAX WEBER), p. 798. (Met 1 plaat).

W. H. JULIUS: „Golflengten van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultraroode spectrum", p. 811.

S. L. VAN OSS: „Evenwicht van krachten en rotatiesystemen in R_4". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 818.

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels" II, p. 823.

J. D. VAN DER WAALS: „De gedaante der empirische isotherme bij de condensatie van een binair mengsel", p. 847.

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen". (Vervolg) p. 851. (Met één plaat).

C. H. WIND: „Een hypothese aangaande den oorsprong der Röntgen stralen", p. 855.

B. VAN TRICHT: „Over den invloed der vinnen op den vorm van het romp-myotoom". (Aangeboden door de Heeren G. C. J. VOSMAER en C. WINKLER), p. 859.

L. J. J. MUSKENS: „Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen". (3de Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en T. PLACE). p. 859.

Concept adres van gelukwensch aan de Universiteit te Upsala en de Kon. Akademie van Wetenschappen te Stockholm, p. 859.

Aanbieding van eene verhandeling van den Heer F. SCHUH, getiteld: „Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen". p. 860.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 860.

Erratum, p. 861.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van de Heeren PLACE, HOOGEWERFF, KAMERLINGH ONNES en MOLEGRAAFF dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 Februari 1907 waarbij bericht wordt dat de Minister van Financiën geene aanleiding kan vinden tot het sluiten van eene internationale overeenkomst betreffende de douanebehandeling van luchtscheepvaartkundige instrumenten, enz. Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van den Minister van Waterstaat d.d. 7 Maart 1907 waarbij bericht wordt dat op de betaling van het subsidie voor de kosten van geologische onderzoekingen orde gesteld is. Voor kennisgeving aangenomen.

4°. Missive van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen over een van de Akademie te Madrid ingekomen voorstel dat de Internationale Associatie een speciale commissie benoeme tot onderzoek van een door den Heer L. DE TORRES Y QUEVEDO voorgesteld systeem. Is in handen gesteld van de Heeren KORTEWEG en KLUYVER om advies.

5°. Missive van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen over een bij de Internationale Associatie ingekomen voorstel van de „Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale". De Akademie besluit zich aan te sluiten aan de desbetreffende voorstellen der Akademie te Weenen, onder machtiging evenwel van haar vertegenwoordiger om wegens dringende redenen c. q. daarvan af te wijken.

6°. Bericht van het overlijden van de buitenlandsche leden HENRI MOISSAN en MARCELIN BERTHELOT. De Voorzitter wijdt eenige waardeerende woorden aan de nagedachtenis van deze beide geleerden.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT brengt ook namens den Heer WEBER verslag uit over eene verhandeling van den Heer HANS STRAHL, getiteld : „*Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L.*"

Prof. STRAHL, die reeds sedert jaren eene uitvoerige studie van de placentatie der zoogdieren en van de verschijnselen waarmede hun puerperium gepaard gaat, gemaakt heeft, mag onder de pioniers gerekend worden op het gebied waarop ook deze verhandeling zich beweegt. Reeds hieraan meenen wij het recht te mogen ontleenen om de opneming van dezen met talrijke photografieën opgeluisterden arbeid in de werken der Akademie met warmte aan te bevelen.

Het door hem bij den egel verrichte onderzoek van een groot aantal uteri *post partum* daalt af in de mikroskopische bijzonderheden van de verschijnselen, waarmede het herstel van de *mucosa uteri* gepaard gaat en stelt hem in staat tot de gevolgtrekking, dat de teruggang van den puerperalen egel-uterus een eigen weg inslaat, zoodat het mogelijk is hem van alle andere, tot heden daarop onderzochte puerperale zoogdier-uteri te onderscheiden. Vooral verdienen daarbij de aandacht ingrijpende wijzigingen in het bloed-, en nog meer bijzonder in het lymphvaatstelsel, alsmede de omvorming en liggingsverandering der klieren, met welke verschijnselen een waarschijnlijk veel langere duur van het involutieverschijnsel gepaard gaat.

Schrijver vindt in deze verhandeling tevens aanleiding om, op grond van hetgeen de egel vertoont, vergeleken met wat door Dr. M. VAN HERWERDEN en door anderen bij twee andere Insectivora: Tupaja en Talpa gevonden is, zijne indeeling der placentae in „Vollplacenten" en „Halbplacenten", — die eerst onlangs in HERTWIG's *Handbuch der vergleichenden Entwickelungslehre* voorgesteld en toegelicht werd — aan herziening en wijziging te onderwerpen.

Op de aangevoerde gronden blijven wij de plaatsing van het ons ter beoordeeling toegezonden opstel in de verhandelingen der Akademie gewenscht achten.

HUBRECHT.
MAX WEBER.

Amsterdam, 30 Maart 1907.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Geologie. — De Heer WICHMANN doet eene mededeeling over: *„Ertsgangen in de provincie Limburg."*

(Deze mededeeling zal verschijnen in het verslag der volgende vergadering).

Waterstaat. — De Heer LELY doet eene mededeeling over: *„Stroomsnelheden in een open Panamakanaal".*

§ 1. De Amerikaansche Regeering heeft na een uitgebreid onderzoek besloten tot uitvoering van een ontwerp voor een Panamakanaal op hoog peil namelijk van 85 voet (25.9 M.) boven den gemiddelden zeestand met drie stel sluizen.

Tegenover dit ontwerp der minderheid van den Board of Consul-

ting Engineers van 1905 stond dat der meerderheid voor een Kanaal op zeepeil of wel een niveaukanaal met één stel sluizen. Dit kanaal zoude één stel sluizen verkregen hebben tot scheiding van den Atlantischen Oceaan van de Stille Zuidzee maar overigens aan beide zijden van die sluizen in open gemeenschap met die zeeën gestaan hebben.

Feitelijk was dit dus geen open kanaal zooals het Suezkanaal, maar een kanaal waarop zoo niet in alle dan toch stellig in de meeste gevallen geschut zoude moeten worden.

Een kanaal dus, dat waarschijnlijk meer overeenkomst zou gehad hebben met het voor Suez niet uitgevoerde en destijds krachtig bestreden sluizenkanaal dan met het tegenwoordige open Suezkanaal.

De vraag doet zich daarom voor of het Panamakanaal niet evenals het Suezkanaal *open* en *zonder sluizen* uitgevoerd had kunnen worden.

De technische commissie van het Internationaal congres van Parijs van 1879 achtte een stel sluizen nabij het Panama einde eene volstrekte noodzakelijkheid in de onderstelling dat zonder sluizen tengevolge van de getijbeweging der stille Zuidzee op het kanaal stroomsnelheden van 2 à 2.50 M. per seconde zouden voorkomen [1]).

De Board of Consulting Engineers van 1905 was daarentegen terecht van oordeel, dat de noodzakelijkheid van die sluizen niet zoo vast stond, doch heeft wegens de beperktheid van zijn beschikbaren tijd daaromtrent geen onderzoek kunnen instellen [2]).

---

[1]) Deze meening was in strijd met die der oorspronkelijke ontwerpers de heeren Wijse en Reclus. In een exposé door laatstgenoemde in de zitting van de technische commissie van 19 Mei 1879 gegeven wordt in het licht gesteld, dat het verhang der hoog- en laagwaterlijnen op het Panamakanaal ongeveer evengroot zal zijn als op het Suezkanaal, zoodat ook op het Panamakaal geen belangrijk grooter stroomsnelheden te verwachten zijn dan op het Suezkanaal, welke stroomsnelheden alleen ten gevolge van het getij gewoonlijk niet meer dan 0.90 M. per seconde zijn, doch slechts onder den invloed van den wind tot 1.30 à 1.35 M. per seconde stijgen.

[2]) Dat ook nog bij het optreden van den Consulting Board onder bevoegde deskundigen de meening bestond, dat een sluis aan de zijde van de Stille Zuidzee noodzakelijk zoude zijn, blijkt duidelijk uit het schrijven, dat de Board bij den aanvang zijner werkzaamheden ontving van den heer T. P. Shonts Chairman of the Isthmian Canal Commission waarin het volgende voorkomt:

„A disadvantage which the two plans have in common is that the rapid develop„ments of naval architecture make it difficult to determine the proper dimensions „of the lock chambers. It is to be considered, however, that up to the present „time such developments has not been greatly hampered bij deficient depth in the „harbors of the world, and that development here after will have that obstruction „to contend with. Moreover, it is not possible to dispense with locks entirely. Even „with the sea-level canal a tide lock will be required at the Panama end".

Hij zegt op blz. 56 van zijn rapport te dien opzichte het volgende:

"The question of the necessity of a tidal lock at the Panama end "of the canal has been raised by engineers of repute, but the limited "time available to the Board has not permitted the full consideration "of this question which is desirable. It is probable that in the "absence of a tidal lock the tidal currents during extreme spring "oscillations would reach five miles per hour. „(2.24 M. per seconde)" "While it might be possible to devise facilities which would permit "ships of large size to enter or leave the canal during the existence "of such currents, the Board has considered it advisable to contem- "plate and estimate for twin tidal locks located near Sosa Hill "even though the period during which they would be needed would "probably be confined to a part of each spring tide."

Het zou echter een nader onderzoek vereischen, om te beoordeelen of indien het kanaal met een stel sluizen ware aangelegd, die sluizen zonder buitengewone middelen inderdaad slechts gedurende een gedeelte van het springtij gebruikt zouden behoeven te worden.

Het komt toch waarschijnlijk voor, dat tengevolge van de rijzingen en dalingen der zee boven en beneden den gemiddelden zeestand ter grootte van ± 1.23 M. bij gemiddeld doodtij en ± 2.53 M. bij gemiddeld springtij in eene periode van ongeveer drie uur, in de meeste gevallen aan het schutten door de sluis de voorkeur zoude worden gegeven boven het varen door die sluis met open deuren en zulks zoowel in het belang der scheepvaart als ter voorkoming van schade bij het sluiten der deuren wanneer dit bij eenigszins sterken stroom moet geschieden. Immers indien het gezamenlijke profil der sluizen evengroot als het kanaalprofil ware zoude in die sluizen, op grond van de waarnemingen in het Suezkanaal, eene stroomsnelheid kunnen verwacht worden tusschen 0.70 en 0.90 M. bij doodtij en tusschen 1.00 en 1.30 M. bij springtij.

In ieder geval zou telkens na sluiting der deuren, het varen door de sluis met open deuren niet eerder kunnen plaats hebben dan nadat de zee weder den gemiddelden zeestand had bereikt, zoodat voor elk getij waarbij het sluiten der deuren wenschelijk mocht zijn, de tijd van doorvaart met open deuren stellig minder zoude zijn dan drie van de zes uren, die er verloopen tusschen twee op elkander volgende zeestanden gelijk aan den gemiddelden zeestand.

Doch hoe dit zij, de vraag in welke mate een sluis in een niveaukanaal voor de scheepvaart hinderlijk zal zijn, buiten beschouwing latende, zoo blijkt in ieder geval, dat de noodzakelijkheid van zulk een sluis bij het in 1905 ingestelde onderzoek betreffende de ontwerpen voor een Panamakanaal een open vraag is gebleven en zulks

op grond van de onzekerheid van de stroomsnelheden, welke bepaaldelijk tengevolge van de getijbeweging van de Stille Zuidzee in een open kanaal zullen voorkomen.

Behalve door de getijbeweging kunnen in een niveaukanaal hetzij met of zonder getijsluis groote stroomsnelheden voorkomen door hooge watervloeden van de Chagres en andere rivieren, indien het water dier rivieren door het kanaal moet worden afgevoerd.

In het niveaukanaal volgens het ontwerp van den Board of Consulting Engineers zou dit in afwijking van het ontwerp van 1879 het geval geweest zijn.

De Board rekent, dat daardoor stroomsnelheden in het niveaukanaal met getijsluis kunnen voorkomen van 1.18 M. per seconde (2.64 miles per hour) als maximum, eene snelheid welke volgens zijn oordeel de scheepvaart niet zal hinderen.

Deze stroomsnelheden zullen in een open kanaal evenzeer voorkomen als in een niveaukanaal met getijsluis, althans indien in beide gevallen het water der rivieren door het kanaal moet worden afgevoerd. Zij komen echter slechts zelden voor en behoeven niet tot vergrooting der maximum snelheden tengevolge van de getijbeweging te leiden.

§ 2. De gronden waarop de technische commissie van het Congres van Parijs van 1879 stroomsnelheden van 2 à 2.50 M. per seconde in een open kanaal verwachtte zijn tweeërlei. In de eerste plaats zijn door die commissie enkele voorbeelden gegeven van groote stoomsnelheden van 2 tot 3.50 M. per seconde waargenomen op benedenrivieren met zulke groote verschillen tusschen hoog- en laagwater als op het Panamakanaal aan de zijde der Stille Zuidzee te verwachten zijn [1]).

In de tweede plaats is door die commissie overgelegd eene nota van haar lid den heer Kleitz bevattende enkele globale berekeningen betreffende de snelheden welke in een open kanaal te verwachten zijn [2]).

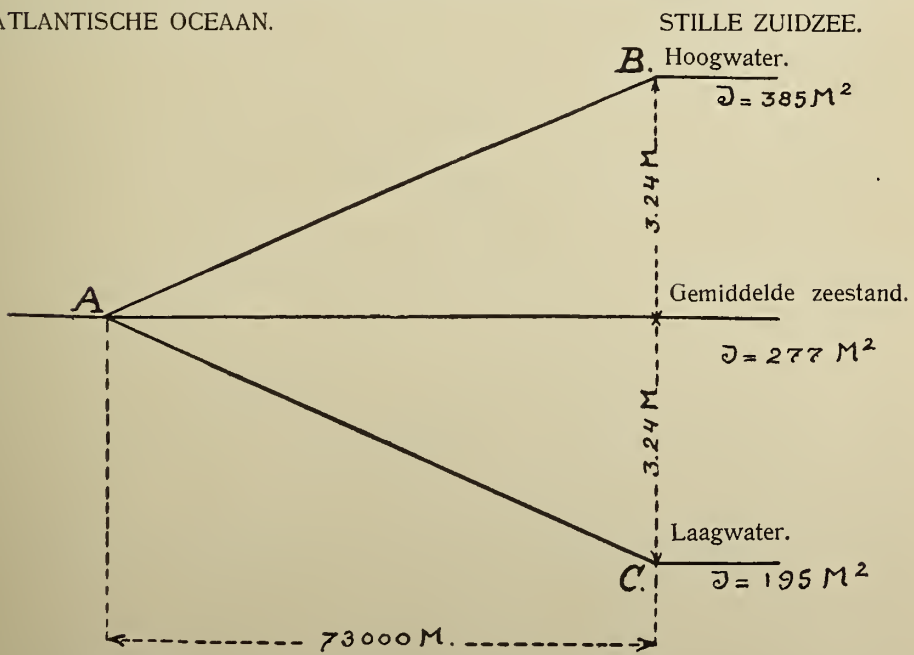
Dat op benedenrivieren met groote tijverschillen zeer groote stroomsnelheden *kunnen* voorkomen ligt voor de hand, maar daaruit volgt volstrekt nog niet, dat evengroote stroomsnelheden in een open Panamakanaal *zullen* voorkomen, zoolang niet gebleken is, dat de overige omstandigheden welke op de stroomsnelheid overwegenden invloed uitoefenen in beide gevallen ongeveer gelijk zijn. En nu is het gemakkelijk in te zien, dat de stroomsnelheid, welke door eene

[1]) Zie: Congrès international d'études du canal interocéanique. Compte rendu des séances. Paris 1879 blz. 36.

[2]) Zie: id. blz. 384 en Pl. IV fig. 6.

getijbeweging te weeg wordt gebracht in een benedenrivier of in een met twee zeeën in verbinding staand open kanaal van betrekkelijk groote lengte in niet minder mate afhankelijk zal zijn van de diepte en bepaaldelijk van de gemiddelde diepte over de geheele breedte van die rivier of dat kanaal als van de amplitude van het getij of m. a. w. dat die stroomsnelheid evenzeer zal afhangen van de verhouding tusschen die amplitude en de gemiddelde diepte als van een dezer grootheden afzonderlijk. Evenzoo is het gemakkelijk in te zien, dat die stroomsnelheden voor eene rivier behalve van den afvoer in hooge mate afhankelijk zijn van de veranderingen van breedte en diepte en van de bodemhelling binnenwaarts van hare uitmonding. De voorbeelden, welke de commissie mededeelt toonen trouwens reeds duidelijk aan, dat de snelheid behalve van de amplitude van het getij ook in hooge mate van andere oorzaken afhankelijk moet zijn. Immers de commissie geeft onder de voorbeelden op de Riviére de l'Odet met eene getijamplitude van 5 M. en eene snelheid van den vloedstroom van 3.50 M. alsmede La Charente met eene getijamplitude van 6.35 M. en eene snelheid van den vloedstroom van 2 M.

En wat de berekening van den heer KLEITZ betreft, zij was als volgt:



Volgens bovenstaande figuur werd de inhoud van het doorstroomingsprofil aan de zijde van de Stille Zuidzee bij hoogwater op 385 M² en bij laagwater op 195 M² aangenomen.

Het verschil tusschen de watermassa in het kanaal bij hoog- en laagwater wordt nu gelijk gesteld aan den inhoud van het prisma A B C.

$$\text{dus} = 73000 \times \frac{385 - 195}{2} \text{ M}^3 = 6.935.000 \text{ M}^3.$$

Daar tusschen hoog- en laagwater ongeveer zes uur verloopt, wordt de verandering der watermassa gemiddeld per seconde berekend op ongeveer 321 M³. Het gemiddeld doorstroomingsprofil van het kanaal aan de Stille Zuidzee zijnde $^1/_2$ (385 + 195) M² of 290 M², vindt de heer KLEITZ voor de gemiddelde snelheid van instrooming gedurende den geheelen vloed of van uitstrooming gedurende de geheele eb :

$$\frac{321}{290} = 1.11 \text{ M.}$$

Voorts aannemende dat de maximum verandering der watermassa per seconde bij vloed ongeveer zal voorkomen, wanneer de zeestand gelijk is aan den gemiddelden stand en dat die maximumverandering gelijk is aan het tweevoud der gemiddelde verandering wordt die maximuminstrooming per seconde gesteld op $2 \times 321 = 642$ M³.

Het doorstroomingsprofil van het kanaal bij den gemiddelden zeestand ongeveer 277 M² zijnde, vindt men dus voor de maximum snelheid $\frac{642}{272} = 2.32$ M. per seconde.

Dat deze berekeningen geen waarde hebben valt gemakkelijk in te zien. Immers daarbij is geheel buiten rekening gelaten, dat er een zekere tijd moet verloopen alvorens eene rijzing of daling aan de uitmonding van het kanaal in de Stille Zuidzee zich over de geheele lengte van het kanaal kan doen gevoelen. Hieruit volgt, dat wanneer kort na het oogenblik van laagwater in zee de waterstand in het Kanaal nabij de uitmonding begint te rijzen en spoedig daarna ook instrooming aldaar plaats heeft, meer binnenwaarts in het kanaal de waterstand nog dalende zal zijn en aldaar nog uitstrooming zal plaats hebben. Evenzoo zal wanneer kort na het oogenblik van hoogwater in zee de waterstand in het Kanaal nabij de uitmonding begint te dalen en spoedig daarna aldaar uitstrooming plaats heeft meer binnenwaarts de waterstand nog rijzende zijn en aldaar nog instrooming plaats hebben.

Voorts is geheel buiten rekening gelaten de in- en uitstrooming van het kanaal aan de zijde van den Atlantischen Oceaan, die stellig niet gering zal zijn maar niet plaats zal hebben gedurende den zelfden tijd als de uit- en instrooming aan de zijde van de Stille

Zuidzee. En dat de bovenbedoelde verschillen in tijd niet van geringen maar van zeer grooten invloed zullen zijn valt gemakkelijk in te zien, wanneer men bedenkt, dat op het Suezkanaal de voortplanting van het hoogwater plaats heeft met eene snelheid van ongeveer 10 M. per seconde, zoodat gelijke snelheid voor het Panamakanaal aannemende er ongeveer 2 uur vereischt zoude worden voor de voortplanting eener getijbeweging over de geheele lengte van het kanaal, tengevolge waarvan gedurende een groot gedeelte van het getij de stroomingen nabij de beide uiteinden van het Kanaal verschillend van richting zullen zijn.

De onjuistheid der grondslagen waarop de technische commissie van het internationaal congres van 1879 tot de volstrekte noodzakelijkheid van een sluis besloot, schijnt destijds niet de aandacht te hebben getrokken en dientengevolge werd het kanaal dan ook aanvankelijk uitgevoerd met het voornemen een sluis te bouwen aan de zijde van de Stille Zuidzee.

Ferdinand de Lesseps, die het steeds als een groot voordeel heeft beschouwd, dat het Suezkanaal zonder sluizen is gebouwd heeft zich vermoedelijk met die sluis in het ontwerp Panamakanaal nooit kunnen vereenigen, hetgeen hem aanleiding gegeven heeft om zich in Mei 1886 tot de Fransche Akademie van Wetenschappen te wenden met het verzoek een onderzoek te willen instellen omtrent den invloed der getijbeweging van de Stille Zuidzee en den Atlantischen Oceaan op de waterbeweging in een open Panamakanaal.

Een commissie met dit onderzoek belast bracht daaromtrent in de zitting van 31 Mei 1887 verslag uit. Deze commissie bestond behalve uit de leden der afdeeling van Géographie en Navigatie uit de leden Daubrée, Favé Lalanne, de Jonquières en Boussinesq en als rapporteur het lid Bouquet de la Grije.

In dit verslag, dat hoewel kort van inhoud de resultaten bevat van uitvoerige berekeningen, komt die commissie tot de volgende zoowel merkwaardige als belangrijke conclussie:

„que, dans aucun cas, les courants dus à la dénivellation ne pour-„ront depasser $2\frac{1}{2}$ *noeud"* (± 1.29 *M. per seconde*) *„et que cette vitesse, „qui ne peut être atteinte tous les ans que pendant quelques heures, „ne parait pas de nature à gêner la navigation des bateaux à vapeur „dans le canal que l'on creuse actuellement à Panama".*

Deze conclusie werd door de Akademie aangenomen en daarmede was dus het vraagstuk betreffende de mogelijkheid van een open Panamakanaal zonder sluizen in een nieuw en geheel ander licht verschenen dan waarin het door het Congres van 1879 was gesteld.

De omstandigheden hebben er echter toe geleid, dat aan deze conclusie

der Fransche Akademie van Wetenschappen betrekkelijk weinig aandacht is geschonken. In hetzelfde jaar toch, dat deze conclusie genomen werd, moest het oorspronkelijk ontwerp voor een niveaukanaal met een sluis opgegeven, en vervangen worden door een kanaal met meerdere sluizen en begon de lijdensgeschiedenis van het Panamakanaal.

En daarbij heeft steeds op den voorgrond gestaan het zooveel mogelijk beperken van de hoeveelheid te vergraven grond waartoe een hoog kanaalpeil in het bergachtige terrein, en dientengevolge meerdere sluizen noodzakelijk waren.

§ 3. Wanneer men dus de vraag wil beantwoorden of een open Panamakanaal zonder sluizen mogelijk is, dan dient men in de eerste plaats te onderzoeken of het rapport der Fransche Akademie van Wetenschappen van 1887 op juiste grondslagen berust.

Welke waren nu die grondslagen ?

Op grond van waarnemingen aan den getijmeter te Panama werd aangenomen dat de verschillen tusschen hoog- en laagwater of de amplituden van het getij in de Stille Zuidzee aan den mond van het Panamakanaal bedragen :

bij doodtij	gemiddeld	2.46 M.
„ springtij	„	5.06 M.
„ „	als maximum in Maart of September	6.76 M.

De commissie berekent nu de stroomsnelheden voor dit maximum tijverschil van 6.76 M. in de Stille Zuidzee, laat het gewoonlijk kleine getijverschil in den Atlantischen Oceaan buiten rekening en gaat voorts van de volgende onderstellingen uit :

1° dat de waarneming leert, dat op een kanaal dat in gemeenschap is aan de eene zijde met een zee met veranderlijken waterstand en aan de andere zijde met een zee met standvastigen waterstand de amplitude van de getijkromme van de eene tot de andere zee gelijkmatig afneemt en de vertraging van het getij evenredig is met den afstand, zoodat :

indien $Y =$ halve amplitude getij Stille Zuidzee.
$l =$ lengte kanaal.
$\omega =$ snelheid van voortplanting van het getij,

de waterstand y ten opzichte van den gemiddelden kanaal- of zeestand op een afstand x van de Stille Zuidzee zal zijn :

$$y = - Y\left(1 - \frac{x}{l}\right) cos \left(2t - \frac{x}{\omega}\right)$$

2° dat de snelheid van voortplanting van het getij in overeenstemming met hetgeen is waargenomen op soortgelijke kanalen en bepaaldelijk op het Suezkanaal tusschen Suez en de Bittere meren kan worden voorgesteld door de bekende formule :

$$\omega = \sqrt{g\left(H + \frac{3}{2}y\right)} \pm Kv$$

waarin : H = diepte van het kanaal onder den gemiddelden zeestand.
v = stroomsnelheid.
K = constante (0.4 bij vloed en 1.2 bij eb),

3° dat uit de waterstanden, welke voor twee niet te ver van elkander gelegen plaatsen voor een willekeurig oogenblik op grond der onderstellingen sub 1° en 2° zijn afgeleid, de stroomsnelheid op dat oogenblik kan berekend worden door toepassing der formule

$$v = 56{,}86\sqrt{Ri} - 0.07$$

Met deze onderstellingen zijn nu voor plaatsen op 9, 27, 45 en 63 K.M. van de Stille Zuidzee voor een getij met eene amplitude van 6.76 M. de stroomsnelheden berekend welke hieronder volgen [1]).

Tijd na laagwater in de Stille Zuidzee.	Afstanden van de Stille Zuidzee.			
	9 K.M.	27 K.M.	45 K.M.	63 K.M.
Maanuren.	Stroomsnelheden in M. per seconde.			
0	— 0.95	— 1.00	— 0.77	— 0.69
½	— 0.81	— 0.90	— 0.93	— 0.72
1	— 0.60	— 0.84	— 0.87	— 0.83
1½	— 0.13	— 0.75	— 0.82	— 0.85
2	+ 0.35	— 0.59	— 0.75	— 0.86
2½	+ 0.67	— 0.34	— 0.63	— 0.81
3	+ 0.84	+ 0.35	— 0.42	— 0.73
3½	+ 0.93	+ 0.63	+ 0 08	— 0.61
4	+ 0.98	+ 0.78	+ 0.43	— 0.41
4½	+ 1.02	+ 0.93	+ 0.80	0
5	+ 1.17	+ 1.06	+ 0.82	+ 0.51
5½	+ 1.16	+ 1.11	+ 0.86	+ 0.66
6	+ 1.09	+ 1.06	+ 0.98	+ 0.76
6½	+ 0.97	+ 1.01	+ 0.97	+ 0.85

\+ = strooming *van* de Stille Zuidzee *naar* den Atlantischen Oceaan
— = „ „ den Atlantischen Oceaan *naar* de Stille Zuidzee

[1]) De lengte van het kanaal, welke volgens het destijds opgemaakte ontwerp 72 K.M. zou bedragen is bij die berekeningen met het oog op de bochten voor 76 K.M. in rekening gebracht. De bodemsbreedte was aangenomen op 21 M, de diepte 11.50 M. beneden den gemiddelden zeestand bij Panama en 9 M. bij Colon, de glooiingen 1 op 1.

Uit deze berekeningen volgt dus dat de maximum snelheid in het kanaal aan de zijde van de Stille Zuidzee uitsluitend als gevolg van de getijbeweging zal bedragen 1.17 M. In de onderstelling dat er eenig verschil zou kunnen bestaan tusschen den gemiddelden zeestand van den Atlantischen Oceaan en dien der Stille Zuidzee en dat dit verschil 0.50 M. zou kunnen bedragen komt de commissie tot het besluit, dat de maximumsnelheid alsdan zou kunnen stijgen tot 1.26 M., op grond waarvan zij dan ten slotte hare reeds genoemde conclusie afleidt.

§ 4. De eerste twee grondslagen waarop de berekeningen berusten zullen vermoedelijk niet belangrijk van de werkelijkheid afwijken, daar zij althans ten deele bevestigd worden door hetgeen wordt waargenomen op het Suezkanaal.

De commissie wijst er nog op, dat de formule voor de snelheid van voortplanting van de getijgolf, welke is afgeleid in de onderstelling dat de amplitude van het getij betrekkelijk klein is ten opzichte van de waterdiepte, voor het Suezkanaal uitkomsten geeft, die zeer nabij met de werkelijkheid overeenstemmen. De formule leidde namelijk tot eene snelheid van voortplanting van 10.06 M. waar de waarneming 9.54 M. aangaf.

Met den derden grondslag is het echter eenigszins anders gesteld. De formule waarmede de stroomsnelheden berekend zijn is de bekende formule voor permanente gelijkmatige beweging en die beweging zal uit den aard der zaak niet kunnen plaats hebben op een kanaal waarin een krachtige getijbeweging voorkomt. De vraag waarop het hier aankomt is echter niet zoozeer of de snelheden met gebruikmaking dier formule voor elk oogenblik met voldoende juistheid berekend kunnen worden, maar bepaaldelijk of daarmede de berekende *maximum snelheden niet te klein* zijn gevonden.

Hieromtrent valt op te merken, dat over het algemeen voor elke plaats de toepassing der formule de snelheid te klein zal aangeven gedurende den tijd, dat met de verandering van den waterstand het verhang kleiner wordt doch daarentegen de snelheid te groot zal aangeven gedurende den tijd dat met die verandering het verhang grooter wordt.

Beschouwt men nu met het oog hierop de kanaalvakken K.M. 0—9 en K.M. 9—27 van $4^1/_2$ tot 6 uur na laagwater aan de Stille Zuidzee dan heeft men het volgende :

Tijd na laagwater.	Gemiddeld verhang.	
	K.M. 0—9	K.M. 9—27
4½ uur	0.000044	0.000040
5 „	0.000048	0.000046
5½ „	0.000048	0.000047
6 „	0.000044	0.000045

Uit bovenstaande opgaven blijkt, dat gedurende het half uur voorafgaande aan de tijdstippen waarop de snelheden maximum-waarden bereiken op K.M. 9 en 27, het gemiddeld verhang zoowel op vak 0—9, als op vak 9—27 weinig veranderlijk doch toenemende is geweest.

Hieruit volgt dus, dat door de toepassing der formule voor die tijden vermoedelijk geen fout van beteekenis kan zijn gemaakt en dat in ieder geval de maximum snelheid niet te klein berekend is.

Intusschen dient ter beoordeeling van de waarde der berekeningen nog onderzocht te worden of door de berekende snelheden in verband met de berekende waterstanden voldaan wordt aan de continuïteitsvergelijking :

$$\frac{dI}{dt} = -I\frac{dv}{dx} - v\frac{dI}{dx}$$

indien I de inhoud en v de gemiddelde snelheid van een doorstroomingsprofil voorstellen op het tijdstip t op een afstand x van de Stille Zuidzee.

In hoeverre door de berekende waterstanden en snelheden aan deze voorwaarde voldaan wordt kan bij benadering worden nagegaan door gebruik te maken van de voor elk half uur en voor verschillende afstanden van de Stille Zuidzee berekende waterstanden en snelheden. Men vindt alsdan het volgende :

A. voor de verschillen der afvoeren op 9 en 27 K.M. van de Stille Zuidzee.

Maanuren na laagwater Stille Zuidzee.	Inhoud. *I*		Snelheid. *v*		Afvoer. *Iv*		Per half uur in vak 9—27		Meer in- dan uitgestroomd per half uur
	9	27	9	27	9	27	*in*gestroomd	*uit*gestroomd	
	M³.	M³.	M.	M.	M³.	M³.	M³.	M³.	M³.
4½	450	388	1.02	0.93	459	361			
							914000	713000	+201000
5	475	407	1.17	1.06	556	431			
							1.013000	807000	+206000
5½	491	420	1.16	1.11	570	466			
							1.002000	828000	+174000
6	498	428	1.09	1.06	543	454			

B. voor de verandering van den waterinhoud van vak 9—27.

Maanuren na laagwater Stille Zuidzee.	Inhoud. *I*		Verandering v. d. inhoud p. half uur.		Gemiddeld voor vak 9—27.	Verandering v. d. waterinhoud per half uur vak 9—27.
	9	27	9	27		
	M².	M².	M².	M².	M².	M³.
4½	450	388				
			+ 25	+ 19	+ 22	+ 396000
5	475	407				
			+ 16	+ 13	+ 14⁵	+ 261000
5½	491	420				
			+ 7	+ 8	+ 7⁵	+ 135000
6	498	428				

Door vergelijking der laatste kolommen der staten A en B komt men tot de volgende verschillen voor vak 9—27 :

van $4^1/_2$—5 uur + 195000 M³ of gemiddeld per seconde + 108 M³.
„ 5 —$5^1/_2$ „ + 55000 „ „ „ „ „ + 31 „
„ $5^1/_2$—6 „ — 39000 „ „ „ „ „ — 22 „

Uit deze vergelijking blijkt, dat door de berekende snelheden in verband met de berekende waterstanden niet ten volle aan de continuïteitsvoorwaarde wordt voldaan, zoodat wanneer men de waterstanden als juist aanneemt de snelheden eenige correcties moeten ondergaan.

Stelt men die correcties gemiddeld van half uur tot half uur

voor K.M. 9 = $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$,
en voor K.M. 27 = $\delta_1', \delta_2', \delta_3', \delta_4'$,

dan vindt men voor de waarden dezer correcties:

$$\delta_1 = + 0.15\ M. \qquad \delta_1' = - 0{,}13\ M.$$
$$\delta_2 = + 0.12\ ,, \qquad \delta_2' = - 0{,}10\ ,,$$
$$\delta_3 = - 0.04\ ,, \qquad \delta_3' = + 0{,}04\ ,,$$
$$\delta_4 = - 0{,}01\ ,, \qquad \delta_4' = + 0{,}01\ ,,$$

Voor de snelheden vindt men dan met inachtneming dezer correcties

	op K.M. 9	op K.M. 27
op $4^1/_2$ uur	1,17 M.	0,80 M.
,, 5 ,,	1,29 ,,	0,96 ,,
,, $5^1/_2$,,	1,12 ,,	1,15 ,.
,, 6 ,,	1,08 ,,	1,07 ,,

Uit deze opgaven blijkt dus, dat door slechts betrekkelijk kleine wijzigingen te brengen aan de berekende snelheden althans voor het vak 9—27 gedurende den tijd tusschen $4^1/_2$ en 6 uur na laagwater aan de continuiteitsvoorwaarde voldaan kan worden.

Het kan evenwel niet ontkend worden, dat de omstandigheid, dat het voldoen aan de continuiteitsvoorwaarde niet rechtstreeks uit de toegepaste methode van berekening der snelheden voortvloeit er mede op wijst, dat er in die methode eene onzekerheid bestaat, hoewel blijkt dat die onzekerheid voorzoover betreft de berekening der maximum snelheden vermoedelijk niet groot zal zijn.

Een andere reden van onzekerheid in de berekening der snelheden is gelegen in de aangenomen waarde van den coefficient der formule voor eenparige beweging.

Die waarde, 56,86 berust niet op de uitkomsten van een groot aantal waarnemingen op rivieren of kanalen met ongeveer gelijk verhang en evengroote diepte als op het Panamakanaal maar op waarnemingen voor rivieren met veel kleiner diepte.

Een oordeel omtrent de waarde van dien coefficient, alsmede meer algemeen omtrent de toepasselijkheid der formule voor gevallen als waarvan hier sprake is, kan natuurlijk verkregen worden door het vergelijken van de snelheden welke daarmede voor het Suezkanaal worden gevonden met die welke op dat kanaal zijn waargenomen.

Van de waarnemingen welke omtrent de snelheden op dat kanaal voor het gedeelte tusschen de Bittere Meren en Port-Thewfik hebben plaats gehad zijn de uitkomsten gepubliceerd voor die welke verricht werden op 23 Juli, 8 en 22 Augustus en 6 September 1892 [1]).

Deze waarnemingen zijn echter niet voldoende voor eene juiste

[1]) Zie: Het Suezkanaal naar de nagelaten papieren van I. F. W. Conrad bewerkt door R. A. van Sandick. Tijdschrift Kon. Instituut van Ingenieurs 1902—1903, blz. 89 en 90.

vergelijking, omdat zij verricht zijn in twee vakken ieder lang 200 M., die gemiddeld slechts 4.9 K.M. van elkander verwijderd waren en waarvan het eene behoorde tot het destijds op 37 M. bodemsbreedte verruimde kanaalgedeelte en het andere behoorde tot en gelegen was op den overgang tot het nog niet verruimde kanaal gedeelte met een bodemsbreedte van 22 M. tengevolge waarvan de waterbeweging op het geheele 4.9 K.M. lange kanaalgedeelte niet gelijkmatig kan zijn geweest [1]).

Bovendien zijn bij die waarnemingen slechts de stroomsnelheden in de eigenlijke stroomgeul met drijvers tot eene diepte van 6 M. beneden den waterspiegel waargenomen en niet de gemiddelde snelheden over het geheele profil van doorstrooming, welke met de formule berekend worden. Intusschen kan eene vergelijking dier waarnemingen met de uitkomsten welke bij toepassing der formule verkregen worden toch eenigermate een indruk geven van het vertrouwen, dat de formule verdient.

De vergelijking der bedoelde waarnemingen met de resultaten van eene toepassing der formule met den coefficient 56,86, leiden tot de volgende uitkomsten.

WAARNEMINGEN IN HET SUEZKANAAL IN 1892.

Dag en uur der waarneming.	Richting van den stroom.	Afstand der waarnemingsplaatsen.	Gemiddeld verval tusschen de waarnemingsplaatsen.	Waargenomen snelheden in de stroomgeul gemiddeld gedurende een uur in het		Berekende gemiddelde snelheid voor het verruimde gedeelte [2]).
				verruimde gedeelte.	niet verruimde gedeelte.	
		K.M.	M.	M.	M.	M.
23 Juli 11—12 v.m.	vloed	4.9	+ 0.12	+ 0.75	+ 0.97	+ 0 64
„ „ 5—6 n.m.	eb	4 9	— 0.14	— 0 84	— 1.11	— 0.58
8 Aug. 11—12 v.m.	vloed	4.9	+ 0.09	+ 0.69	+ 0.87	+ 0.47
„ „ 5—6 n.m.	eb	4.9	— 0.11	— 0.80	— 0.93	— 0.57
22 „ 6—7 v.m.	eb	4.9	— 0.16	— 0.88	— 1 05	— 0.68
„ „ 12—1 n.m.	vloed	4.9	+ 0.07	+ 0.66	+ 0.82	+ 0.46
6 Sept. 11—12 v.m.	vloed	4.9	+ 0.07	+ 0 66	+ 0 89	+ 0.47
„ „ 5—6 n.m.	eb	4.9	— 0.10	— 0.85	— 0.98	— 0 53

[1]) Het eene drijfvak was het verruimde kanaalgedeelte tusschen K.M. 149 en 149.2, het andere het niet verruimde gedeelte tusschen K.M. 144.1 en 144.3. De overgang van het verruimde tot het niet verruimde gedeelte lag bij K.M. 144.4.

[2]) Daar het gedeelte tusschen K.M. 149 en 144.4 verruimd was, heeft het waargenomen verval dus betrekking op het verruimde gedeelte.

Uit dezen staat vindt men voor de verhouding tusschen de berekende gemiddelde snelheden over het geheele profil van doorstrooming en de waargenomen snelheden over eene diepte van 6 Meter in het midden van het verruimde gedeelte de volgende waarden

bij vloedstroom (van de Roode Zee)	bij ebstroom (naar de Roode Zee)
1.17	1.45
1.47	1.40
1.43	1.30
1.40	1.61
Gemiddeld 1.37	1.44

Hoe groot die verhouding bij overeenstemming van waarneming en berekening had moeten zijn is niet bekend, doch wanneer men in aanmerking neemt, dat de drijvers slechts tot 6 M. onder den waterspiegel reikten terwijl de waterdiepte bij vloed ruim 8.50 M. en bij eb ruim 7.50 M. bedroeg en voorts, dat de taluds van het kanaal hellingen hadden van ongeveer $2^1/_2$ op 1, dan moet in ieder geval de snelheid in het midden belangrijk grooter zijn geweest dan de gemiddelde stroomsnelheid over het geheele profil.

De formule geeft dus bij toepassing op het Suezkanaal uitkomsten, die voor zoover kan worden nagegaan met de gedane waarnemingen niet in strijd zijn.

Meer kan uit bovenstaande vergelijking van berekende en waargenomen snelheden niet worden afgeleid.

Zoolang dus niet door volledige waarnemingen op het verruimde Suezkanaal omtrent het verband tusschen stroomsnelheid, getijbeweging en afmetingen van het profil meerdere zekerheid is verkregen omtrent de waarde van den coefficient in de formule, alsmede omtrent de toepasselijkheid dier formule, is eenige zelfs eene betrekkelijk belangrijke onzekerheid in de berekening der maximum snelheid niet te ontgaan.

§ 5. Het vereischt dus eene nadere beschouwing in hoeverre de stroomsnelheid in een open kanaal bezwaren voor de scheepvaart kan veroorzaken en eventueel of die bezwaren niet zijn op te heffen.

Bij deze beschouwing dient in aanmerking genomen te worden aan de eene zijde, dat de berekende snelheden gemiddelde snelheden voor het geheele profil van doorstrooming voorstellen, zoodat de absolute snelheden in het midden van het kanaal grooter zullen zijn, doch aan de andere zijde, dat die berekende snelheden betrekking hebben op het grootste getij-verschil dat kan voorkomen. De berekende

maximum-snelheid zal dus slechts een paar dagen in elk jaar kunnen voorkomen en op die dagen zelfs nog slechts enkele uren.

In hoeverre nu eene betrekkelijk zeldzaam voorkomende stroomsnelheid voor de scheepvaart bezwarend zal zijn is natuurlijk het best te beoordeelen door vergelijking met kanalen waarop onder gelijke omstandigheden zulke groote snelheden voorkomen, voor welke vergelijking het Suezkanaal het meest in aanmerking komt. Voor dat kanaal zijn verscheidene waarnemingen omtrent stroomsnelheden bekend doch op volledigheid kunnen de gepubliceerde waarnemingen, althans voor dit doel, geen aanspraak maken. In de eerste plaats niet, omdat zij niet zoo veelvuldig hebben plaats gehad, dat er reden is om aan te nemen, dat daaronder ook begrepen zullen zijn de weinige gevallen die door een samenloop van ongunstige omstandigheden aanleiding kunnen geven tot zeldzaam voorkomende groote snelheden; in de tweede plaats niet, omdat die snelheidsmetingen in den regel betrekking hebben op de absolute snelheden in het midden van het kanaal en niet op de gemiddelde snelheden van het geheele profil van doorstrooming.

Voorts dient bij eene vergelijking met het Suezkanaal in aanmerking genomen te worden, dat de afmetingen van het Panamakanaal veel grooter zullen zijn dan die van het Suezkanaal bij den aanleg, zoodat snelheden welke op dit kanaal niet tot bezwaren aanleiding hebben gegeven dit in nog minder mate op het Panamakanaal zullen doen.

Het Suezkanaal toch had oorspronkelijk van de Bittere Meren tot Suez slechts eene bodembreedte van 22 M. en eene diepte van 8 M. beneden gewoon gierstrooms laagwater overeenkomende met een profils inhoud van 330 M². Het Panamakanaal op zeeniveau zou daarentegen eene bodemsbreedte verkrijgen van ongeveer 45,7 M. (150 voet) en eene diepte van ongeveer 12.2 M. (40 voet) overeenkomende met een profilsinhoud van 855 M².

Omtrent de snelheden in het Suezkanaal tusschen de Bittere Meren en Suez is het volgende bekend volgens waarnemingen gedaan in het tijdvak 1871—1876 [1]).

„De maximum snelheid van den noordwaarts loopenden vloedstroom „is in de giertijen der maanden Mei en November 0.80 tot 0.90 M. en „in de maanden Januari en Februari 1.15 tot 1.35 M. in de seconde.

„De maximum snelheid van den zuidwaarts loopenden ebstroom is „in de giertijen der maanden Mei en November 0.75 tot 0.80 M., „en in de maanden Juli en Augustus 1.20 tot 1.25 M. in de seconde".

---

[1]) Zie verhandeling van den heer J. F. W. Conrad, blz. 89 en 90.

„Langs Port-Thewfik, in het kanaal bezuiden de vaargeul naar „Suez met 80 M. bodembreedte, is de snelheid van den vloedstroom „in de giertijen 0.60 tot 0.70 M. en in de de doode tijen 0.45 tot „0.50 M. en des winters bij hevigen Zuidelijken wind 1.00 tot „1.20 M. in de seconde; de snelheid van den ebstroom is in de „giertijen 0.55 tot 0.60 M. en des zomers bij hevige Noordelijke „winden 0.90 M. in de seconde.

„Buiten den kanaalmond te Port-Thewfik is geen stroomsnelheid „waargenomen".

Bij de waarnemingen op 23 Juli 1892 welke voor den vloedstroom stellig niet onder ongunstige omstandigheden hebben plaats gehad werden reeds snelheden waargenomen van 0.95—1.03 M.. gemiddeld 0.97 M., bij vloed en 1.11 M. bij eb.

De ingenieur, chef van dienst van het Suezkanaal, de heer Dauzats, verklaarde in de zittingen der technische subcommissie van het internationaal congres voor het Panamakanaal van 1879 ten opzichte van de wisselplaatsen van het Suezkanaal het volgende: [1])

„Dans les canaux où le courant est faible, et là où n'existe aucun courant, il suffit de faire les gares d'un seul côté; mais dès que la vitesse atteint 0.75 ou 1.50 M, il faut les établir des deux côtés et en face l'une de l'autre".

Hieruit mag zeker wel worden afgeleid, dat genoemde ingenieur op grond van zijne ondervinding van het Suezkanaal van oordeel is dat stroomsnelheden tot 1.50 M. per seconde kunnen toegelaten worden. De geringe aanvankelijke bodemsbreedte van 22 M. van het Suezkanaal maakte evenwel gelijktijdige vaart in beide richtingen op dat kanaal bezwaarlijk. Dat echter de stroomsnelheden ook voor de groote schepen, die thans het Suezkanaal bevaren, geen bezwaar opleveren, blijkt uit de volgende mededeelingen door den Ingenieur E. Quellennec, Adviseur van de Suezkanaal-maatschappij aan den Board of Consulting Engineers van 1905 verstrekt, luidende:

„In the Suez section the velocity of the current very often exceeds 0.60 meter per second, and reaches at times 1.35 Meters per second.

„In the later case the ships do not steer very well with the „current running in; however the navigation is never interrupted „on account of the current. In the Port Said section ships can „moor with a current running in either direction; in the Suez „section they always moor with the current running out". [2])

Het kanaal tusschen de Bittere Meren en de Roode Zee heeft thans gedeeltelijk eene breedte van ongeveer 37 Meter doch eene

[1]) Zie Congrès international enz 1879, blz. 361.

[2]) Zie Report of the Board of Consulting Engineers for the Panamacanal Washington 1906, blz. 176.

verruiming van het profil tot 45 M. breedte en 10.5 M. diepte is in uitvoering. Die verruiming zal stellig ten gevolge hebben, dat de scheepvaart nog minder bezwaar van groote stroomsnelheden zal ondervinden dan thans, doch — en hierop dient de aandacht gevestigd te worden — de stroomsnelheden zullen wanneer de verruiming over de geheele lengte van Suez tot de Bittere Meren gereed is, niet kleiner maar grooter zijn. Immers in verband met de oppervlakte der beide Bittere Meren van ongeveer 23800 H.A. kan die verruiming slechts eene uiterst geringe wijziging van de waterstanden in die meren veroorzaken. Dientengevolge blijft na de verruiming het verval tusschen de Roode Zee en de Bittere Meren zoowel bij hoog- als laagwater nagenoeg onveranderd en onder die omstandigheden zal verruiming van het doorstroomingsprofil noodzakelijk vergrooting der stroomsnelheden ten gevolge hebben.

Voor eene juiste beoordeeling van de vraag of de stroomsnelheden in een open Panamakanaal zonder sluis bezwaren van beteekenis voor de scheepvaart kunnen opleveren is echter de maximum snelheid welke elk jaar gedurende enkele uren en dan nog slechts alleen in het kanaalgedeelte aan de zijde van de Stille Zuidzee kan voorkomen geen voldoende maatstaf, maar dient men bovenal rekening te houden met de snelheden, die als regel zullen voorkomen bij gemiddeld springtij en gemiddeld doodtij over de geheele lengte van het kanaal.

Bij benadering kunnen die snelheden worden afgeleid uit die welke door de Fransche Akademie zijn opgegeven voor een maximum getijverschil van 6.76 M.[1]) althans in de onderstelling, dat deze laatste stroomsnelheden niet veel van de werkelijkheid zullen afwijken.

Men vindt alsdan voor de *maximum snelheden*

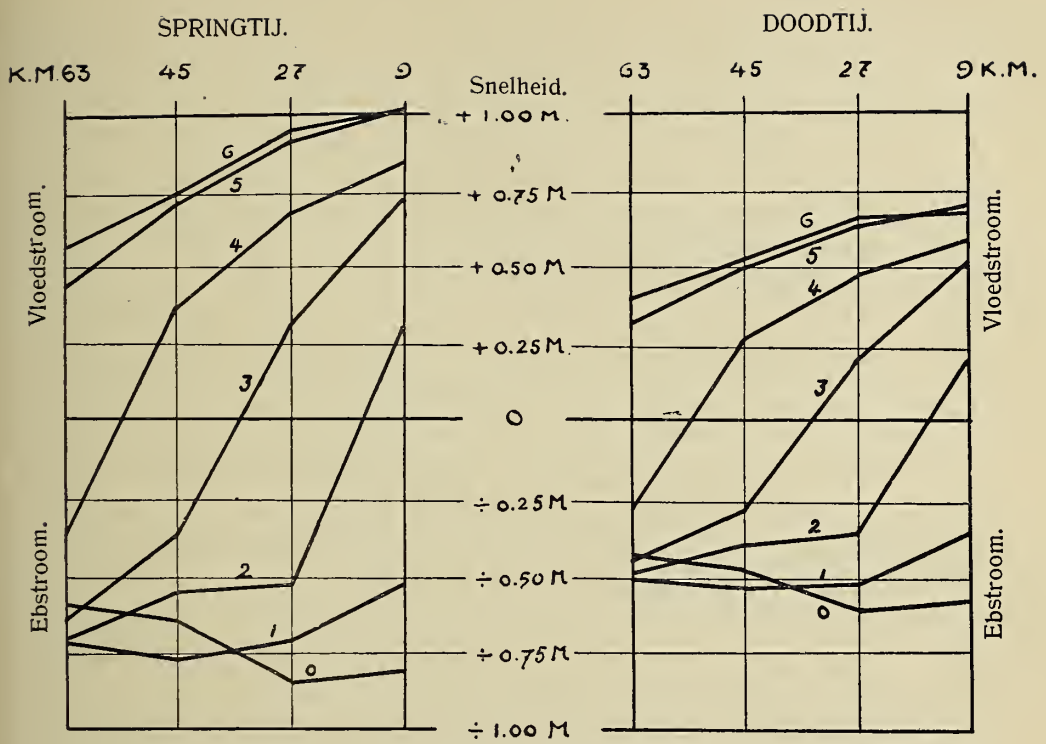
op K.M.	9	27	45	63
bij gemiddeld doodtij	0.70 M.	0.67 M.	0.59 M.	0.51 M.
„ „ springtij	1.01 „	0.96 „	0.85 „	0.74 „

De volgende figuren geven de stroomsnelheden aan van K.M. 9 tot 63 van de Stille Zuidzee bij gemiddeld springtij en doodtij van 0 tot 6 maanuren na laagwater aan de Stille Zuidzee afgeleid uit de berekeningen van de Fransche Akademie van Wetenschappen.

---

[1]) De benadering bestaat hierin, dat de verschillen tusschen de snelheden van voortplanting van het getij voor verschillende amplituden buiten rekening worden gelaten, alsdan heeft men voor de snelheid v op een willekeurige plaats bij eene amplitude y' uitgedrukt in de snelheid v bij eene amplitude y:

$$(v' + 0.07) = (v + 0.07)\sqrt{\frac{y}{y}}$$



De ingeschreven cijfers stellen de uren voor na laagwater in de Stille Zuidzee.
+ = strooming *van* de Stille Zuidzee naar den Atl. Ocean
÷ = „ „ den Atl. Oceaan „ de Stille Zuidzee.

§ 6. Uit de voorgaande beschouwingen volgt, dat voorzoover uit rechtstreeksche berekeningen van de te verwachten snelheden in een open Panamakanaal is af te leiden, er grond is voor de meening, dat die snelheden niet grooter zullen zijn dan die op het Suezkanaal tusschen de Bittere Meren en de Roode Zee voorkomen bij matigen wind.

Evenwel dient niet uit het oog verloren te worden, dat zoowel in die berekeningen als in de grootte der snelheden, welke op het Suezkanaal voorkomen, eenige en zelfs eene betrekkelijk belangrijke onzekerheid overblijft, welke alleen door het verrichten van meer volledige waarnemingen, dan bekend zijn, omtrent het verband tusschen stroomsnelheid, getijbeweging en afmetingen van het profil op het Suezkanaal te verminderen zoude zijn.

Men zal daarom slechts tot een juiste beoordeeling van de vraag of een open Panamakanaal zonder sluis mogelijk is kunnen komen door een anderen weg te volgen dan dien van vergelijking van berekende snelheden op het Panamakanaal met waargenomen snelheden op het Suezkanaal.

Die weg kan hierin bestaan, dat men door vergelijking van de omstandigheden, welke op beide kanalen zullen voorkomen, recht-

streeks tracht te komen tot de kennis van de *verschillen* der snelheden op beide kanalen, om dan op grond van de omstandigheid, dat op het Suezkanaal geen bezwaar van de stroomsnelheden wordt ondervonden te besluiten of die *verschillen* in verband met de vermoedelijke grootte der snelheden op het Suezkanaal van zoodanigen aard geacht moeten worden, dat bepaaldelijk door die verschillen op het Panamakanaal bezwaren zullen ontstaan.

Bij die vergelijking kan worden aangenomen, dat de hevige winden, die op het Suezkanaal voorkomen en oorzaak zijn tot vergrooting der stroomsnelheden tengevolge van de getijbeweging met 0.30 tot 0.50 M. op het Panamakanaal nabij de Stille Zuidzee niet te verwachten zijn.

Vooraf dient echter onderzocht te worden of een open kanaal niet zoodanig kan worden ingericht, dat op het gedeelte waar de stroomsnelheid het grootst zal zijn het bezwaar van groote stroomsnelheden kan worden opgeheven.

Het is duidelijk, dat dit alleen mogelijk zoude zijn door het kanaal een zeer groote breedte te geven. Dit is echter bezwaarlijk uitvoerbaar voor het gedeelte van het kanaal dat door bergachtig terrein loopt, doch is daarentegen zonder bezwaar uitvoerbaar voor het kanaalgedeelte van de Stille Zuidzee tot aan het Culebra-gebergte en wel tot nabij Pedro-Miguel, welk gedeelte grootendeels door laag terrein loopt.

Geeft men aan dat kanaalgedeelte waarop juist de grootste snelheden zullen voorkomen eene bodembreedte van bijv. 500 voet (ongeveer 150 M) in plaats van ongeveer 150 voet (45.7 M.) dan zal daarop van de te verwachten stroomsnelheden geen bezwaar worden ondervonden.

Intusschen zou eene dergelijke verbreeding van het kanaalgedeelte aan de zijde van de Stille Zuidzee eene vergrooting van het verhang en van de stroomsnelheid in het overige gedeelte ten gevolge hebben, indien geen bijzondere maatregelen ter voorkoming daarvan werden getroffen.

Die maatregelen zouden moeten bestaan in het maken van een reservoir of meer in open gemeenschap met het verbreede gedeelte van het kanaal. Dit reservoir of meer zou zoodanige oppervlakte moeten hebben, dat het in staat is, om gedurende de rijzing van den waterstand de hoeveelheid water, die door het verbreede gedeelte meer wordt aangevoerd dan door het niet verbreede gedeelte wordt afgevoerd, te bergen en die hoeveelheid bij daling van den waterstand wederom naar het verbreede gedeelte te kunnen toevoeren.

Theoretisch is dit uit den aard der zaak mogelijk, of dit ook practisch uitvoerbaar is hangt af van de oppervlakte van het meer welke in

verband met eene bepaalde vermeerdering der breedte vereischt wordt.

Een meer zooals op Pl. I is aangegeven, van ruim 800 H. A., is echter in de lage terreinen langs het kanaal nabij de uitmonding in de Stille Zuidzee uitvoerbaar.

In verband met deze oppervlakte kan de meerdere breedte bepaald worden, welke aan het gedeelte nabij de Stille Zuidzee gegeven kan worden zonder onder bepaalde omstandigheden van bijv. springtij wijziging te brengen van het verhang der hoog- en laagwaterlijnen en stroomsnelheden op het overige gedeelte.

Bij grootere amplitude van het getij dan die van springtij zal dan het verhang en de stroomsnelheid op het breedere gedeelte eenigszins sterker en op het overige gedeelte daarentegen geringer worden dan zonder verbreeding van het eerste gedeelte met toevoeging van een meer, terwijl bij kleinere amplitude van het getij het omgekeerde zich zal voor doen.

Bij gemiddeld springtij bedraagt de amplitude van het getij in de Stille Zuidzee ± 5.06 M.

In verband met de situatie van het terrein zal de verbinding tusschen het verbreede kanaal en het meer op ongeveer 12 K.M. van het einde van het kanaal in de Stille Zuidzee bepaald moeten worden; de ruime oppervlakte van het meer begint echter eerst ongeveer 3 K.M. verder dus op ± 15 K.M. van de zee. De amplitude van het getij in het meer zal dus, indien het verhang der hoog- en laagwaterlijnen nagenoeg onveranderd blijft, en de lengte van het Kanaal volgens de laatste ontwerpen op ± 80 K.M. wordt gesteld, kunnen zijn $(5.06 - 15 \times 0.0632)$ M. $= \pm$ **4.10** M.

Bij die amplitude kan in het meer tusschen hoog- en laagwater eene hoeveelheid water geborgen worden van $800 \times 10.000 \times 4.10$ M^3 $= 32{,}800{,}000$ M^3.

Bij benadering aannemende, dat deze hoeveelheid geborgen wordt gedurende den tijd van 6 uur zal dus *gemiddeld* per seconde daarin geborgen worden ruim 1500 M^3.

De meerdere breedte van het kanaalgedeelte bij de Stille Zuidzee zal dus zoodanig bepaald moeten worden, dat dientengevolge door dat gedeelte *gemiddeld* per seconde ongeveer 1500 M^3. — zonder vermeerdering van de stroomsnelheid — meer kan worden aan- of afgevoerd dan bij de normale breedte het geval zoude zijn.

Hoe groot nu die meerdere breedte daartoe zal moeten zijn is zonder uitvoerige berekeningen niet nauwkeurig aan te geven, doch het valt gemakkelijk in te zien, dat die *meerdere* breedte ongeveer 100 M. zal zijn, zoodat aan het breedere gedeelte van den ingang van het Kanaal tot aan de verbinding met het meer eene bodems-

breedte van ongeveer 150 M. overeenkomende met een breedte op den waterspiegel van ongeveer 250 M. bij hoogwater springtij gegeven zonde kunnen worden, welke breedte dan verder tot K.M. 64 geleidelijk in de normale breedte kan overgaan.

Het zal dus mogelijk zijn om een eventueel bezwaar van groote stroomsnelheden op het 16 KM. lange Kanaalgedeelte aan de zijde van de Stille Zuidzee door vermeerdering van de bodemsbreedte over dat gedeelte op te heffen.

Hoe is het nu met het overige 64 K.M. lange kanaalgedeelte gesteld?

Op dat gedeelte zal de helling of het zoogenaamde verhang der hoog- en laagwaterlijnen 3.16 cM. per K. M. bedragen, bij gemiddeld springtij en ongeveer 1.52 cM. bij gemiddeld doodtij.

Op het Suezkanaal bedraagt het verhang der hoog- en laagwaterlijnen tusschen de Bittere Meren en de Roode Zee, 2.52 cM. per K.M. bij gemiddeld springtij en 1.48 cM. bij gemiddeld doodtij.

Door den invloed van de richting en de kracht van den wind loopen de getijen bij Suez echter ongeveer 0.25 à 0.30 M. hooger of lager, waardoor het verhang van de hoog- of van de laagwaterlijn ongeveer 1 cM. per K. M. grooter kan worden.

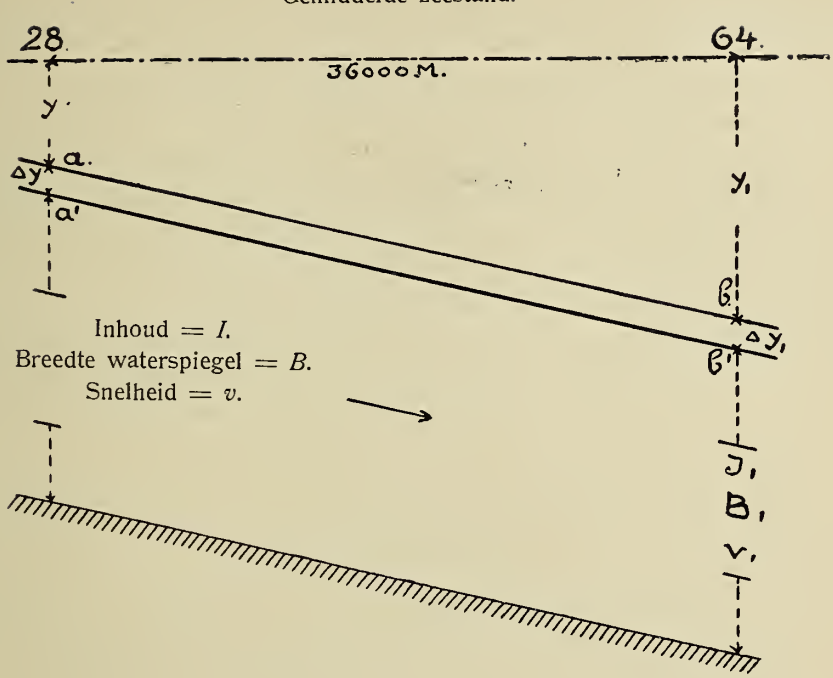
Daar nu de afstand van de Bittere Meren tot de Roode Zee ongeveer 28 K. M. is, kan men reeds hieruit afleiden dat de stroomsnelheden in een open Panamakanaal over de eerste 28 K. M. van den Atlantischen Oceaan slechts weinig kunnen verschillen van die welke in het Suezkanaal voorkomen (Zie Plaat II).

Wanneer men dus — de absolute grootte der snelheden in het midden latende — mag aannemen dat op het Suezkanaal ook nadat dit verruimd is de stroomsnelheid geen bezwaar zal opleveren, dan volgt hieruit dat op een open Panamakanaal over ongeveer 28 K. M. van den Atlantischen Oceaan stellig geen bezwaar van de stroomsnelheid zal worden ondervonden.

En ten slotte het middenkanaalgedeelte ter lengte van ongeveer 36 K.M. tusschen K.M. 28 en K.M. 64 van den Atlantischen Oceaan.

Voor dat gedeelte kan men de *verschillen* tusschen de stroomsnelheden, die daarin zullen voorkomen met die welke in het vorige 28 K.M. lange kanaalgedeelte voorkomen voldoende nauwkeurig bepalen met behulp der continuiteitsvergelijking.

Zij namelijk a b de verhanglijn over dat gedeelte op het tijdstip t kort voor laagwater op K.M. 64 van den Atlantischen Oceaan, a′ b′ de verhanglijn een seconde later,



dan moet noodzakelijk

$$-\frac{(B+B_1)}{2}\times 36000\times\frac{\Delta y+\Delta y_1}{2}=Iv-I_1v_1$$

waaruit volgt

$$(v_1-v)=\frac{36000\,(B+B_1)\,(\Delta y+\Delta y_1)}{4\,I_1}+v\,\frac{I-I_1}{I_1}$$

Daar nu in de onderstelling dat de hoog- en laagwaterlijnen over het vak 28—64 nagenoeg rechte lijnen zullen zijn — evenals op het Suezkanaal — en voorts in de onderstelling dat de snelheid van voortplanting van het getij over dit vak eveneens op grond der waarnemingen op het Suezkanaal met voldoende nauwkeurigheid bekend is ; de grootheden $I, I_1, B, B_1, \Delta y$ en Δy_1, voor het tijdstip t bekend zijn, zoo zal men dus ook nauwkeurig kunnen bepalen het verschil der snelheden, $(v_1—v)$ op 64 en 28 K.M. van den Atl. Oceaan, voor die tijden waarop $\frac{I-I_1}{I_1}$ een kleine grootheid is hetgeen het geval zal zijn nabij het oogenblik van laagwater.

Voor de verschillen der snelheden v_1 en v, gedurende het half uur voorafgaande aan het oogenblik van laagwater bij K.M. 64 in welk half uur aldaar de grootste stroomsnelheid zal voorkomen vindt men aannemende dat het getij op K.M. 28 van den Atlantischen Oceaan

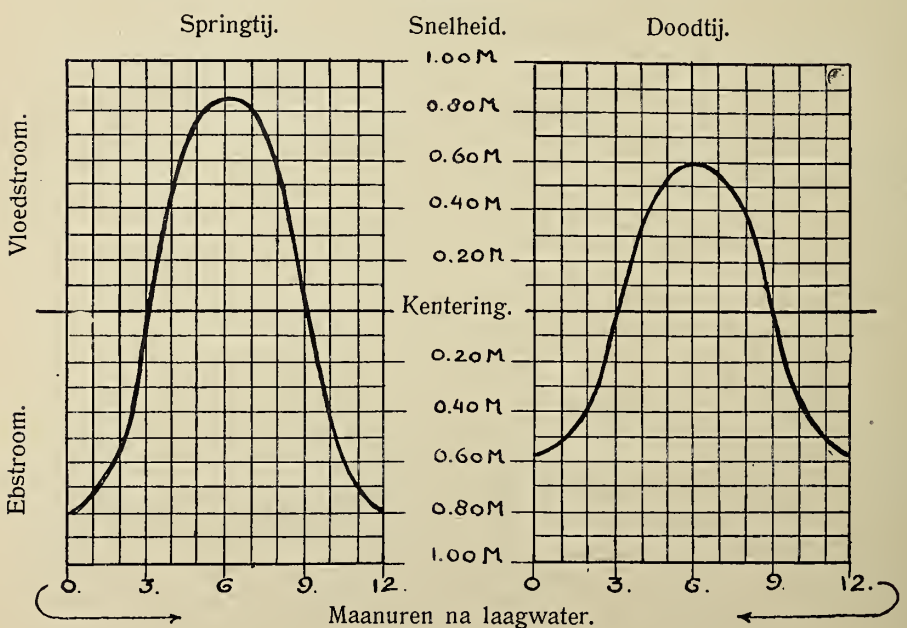
juist één uur achter zal zijn bij dat op K.M. 64; bij springtij het volgende:

op $^1/_2$ uur voor laagwater: $(v_1 - v) = 0.32$ M. $+ 0.02\, v$
„ laagwater: $(v_1 - v) = 0.12$ M. $+ 0.015\, v$.

Uit deze cijfers blijkt, dat gedurende het half uur vóór laagwater op K.M. 64 de *verschillen* der stroomsnelheden slechts in geringe mate afhankelijk zijn van de werkelijke grootte der stroomsnelheid v, zoodat die *verschillen* voldoende nauwkeurig bepaald kunnen worden indien de snelheid v slechts bij benadering bekend is.

Voor het Suezkanaal is de snelheidskromme voor een plaats nabij de Roode Zee volgens waarnemingen in het tijdvak 1871—1876 zoowel voor springtij als doodtij bekend en in de volgende figuren voorgesteld. [1])

Gemiddelde krommen der snelheden bij den ingang van het Suezkanaal.



Bovenstaande snelheidskrommen stellen vermoedelijk niet de gemiddelde snelheden maar de snelheden in het midden van het kanaal voor, zij zijn afgeleid uit metingen van uur tot uur verricht ten

[1]) Die krommen zijn overgenomen van eene Etude du régime de la Marée dans le canal du Suez par M. Bourdelles, in de Annales des Ponts et Chaussées van 1898 en afkomstig van eene Note sur le régime des eaux dans le canal maritime de Suez et à ses embouchures in 1884 door den hoofdingenieur der kanaalwerken Lemasson gepubliceerd.

deele met drijvers en ten deele met het molentje van WOLTMANN.

Er dient evenwel de aandacht op gevestigd te worden, dat bij die waarnemingen het Suezkanaal nog slechts eene diepte van 8 M. onder laagwater met een bodemsbreedte van 22 M. had. Het profil van het kanaal wordt echter vergroot tot eene bodemsbreedte van 45 M. en eene diepte van 10.5 M. onder laagwater. De snelheden zullen in het verruimde kanaal wellicht 20 procent grooter kunnen zijn dan in het kanaal gedurende het tijdvak 1871—1876. [1])

Substitueert men nu op grond hiervan in het tweede lid der formule voor v de waargenomen snelheden in het tijdvak 1871—1876 vermeerderd met 20 procent dan vindt men tenslotte:

$$\begin{aligned} {}^1/_2 \text{ uur vóór laagwater } (v_1 - v) &= 0.33 \text{ M.} \\ \text{bij } \quad ,, \quad\quad (v_1 - v) &= 0.13 \text{ M.} \end{aligned}$$

De verschillen 0.33 en 0.13 M. stellen voor de verschillen der gelijktijdig voorkomende snelheden en niet die der maximumsnelheden op 64 en 28 K.M. van den Atlantische Oceaan.

Op het oogenblik, dat bij K.M. 64 de snelheid haar maximumwaarde bereikt zal bij K.M. 28 waar het getij ongeveer een uur later plaats heeft de snelheid aldaar nog kleiner zijn dan de maximum snelheid daar ter plaatse. Volgens de waarnemingen op het Suezkanaal kan men aannemen dat op bovenbedoelde tijdstippen de stroomsnelheden op K. M. 28 ten minste ongeveer 0.15 M. en 0.05 M. kleiner zullen zijn dan de maximum snelheid aldaar. Men kan hieruit afleiden, dat de maximum stroomsnelheden op K.M. 64 en 28 uit den Atlantischen Oceaan minder dan 0.18 M, en vermoedelijk niet veel meer dan 0.08 M. zullen verschillen. Met genoegzame zekerheid kan men dus aannemen, dat de maximum stroomsnelheid bij K.M. 64 ongeveer 0.15 M. grooter kan zijn dan de maximum stroomsnelheid bij K.M. 28.

Dit verschil is zooals uit vorige opgaven blijkt, kleiner dan de vermeerdering der stroomsnelheid op het Suezkanaal door den invloed van den wind welke 0.30 tot 0.50 M. kan bedragen. Dat verschil kan dus stellig niet tot bezwaar aanleiding geven.

---

[1]) Bij het oorspronkelijke profil van 8 M. diepte onder laagwater, 22 M. bodemsbreedte, taluds van 2 op 1 was:

Inhoud $I = 304$ M²; natte omtrek $O = 57.9$ M., dus $R = 5.25$ M. Voor het toekomstige profil van 10.5 M. diepte, 45 M bodemslengte en taluds van $2^1/_2$ op 1, is: $I = 749$ M²., $O = 101.5$ M. dus $R = 7.37$ M. Nu is $\sqrt{\frac{7.37}{5.25}} = 1.20$.

§ 7. Voor een open Panamakanaal voorgesteld op Pl. I en uitgevoerd als volgt:

Van den Atlantischen Oceaan tot K. M. 64 met hetzelfde normaal dwarsprofil als van het ontwerp niveaukanaal.

Van K. M. 64 tot K. M. 68 zijnde de plaats waar het kanaal in verbinding met een meer wordt gebracht, geleidelijk verwijdende.

Van K. M. 68 tot de Stille Zuidzee bij K. M. 80 met eene bodemsbreedte van 400 à 500 voet.

kan dus ten opzichte van de stroomsnelheden bij springtij het volgende worden aangenomen.

Over de eerste 28 K. M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij nagenoeg gelijke stroomsnelheden voorkomen als gemiddeld in het Suezkanaal bij springtij en flauwe of matige koelte tusschen de Bittere meren en de Roode Zee, nadat dit kanaal verruimd is.

Over de volgende 36 K.M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij de maximum stroomsnelheden ongeveer 0.15 M. grooter zijn dan in het eerste gedeelte, doch niet grooter dan in het Suezkanaal bij springtij en frissche bries of harden wind.

Over de laatste 16 K. M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij de maximum snelheden nog iets grooter kunnen zijn, doch wegens de groote breedte welke aan dat vak gegeven kan worden geen bezwaar opleveren.

Aannemende dus, zooals op goede gronden kan worden gedaan, dat bij springtij en wind de stroomsnelheden op het Suezkanaal de scheepvaart niet hinderen, zoo volgt daaruit dat op een Panamakanaal als bovenbedoeld de scheepvaart evenmin bezwaar van de stroomsnelheden zal ondervinden.

De vraag of een open Panamakanaal zonder getijsluis de voorkeur verdient boven een niveau-kanaal met getijsluis, zooals door de meerderheid van den Board of Consulting Engineers was voorgesteld, of wel boven een kanaal op hoogpeil met drie sluizen, zooals thans wordt uitgevoerd, *buiten beschouwing latende* kan dus in hoofdzaak in overeenstemming met de conclusie der Fransche Academie van Wetenschappen van 1887, doch op andere gronden, worden aangenomen ;

dat de stroomsnelheden tengevolge van de getijbeweging in een open Panamakanaal zonder getijsluis voor de scheepvaart niet hinderlijk zullen zijn.

PL·I·

·PACIFIC·
AITILLO·
·PANAMA·
MA·
·OF·
S·TRES·HERMANAS·
80 K.M.
I PERICO·
78
I.FLAMENCO·
I. NAOS
I COLEBRA·
I.CHANGARNI·
·OCEAN·

§ 7. Voor een open Panamakanaal voorgesteld op Pl. I en uitgevoerd als volgt:

Van den Atlantischen Oceaan tot K. M. 64 met hetzelfde normaal dwarsprofil als van het ontwerp niveaukanaal.

Van K. M. 64 tot K. M. 68 zijnde de plaats waar het kanaal in verbinding met een meer wordt gebracht, geleidelijk verwijdende.

Van K. M. 68 tot de Stille Zuidzee bij K. M. 80 met eene bodemsbreedte van 400 à 500 voet.

kan dus ten opzichte van de stroomsnelheden bij springtij het volgende worden aangenomen.

Over de eerste 28 K. M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij nagenoeg gelijke stroomsnelheden voorkomen als gemiddeld in het Suezkanaal bij springtij en flauwe of matige koelte tusschen de Bittere meren en de Roode Zee, nadat dit kanaal verruimd is.

Over de volgende 36 K.M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij de maximum stroomsnelheden ongeveer 0.15 M. grooter zijn dan in het eerste gedeelte, doch niet grooter dan in het Suezkanaal bij springtij en frissche bries of harden wind.

Over de laatste 16 K. M. van zulk een open kanaal zullen bij springtij de maximum snelheden nog iets grooter kunnen zijn, doch wegens de groote breedte welke aan dat vak gegeven kan worden geen bezwaar opleveren.

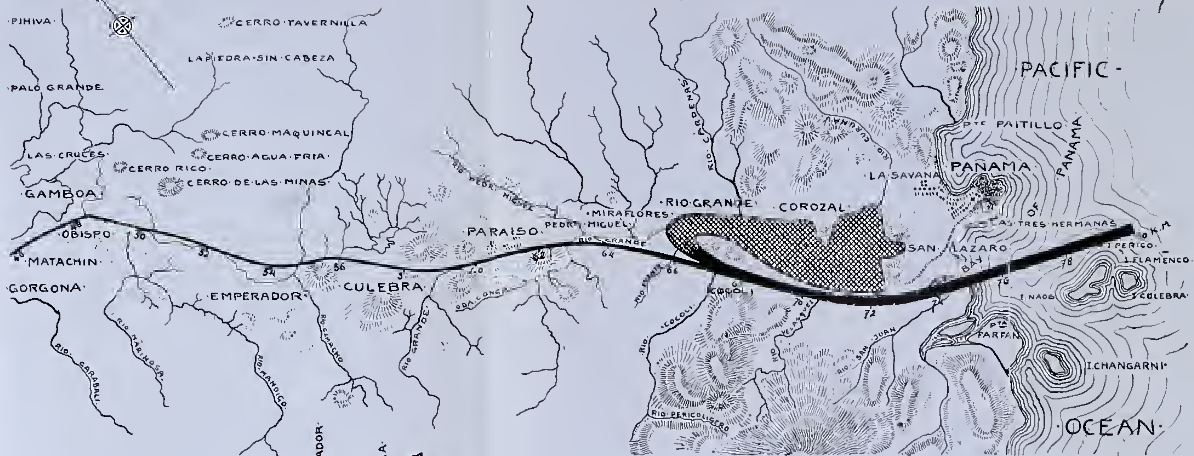
Aannemende dus, zooals op goede gronden kan worden gedaan, dat bij springtij en wind de stroomsnelheden op het Suezkanaal de scheepvaart niet hinderen, zoo volgt daaruit dat op een Panamakanaal als bovenbedoeld de scheepvaart evenmin bezwaar van de stroomsnelheden zal ondervinden.

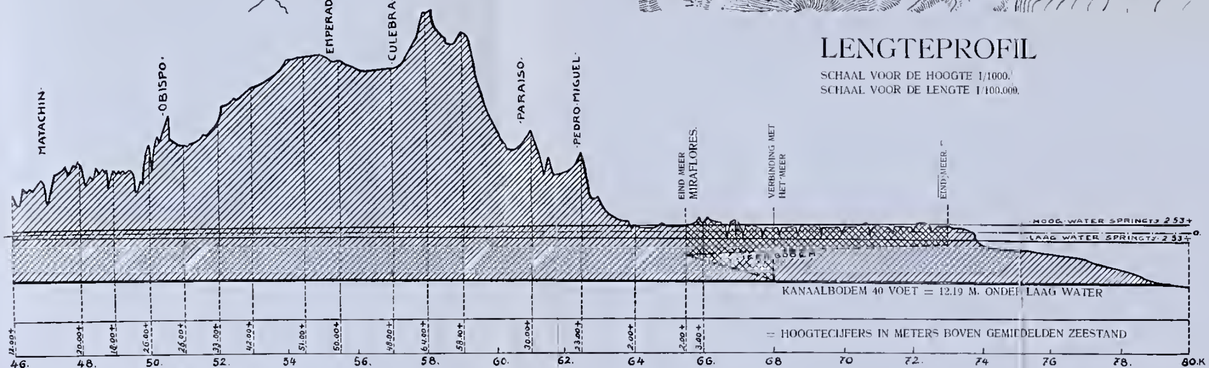
De vraag of een open Panamakanaal zonder getijsluis de voorkeur verdient boven een niveau-kanaal met getijsluis, zooals door de meerderheid van den Board of Consulting Engineers was voorgesteld, of wel boven een kanaal op hoogpeil met drie sluizen, zooals thans wordt uitgevoerd, *buiten beschouwing latende* kan dus in hoofdzaak in overeenstemming met de conclusie der Fransche Academie van Wetenschappen van 1887, doch op andere gronden, worden aangenomen ;

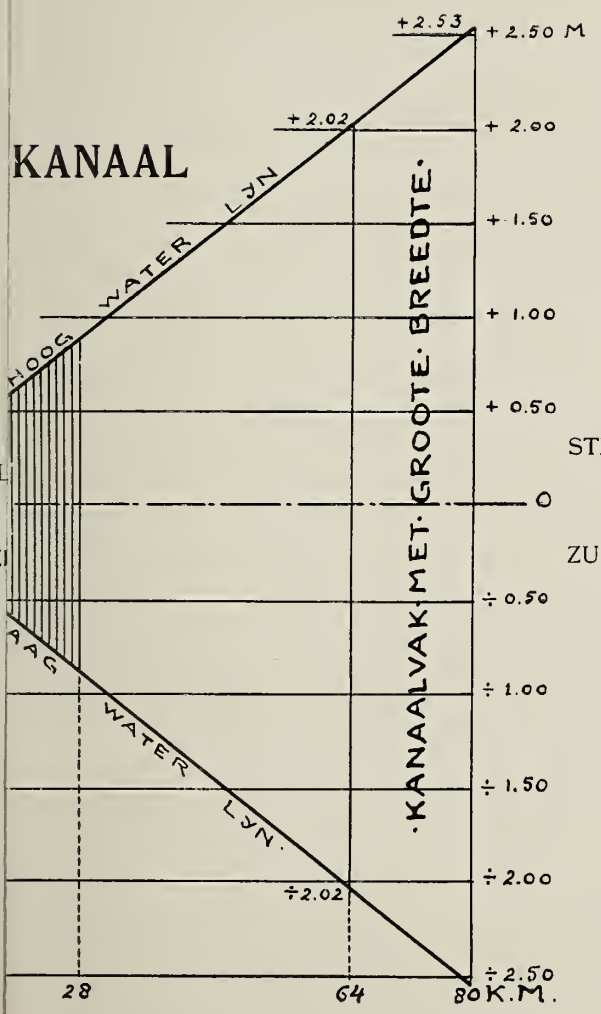
dat de stroomsnelheden tengevolge van de getijbeweging in een open Panamakanaal zonder getijsluis voor de scheepvaart niet hinderlijk zullen zijn.

·SITUATIE·

·SCHAAL· 1/100.000

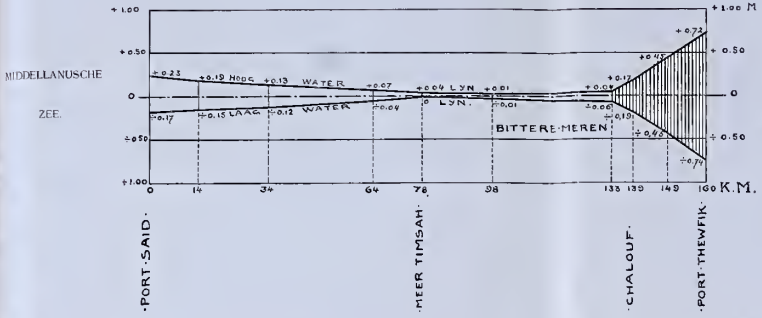




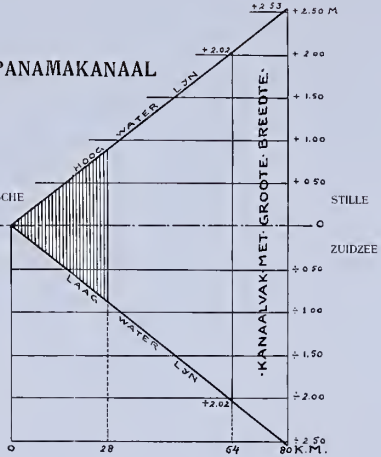

KANAAL
HOOG WATER LYN
AAG WATER LYN.
·KANAALVAK·MET·GROOTE·BREEDTE·
+2.53
+2.50 M
+2.02
+2.00
+1.50
+1.00
+0.50
STILLE
0
ZUIDZEE
÷0.50
÷1.00
÷1.50
÷2.00
÷2.02
÷2.50
28
64
80 K.M.

HOOG- EN LAAGWATERLIJNEN
BIJ
SPRINGTIJ.

SUEZKANAAL
(1871—1876)



PANAMAKANAAL



ROODE ZEE — GEMIDDELDE ZEESTAND — ATLANTISCHE OCEAAN — STILLE ZUIDZEE

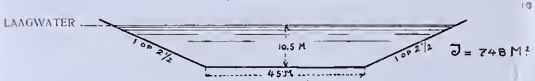
DE GEARCEERDE VAKKEN HEBBEN BETREKKING OP DIE GEDEELTEN VAN BEIDE KANALEN WAARIN DE STROOMSNELHEDEN WEINIG ZULLEN VERSCHILLEN.

PROFILLEN

SUEZKANAAL

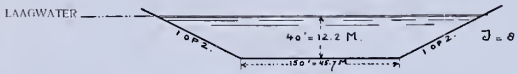
A. BIJ AANLEG.

B. IN UITVOERING.



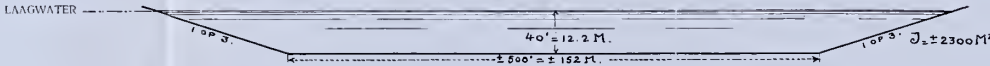
PANAMAKANAAL

A. IN LAAG TERREIN.



B. IN CULEBRA.

C. GEDEELTE MET GROOTE BREEDTE BIJ DE STILLE ZUIDZEE.



SCHAAL VOOR DE PROFILLEN 1/1000.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT biedt eene mededeeling aan, getiteld : *„Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de placenta van de vliegende maki (Galeopithecus).”*

In de vergadering van 26 November 1898 mocht ik eene mededeeling doen „over bloedvorming in de placenta van Tarsius en andere zoogdieren”, die later aangevuld werd door eene meer uitvoerige en van talrijke afbeeldingen voorziene verhandeling (Ueber die Entwickelung der Placenta von Tarsius und Tupaja, nebst Bemerkungen über deren Bedeuting als hämatopoietische Organe ; Report 4th Intern. Congress of Zoology, Cambridge 1898). De door mij waargenomen feiten en de daaraan door mij vastgeknoopte interpretatie heeft tot heden meer bestrijding dan bijval gevonden en niet lang geleden verscheen een zeer uitvoerige bespreking van den stand van het vraagstuk omtrent het ontstaan der roode bloedlichaampjes in het 14e deel van de „Ergebnisse der Anatomie und Entwickelungsgeschichte” (Wiesbaden 1905) van de hand van F. WEIDENREICH, waarin hij, van mijne opvattingen melding makende, meent te mogen beweren, dat door mij phagocytaire processen met haematopoietische verwisseld zijn geworden.

Op mijn vraag of deze gevolgtrekking op een hernieuwd en critisch onderzoek van het door mij bestudeerde materiaal berustte ontving ik een ontkennend antwoord ; hetgeen mij te meer bevreemde, omdat ik bij herhaling duidelijk heb doen uitkomen dat de talrijke in Utrecht aanwezige preparaten over deze bloedvorming voor vergelijkende en critische bewerking — ook van hen die andere meening zijn toegedaan — steeds beschikbaar zijn. Trouwens uit de literatuuropgaaf bij het opstel van Weidenreich mag worden afgeleid dat het meer uitvoerige en met afbeeldingen voorziene artikel hierboven geciteerd hem onbekend gebleven is.

Een en ander zou mij geen aanleiding gegeven hebben hier nogmaals op hetzelfde onderwerp terug te komen, ware het niet dat ik in de laatste maanden de placentatie-verschijnselen van een geheel ander zoogdier, dat op die verschijnselen nog nooit onderzocht is, heb leeren kennen en wel van Galeopithecus volans, die, evenals Tarsius, Nycticebus, Tupaja en Manis door mij in Indie in 1890—'91 voor embryologische doeleinden op zoo uitgebreid mogelijke schaal verzameld werd. Tijdens den eersten aanleg van de placenta van dit zeldzame en in vele opzichten primitieve zoogdier [1]) doen zich

[1]) W. LECHE is geneigd (Ueber die Säugethiergattung Galeopithecus. Svenska Akad. Handl. Bd. 21, N°. 11. 1886) in Galeopithecus een vorm te zien die in de nabijheid van den stamvorm der vledermuizen een plaats behoort te vinden.

verschijnselen voor, die het proces der bloedvorming in die placenta op zoo ongemeen heldere wijze zichtbaar maken, dat in dit geval de evidentie moeilijk te loochenen zal zijn.

Men zou mogen zeggen dat bij Galeopithecus de bloedvorming in de placenta volgens een veel eenvoudiger schema geschiedt, dan bij Tarsius, zij het ook dat de hoofdlijnen dezelfde blijven en dus ook hier de kernlooze haemoglobine-voerende bloedlichaampjes niet als gewijzigde cellen, maar als kernderivaten moeten worden opgevat. Evenzoo getuigt de Galeopithecus-placenta er van dat niet alleen de moederlijke mucosa, maar ook het embryonale trophoblast aan de bloedvorming deelnemen, terwijl de aldus gevormde bloedlichaampjes — ook voor zoover zij door embryonaal weefsel geleverd worden — uitsluitend in de moederlijke bloedbanen circuleeren.

Eenvoudiger is het proces bij Galeopithecus vooral in dit opzicht, dat hier geen megalokaryocyten bij de bloedvorming een rol spelen, waardoor het minder gemakkelijk valt om — zooals Weidenreich dit gedaan heeft — bloedlichaampjes, die bij het uiteenvallen der groote gelobde kernen dezer megalokaryocyten vrij komen, te beschouwen als werden zij op dat oogenblik langs phagocytischen weg verslonden![1])

De haematopoiese wordt bij Galeopithecus op de volgende wijze ingeleid. Ongeveer terzelfder tijd dat de jeugdige kiemblaas, die juist het tweebladige gastrulatie-stadium (gastrulatie door delaminatie[2])) doorloopen heeft, zich tegen de oppervlakte van het sterk geplooide en gezwollen moederlijke slijmvlies heeft vastgezet, reageert dat slijmvlies op de ook bij andere zoogdieren (Tarsius, ezel, konijn, vleermuis, enz.) bekende wijze, door merkbare veranderingen van de uterus-klieren in de nabijheid van deze aanhechtingsplaats en door de vorming van zoogenaamd trophospongia-weefsel, dat uit eene modificatie bestaat van het interglandulaire bindweefsel, nog versterkt door proliferaties van uterus- en klier-epithelium.

Als eindproduct van deze voorbereidende verschijnselen zien wij nu een deel van de moederlijke mucosa vóór ons, waarin het gedeelte van de kiemblaas dat met de mucosa verkleefd is eene meer compacte proliferatie voorstelt, terwijl meer peripherisch de uterusklieren door sterke verwijding van het lumen duidelijk van de verdere uterusklieren verschillen, zooals dit evenzoo bij Tarsius, Lepus, e. a. zoogdieren tijdens de vroege zwangerschap het geval is. De verwijde klieren kunnen tot aan haar mond vervolgd worden: die mond stelt

[1]) Later vervaardigde doorsneden-reeksen van Tarsius geven nog klaarder beelden dan die welke gediend hebben voor mijne figuren van 1898.

[2]) Zie hierover Anatomischer Anzeiger Bd. 26. p. 353.

het klierlumen echter niet langer met het uteruslumen in verbinding, omdat te dezer plaatse het embryonale trophoblast den samenhang verbroken heeft en de kliermonden bedekt.

Dat trophoblast vertoont ook onmiskenbare teekenen van celwoekering, hoewel het niet, zooals bij egel, Tarsius, Tupaja e. a. het moederlijk epithelium dadelijk aantast en verwoest, maar eerder gezegd kan worden dit moederlijk epithelium in volle woekering tegenover zich te vinden, zooals zulks ook voor Sorex [1]) door mij geconstateerd is. In plaats van echter vlak tegen elkaar aan te sluiten, blijven van den aanvang af ruimten tusschen trophoblast en trophospongia uitgespaard, die deels in onderling verband staan, deels door trophoblast-vlokken, die zich tegen het trophospongiaweefsel vasthechten, in kleinere afdeelingen worden onderverdeeld. Aldus verkrijgt de vrije, naar het embryo gekeerde binnenvlakte van het trophoblast een gecapitonneerd aanzicht [2]).

Reeds in vroege ontwikkelingsstadia, wanneer er van de afplooiing van het embryo nog geen sprake, is en lang voordat bloedvoerende allantoisvlokken zich ter nadere voltooiing der placenta tegen deze trophoblastvlokken hebben aangelegd, treffen wij in de hier bedoelde ruimten tusschen trophoblast en trophospongia rijkelijk bloedlichaampjes aan, waarvan de herkomst niet uitsluitend uit de moederlijke vaten mag vastgesteld worden, al lijdt het geen twijfel, dat een samenhang van deze ruimten met het moederlijk vaatstelsel vroeg tot stand komt. Immers ook met de *ad hoc* verwijde uterusklieren staan deze ruimten op de boven aangeduide wijze in verband. En in deze klieren zoowel als in het interglandulaire weefsel en in de cellige begrenzing van de hierbedoelde ruimten vinden verschijnselen plaats die ons nopen tot de gevolgtrekking, *dat een groot aantal van deze bloedlichaampjes in loco ontstaan.*

Vervolgen wij die verschijnselen tot aan hun vroegste optreden, zoo vinden wij dat in de verwijde klieren op vele punten compacte celhoopen optreden, die soms geheel los in de klier liggen, maar in andere gevallen nog in directen samenhang met de celbekleeding van de klier worden aangetroffen. Wij moeten aannemen dat dit laatste den oorspronkelijken toestand voorstelt en dat wij hier dus te doen hebben met eene epitheliale woekering, waardoor nieuw celmateriaal in het gebied van de toekomstige placenta wordt aangevoerd.

---

[1]) Quarterly Journal of Micr. Science vol. 35.

[2]) Zekere wijzigingen, die ik waarnam wanneer de kiemblaas zich ontwikkelt in een uterus die nog in het puerperale stadium verkeert, kunnen hier buiten sprake blijven.

Het eindproduct van deze, in vroege stadiën zich als zoo duidelijke celhoopen voordoende weefselklompen, is eene agglomeratie van aanvankelijk nog samenhangende kernlooze bloedlichaampjes. De geleidelijke overgang van de kernhoudende cellen in de bloedschijfjes kan stap voor stap vervolgd worden, wanneer men achtereenvolgens praeparaten van de jongste en van de daaropvolgende stadiën vergelijkt: dikwijls vindt men in hetzelfde praeparaat alle overgangen bijeen. Het blijkt daarbij, dat mijne gevolgtrekkingen voor Tarsius en Tupaja in 1898 gemaakt ook hier bevestiging vinden, dat n.l. door gradueele omzettingen uit de zich wijzigende kernen der hierboven bedoelde celhoopen, de bloedschijfjes te voorschijn komen en dat daarbij veelal overgangstoestanden optreden, die vergelijkbaar zijn met wat ik in de bovenaangehaalde verhandeling „haematogoniën" genoemd heb. Zij gelijken op polynucleaire leucocyten, waarvan zij echter ook volgens Maximow en Siegenbeek van Heukelom (zie zittingsverslag van de vergadering van 26 November 1898) door zekere kenmerken te onderscheiden zijn. Meer in het bijzonder is dit verschijnsel nagegaan door Poljakoff, die eveneens de kernlooze zoogdierbloedlichaampjes als kernderivaten, niet als kernloos geworden cellen, opvat, en in wiens verhandeling [1]) talrijke afbeeldingen gegeven worden van stadiën, overeenkomende met wat door mij als haematogoniën werd aangeduid. Poljakoff schijnt — blijkens zijn literatuuropgave — mijne aan zijne publicatie voorafgaande verhandeling van 1898 niet gekend te hebben: de overeenkomstige resultaten waartoe wij reeds vroeger gekomen zijn, worden door de verschijnselen bij Galeopithecus op treffende wijze bevestigd.

Maar ook nog uit andere bronnen dan deze epitheliale klierproliferaties ontstaan bloedlichaampjes. Tusschen de verwijde klieren vindt men bij Galeopithecus in het trophospongia-weefsel zeer in het oogvallende groepen van groote cellen met groote, doch cirkelronde kern. Zij vertoonen eene neiging om te samen in nesten bijeen te liggen, welke nesten dan door gerekte cellen (die een schijnwand vormen welke in de verte aan een endothelium zou kunnen doen denken) min of meer worden bijeen gehouden.

Ook deze cellen worden gaandeweg in bloedlichaampjes opgelost: naarmate de uterus in omvang toeneemt en de trophospongia hare opeenvolgende ontwikkelingstadiën doorloopt, verdwijnen zij: de bloedlichaampjes die aan hen hun ontstaan danken, vallen in de bovengenoemde ruimten, van waar zij in de verdere circulatie worden opgenomen. De tusschenstadia welke wij bij deze wijze van bloed-

[1]) Biologie der Zelle. In Arch. f. Anat. u. Phys. Abth. 1901. Pl. I en II.

vorming waarnemen, komen neer op kernvermeerdering langs amitotischen weg, zooals ook daar POLJAKOFF beschreven werd en daarna gradueele vorming uit dezen kerninhoud van kernlooze bloedschijfjes.

Bij de twee tot nu toe behandelde wijzen van bloedvorming in de Galeopithecus-placenta voegt zich nu nog een derde, die echter niet als de beide voorgaande op rekening van de moeder, maar die nu op rekening van het embryonale trophoblast komt. Van dit trophoblast hebben wij reeds hierboven beschreven hoe het de holten, waarin de nieuwgevormde bloedlichaampjes worden uitgestort, naar beneden afsluit en dermate met de moederlijke trophospongia versmelt dat het voor vele cellen die hier eng aaneensluiten onmogelijk is om uit te maken of zij van de moeder dan wel van de kiemblaas afkomstig zijn.

Toch is het, waar het den wand der holten geldt, die naar de zijde van het uterus-lichaam gekeerd is, aan geen twijfel onderhevig of wij hebben hier uisluitend met trophoblastweefsel te doen. Omtrent de actieve woekering van dit trophoblastweefsel kan geen twijfel bestaan : ook niet omtrent de vraag of de van dit trophoblast in de holten veelvuldig uitpuilende gedeelten aan de haematopoiese deelnemen. Het is nl. zoodra men deze gedeelten met sterke vergrooting onderzoekt volkomen duidelijk dat hier de kernen van trophoblastcellen soortgelijke wijzigingen ondergaan als hierboven beschreven werden en dat het eindproduct van deze modificaties wederom roode kernlooze bloedlichaampjes zijn, die zich bij de reeds aanwezige, van de moeder afkomstige voegen en die, evenals ik dit voor tien jaren bij Tarsius en Tupaja waarnam, *in de moederlijke circulatie worden vrijgelaten en medegevoerd.*

Over de theoretische beteekenis van het feit dat de kiemblaas actief medewerkt om het aantal transport-eenheden voor zuurstof die in het moederlijk bloed aanwezig zijn zeer belangrijk te vermeerderen wil ik hier niet verder uitweiden.

En voor de histologische details van de vorming der bloedplaatjes, resp. kernlooze bloedlichaampjes uit een aanvankelijk normale celkern verwijs ik naar de gekleurde figuren op pl. I en II van POLJAKOFF's opstel in jaargang 1901 van 't *Arch. f. Anat. u. Phys.* (*Anat. Abth.*). Met zijn beelden kan ik al hetgeen ik bij Galeopithecus heb waargenomen identificeeren. Terwijl in zeer enkele gevallen de mogelijkheid niet geheel uitgesloten schijnt dat het bloedlichaampje aan eene omzetting van de kern *in haar geheel* zijn ontstaan dankt, is in verreweg de meeste gevallen een duidelijk amitotisch uiteenvallen waarneembaar in stukken waarvan het aantal wisselend is, maar meestal tusschen drie en vijf ligt. Naarmate de

reeds gewijzigde kern in deze stukken wordt opgelost en daardoor de vergelijkbaarheid met polynucleaire leucocyten meer tastbaar schijnt, gaat de kleur veelal gaandeweg meer gelijken op die welke de bloedlichaampjes zelve in het kunstmatig gefixeerde praeparaat aannemen. Soortgelijks werd ook door mij in 1898 voor Tarsius geconstateerd en afgebeeld.

Ten slotte wil ik er op wijzen, dat, waar mijne resultaten en die van Poljakoff in zoovele punten aaneensluiten ook Retterer in jaarg. 1901 van het *Journal de l'Anatomie et de la Physiologie* (Structure, développement et fonction des ganglions lymphatiques, p. 700) soortgelijke uitkomsten verkregen heeft en geneigd is een nog enger genetisch verband tusschen polynucleaire leucocyten en haematogoniën aan te nemen, waar hij verklaart dat de uit de lymphklieren vrijgeworden leucocyten „finissent par se convertir, dans la lymphe ou le sang en hématies, grâce à la transformation hémoglobique de leur noyau . . .

Zoo vormen dus de waarnemingen door mij aan Galeopithecus verricht een nieuwen schakel in den keten, die aanvangt bij Heinrich Mueller in 1845 (*Zeitschrift für rationelle Medizin* vol. 3. p. 260), dan door Wharton Jones (*Phil. Trans.* 1846, p. 65 en 71) en Huxley (*Lessons in Elementary Physiology*, 1866, p. 63) verder gesmeed en gedragen werd, om, sedert in 1898 ook Tarsius daaraan een schakel heeft toegevoegd, met toenemend gewicht de vraag naar den oorsprong der kernlooze bloedlichaampjes van de zoogdieren vast te verbinden aan de voorstelling dat deze elementen in het zoogdierlichaam niet gelijkwaardig zijn met cellen, maar als kernderivaten moeten worden opgevat.

Geologie. — De Heer Wichmann biedt eene mededeeling aan van den Heer L. Rutten, *„Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en België."*

(Mede aangeboden door den Heer Max Weber).

Verleden zomer vond een visscher tegenover Breskens in de Westerschelde eenen grooten schedel, die door toedoen van Dr. S. Schouten in het bezit kwam van het Geologisch Instituut der Universiteit te Utrecht.

Het fragment behoort aan een ouden Trichechus toe, doch verschilt in sommige opzichten van den tegenwoordig levenden Walrus. Bij nadere bestudeering bleek, dat het de schedel van den tertiairen Trichechus Huxleyi moest zijn, waarvan tot nu toe alleen de slagtanden bekend waren, die in den „Red Crag" van Suffolk gevonden zijn.

Deze heeft Ray Lankester beschreven. Van den schedel moge de beschrijving hier volgen.

Het ligt voor de hand, om eerst het fragment te vergelijken met den recenten Walrus en daarna met de reeds bekende, fossiele Trichechiden.

1. *Beschrijving van den Schedel en vergelijking met den Walrus.*

De merkwaardig goede conservatie is wel het opvallendste aan den schedel. Hij heeft dit gemeen met sommige resten van diluviale landzoogdieren, die eveneens in de Schelde gevonden zijn. Wel kwam de schedel in verschillende stukken hier aan, maar de breukvlakken waren absoluut versch en alle deelen passen volkomen op elkander. Waarschijnlijk brak dus het fossiel eerst toen het opgevischt werd. Aan volledigheid laat de schedel niets te wenschen over, daar alleen stukken van nasale, maxillare en frontale, een deel van het vomer, de conchae en enkele tanden ontbreken. De schedel was opgevuld met een fijnkorrelige grijze klei; de buitenwand van het cranium was begroeid met Balaniden en Bryozoën. Ofschoon het fossiel zeer zwaar is, bracht eene chemische analyse van een stukje been niets bijzonders aan het licht. Het bevat n.l. nog vrij veel organische stof en bestaat overigens vooral uit CaO en P_2O_5, terwijl eene geringe hoeveelheid ijzerhydroxyde het been donkerbruin kleurt.

Dat onze Trichechus volwassen is, wordt bewezen door de afwezigheid van alle naden en door de sterke ontwikkeling van alle kammen.

Als vergelijkingsmateriaal waren 24 recente schedels en 26 paren slagtanden beschikbaar. Zeer onaangenaam was de groote variabiliteit der nu levende Walrussen. Daardoor toch verandert een bepaald kenmerk zoo sterk bij de verschillende individuen, dat men bij het beperkte materiaal bijna steeds in onzekerheid blijft, of het analoge kenmerk bij het fossiel binnen of buiten de variatiebreedte voor de recente dieren ligt. Het zal blijken, dat in de meeste opzichten het fragment tot de oude Walrussen nadert, maar dat de slagtanden aanmerkelijk van die der levende dieren afwijken.

Beschouwt men den achterkant van den fossielen schedel, dan valt dadelijk zijne betrekkelijk groote hoogte op. Zij wordt veroorzaakt door de sterke ontwikkeling van den processus mastoïdeus en door een hoogen kam op de lambda-naad (crista lambdoïdea).

Deelt men de schedelhoogte en de hoogte van den processus mastoïdeus door de schedelbreedte, dan krijgt men twee quotiënten, die bij het fossiel grooter zijn dan bij den Walrus. Hierbij werd de hoogte van den processus mastoïdeus gemeten door den verticalen afstand tusschen den onderkant van het foramen magnum en de

basis van het mastoïduitsteeksel. De gevonden verschillen zijn echter gering: voor dit kenmerk staat dus 't fossiel op het einde der variatierij van den Walrus. Het sterke relief op den processus mastoïdeus en de buitengewone grootte der crista occipitalis externa evenals der crista lambdoïdea zijn kenmerken, die de fossiele schedel met sommige oude Walrussen gemeen heeft.

Kleine veranderingen vindt men ook in de omgeving van het foramen magnum. De canalis hypoglossi mondt bij den Walrus beiderzijds steeds met twee openingen aan den binnenkant van de condyli in het cranium, terwijl het fossiel slechts eene enkele, kleine opening vertoont. Dit kenmerk heeft echter wel geen groote waarde, daar toch de monding van den canalis hypoglossi steeds sterk varieert. Het foramen magnum is bij het fossiel veel meer dorsiventraal afgeplat dan bij den Walrus, doch ook dit is een zeer veranderlijk kenmerk. Men krijgt hier weer vergelijkbare getallen, als de breedte van het foramen magnum door zijne hoogte gedeeld wordt. De condyli occipitalis zijn bij het fossiel minder sterk dan normaal en vertoonen samen eene spoelvormige gedaante, terwijl ze bij den walrus zich naar boven toe steeds meer naar buiten uitstrekken; ook steken ze hier boven den bovenrand van het foramen magnum uit, waar ze ginds onder diens bovenrand blijven.

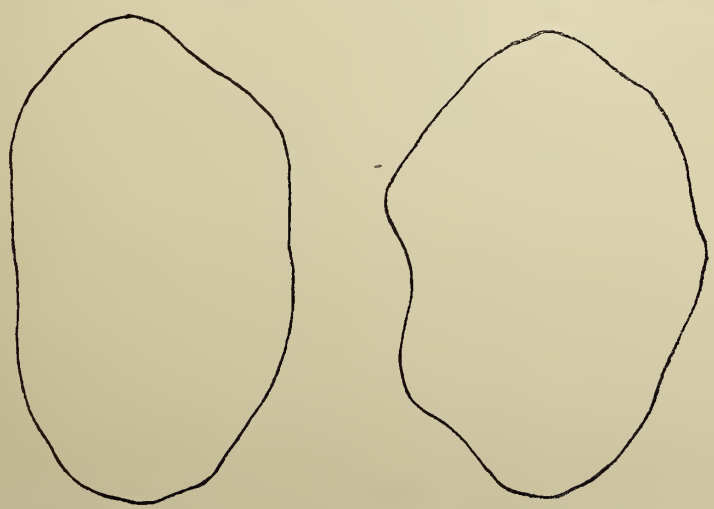
Van al deze kleine verschillen hebben wel de vorm der condyli en van het foramen magnum de grootste beteekenis, terwijl de hoogteverhoudingen en de monding van den canalis hypoglossi van geringere waarde zijn.

De schedelbasis vertoont niet meer verschillen met den Walrus dan de achterkant. De lengte van beide schedels, vergeleken met hunne breedte, komt geheel overeen. Het eerste verschil betreft de ligging van het foramen lacerum en van den canalis alisphenoïdeus. Deze toch liggen bij den Walrus dicht achter elkaar, terwijl ze bij 't fossiel gescheiden zijn door eene vrij massieve beenlamel, die zich van het os petrosum uit naar den processus pterygoïdeus uitstrekt. Ook is de gewrichtskom voor de onderkaak zeer breed, en dit heeft weer ten gevolge, dat de processus pterygoïdei kort bij elkaar gekomen zijn. Verdere veranderingen treden op aan den voorkant der schedelbasis door de grootte der slagtand-alveolen. De alveolenbuitenwand vertoont een zijdelingsch uitsteeksel, evenals bij den Walrus, en alleen iets massiever; de afstand tusschen de beide uitsteeksels is daardoor ook iets grooter dan bij den Walrus. We deelen weer dezen afstand door de schedelbreedte: het fossiel ligt op het einde der variatierij van den Walrus. De grootte der slagtandalveolen veroorzaakt echter nog een ander verschil. Hierdoor worden n.l. de tandrijen op elkaar

gedrongen, zoodat de afstand der beide incisivi, vergeleken met de schedelbreedte, uiterst klein is. Dit komt echter ook bij enkele oude Walrussen voor. Verder is de onderkant der bovenkaak verschillend van vorm: bij den Walrus is zij breed en uitgehold, bij 't fossiel smal en vlak.

De zijvlakte van den schedel vertoont in één opzicht een groot verschil met den Walrus, n.l. in den vorm der slagtanden. In alle vorige eigenschappen naderde het fossiel tot de oude Walrussen en als 't ook in de slagtanden weinig van hen was afgeweken, zou de reden voor eene afscheiding al zeer bedenkelijk geweest zijn. Dit is echter niet het geval. De kromming der slagtanden is bij 't fossiel veel sterker dan bij den Walrus. Bepalen we den kromtestraal van alle slagtanden, dan is deze bij het fossiel 27 cm., bij den Walrus nooit minder dan 33 cm. Daarbij is echter te bedenken, dat zulke kleine kromtestralen alleen bij jonge, vrouwelijke Walrussen met betrekkelijk zwakke tanden voorkomen. Bij de oude dieren echter, waarmee we toch onzen schedel moeten vergelijken lag de kromtestraal nooit onder 45 cm. en was meest grooter dan 50 cm. Terwijl dus in de vorige eigenschappen het fossiel op de oude Walrussen gelijkt, verwijdert het zich in den vorm der slagtanden zeer ver van hen. Ook zijn de slagtanden slanker en de rechter tand vertoont diepe overlangsche groeven.

Uit de slagtanden kunnen we ook nog een besluit trekken over den ouderdom van het dier. Bij de jonge individuen is de pulpaholte zeer diep; ze wordt bij toenemenden leeftijd langzaam opgevuld met osteodentine. Bij het fossiel nu had de pulpaholte nog maar een



Dwarse doorsnede door de slagtandbasis van Trichechus Huxleyi.
Gevonden bij Breskens in de Westerschelde.

diepte van $3^1/_2$ cm. Ook is de dikte der slagtanden in het midden grooter dan aan de basis, wat er op wijst, dat de periode van den sterksten tandgroei voorbij is.

Evenzoo wijst de belangrijke afslijting der tanden op een ouder individu.

Vatten we nu de resultaten der vergelijking van 't fossiel met den Walrus samen:

De fossiele schedel behoort aan een walrusachtig dier toe, wiens schedel zich in het algemeen door krachtige ontwikkeling van de recente dieren slechts weinig onderscheidt, maar die zich door den vorm der slagtanden geheel van hen verwijdert.

Vergelijkend anatomisch is de waarde van het fragment helaas nihil, want het vertoont vele Trichechus-eigenschappen, zoo de sterke crista occipitalis externa, den grooten processus mastoïdeus en de massieve bulla ossea nòg typischer dan de recente dieren.

2. *Vergelijking van den schedel met de reeds bekende, fossiele Trichechiden.*

Fossiele schedelresten van Trichechiden zijn uit Noord-Amerika, Engeland en België bekend. Ook zijn schedels van Trichechus rosmarus beschreven uit den ondergrond van Parijs (17), Hamburg (10) en Keulen (25), maar het is gebleken, dat deze door menschen daarheen gebracht zijn. De Noord-Amerikaansche vondsten schijnen tot het pleistoceen en mioceen te behooren (21). De tertiaire schedel wijkt in het aantal der kiezen van Trichechus rosmarus af (8); de pleistocene resten zijn identiek met Trichechus rosmarus, hoewel De Kay voor een schedelfragment van Accomac County in Virginia de fossiele soort Trichechus Virginianus heeft opgesteld.

De Engelsche fossielen zijn het eerst in den „Red Crag" van Suffolk gevonden, waar ze zich echter op „secundärer Lagerstätte" bevinden; waarschijnlijk behooren ze tot het oudere plioceen (19). Later zijn ze ook aangetroffen in de „Cromer Forest Beds" (32). Het zijn alleen slagtanden, die zich door sterke kromming, geringere dikte en diepere overlangsche groeven van de slagtanden der walrussen onderscheiden. Ook meent Ray Lankester, dat ze in 't algemeen grooter zijn dan die van den Walrus, hoewel de maximale grootte van beide dezelfde is. Deze slagtanden vertoonen dus eene zeer goede overeenkomst met die van het Zeeuwsche fossiel.

De belgische Trichechiden, welke in den „Crag" van Antwerpen voorkomen, zijn door P. J. van Beneden beschreven in een werk, dat er prachtig uitziet (26). Jammer maar, dat de inhoud daar zoo weinig mee harmonieert, daar aan eene bedenkelijke phantasie meer

plaats is gegeven dan aan eene nauwkeurige beschrijving en aan eene zorgvuldige kritiek. Bij het graven der fortificatiën om Antwerpen kwamen op geheel verschillende plaatsen en tijden fossiele resten van Pinnepedia voor den dag, die VAN BENEDEN nu op de volgende manier bewerkte:

„Voici, comment nous avons procédé: Après avoir réunie tous les os de phoque, ... nous avons réuni tous les os de même nature c'est à dire, les humérus, les fémurs etc..... Après cette première opération nous avons reparti les os longs après leur taille, ayant devant nous les mêmes os des espèces vivantes. Si l'on considère, que la plupart des pièces se répète plusieures fois, il n'est pas difficile, ... d'établir parmi eux des groupes génériques et spécifiques. Quand cette opération est faite pour les os comme les humérus et les fémurs, ... on leur rapporte les autres os, en se guidant d'abord d'aprés leur dimension ..... Nous avons alors étalé les humérus, les fémurs, les vertèbres etc. des diverses espéces européennes et nous nous sommes assuré, de quelles espéces vivantes nos phoques fossiles se rapprochent le plus. En répétant la même opération pour les autres os, nous sommes arrivé ainsi à composer nos espèces et à en établir un certain nombre avec une certitude entière."

Wanneer dus VAN BENEDEN door één beenstuk een nieuwe soort had opgesteld, bracht hij er verder nog bij, wat in de grootte het best erbij paste, eene methode, waarvoor theoretisch wel iets te zeggen valt, maar die bij het zeer onvolledige Antwerpsche materiaal op zooveel practische bezwaren stuit, dat men de determinaties van VAN BENEDEN a priori wel min of meer wantrouwend moet opnemen. In elk geval mag alleen het eerste beenstuk, waarop een soort gegrond werd, als definitief gedetermineerd worden aangezien; alle andere er toe gebrachte beenderen moeten kritisch herzien worden.

V. BENEDEN beschrijft drie species van Trichechiden, die hij ook tot drie genera brengt. Van deze wordt Trichechus rosmarus voor diluviaal gehouden; de beide andere Trichecodon Koninckii en Alachtherium Cretsii zijn tertiair.

Van den gewonen Walrus worden alleen een scaphoid en een onvolledige wervel beschreven: „qui ont été quelque temps confondues .... avec les animaux quaternaires terrestres. On les avait placé à côté de Rhinocéros"!

Het genus Trichecodon werd gebaseerd op een klein fragment van een slagtand, dat nu zelfs verloren is en waarvan zich te Brussel alleen nog een afgietsel bevindt. Dit sterk afgerolde fragment is echter door geen enkel kenmerk getypeerd en daardoor zal het nooit uitgemaakt kunnen worden, of later gevonden resten werkelijk erbij

behooren. Daardoor eehter verliest het geslacht Trichecodon alle recht van bestaan en de beenderen, die ertoe gebracht zijn, moeten als ongedetermineerd beschouwd worden.

Van Alachtherium wordt het eerst gesproken in eene rede van den Vicomte DU BUS. Toen was van dezen Trichechide alleen een halve mandibula bekend. Ook hier heeft v. BENEDEN den eigenaar dezer onderkaak een heele serie beenderen uit den omtrek van Antwerpen toegedeeld. Onder deze komt ook een schedelfragment voor, waarvan v. BENEDEN de volgende beschrijving geeft, die door eenige groote, maar minder gelukkig geslaagde afbeeldingen vergezeld wordt.

„En comparant la tête d'Alachtherium avec celle du Morse, nous voyons des différences fort grandes dans la disposition de certains os. Vu par devant, le crâne est beaucoup plus élevé et les parties latérales, formées par le temporal surtout, sont plus étendues en dehors et en dessous. Il en résulte, que par la partie supérieure, le crâne se rapproche plus de celui des Otaries et par les parties latérales de celui des Morses. Le crâne est brisé en avant de manière que la boîte est restée entière, et les os frontaux ne prennent qu'un faible part à la formation de la cavité cranienne. Le crâne, vu par la face postérieure, montre l'os occipital s'élevant verticalement très haut comme dans certaines Otaries adultes et les parties latérales et inférieures, formées par le temporal, sont très massives en même temps qu'elles descendent fort bas. Les deux condyles sont brisés. . . . Vu sur le côté, le crâne présente l' aspect d'un casque; il est beaucoup plus élevé que dans le Morse et la conformation de toutes les régions est complètement différente. . . . Tout le dessus du crâne est aplati et une bordure véritable sépare cette région supérieure en avant des os de la face, sur le côté des os des tempes. Les pariétaux sont fort bien indiqués au devant de l'occipital et sont disposés de manière à ressembler au premier abord, à des os nasaux".

Afgezien van eenige onjuistheden, zijn in deze beschrijving de verschillen met den Walrus toch wel al te diffuus aangeduid zoodat eene nieuwe vergelijking niet overbodig schijnt:

Bekijken we den schedel van den voorkant, dan zijn er, in vergelijking met den Walrus, verschillende veranderingen opgetreden, die alle er toe geleid hebben, den vorm van het parietale te wijzigen. Waar dit toch bij den Walrus beiderzijds duidelijk convex is, vertoont het bij Alachtherium eene concaviteit die slechts voor het kleinste gedeelte aan eene verkleining der hersenkas is toe te schrijven. Ze wordt vooral veroorzaakt door de ontwikkeling eener reusachtige crista lambdoïdea en door den grooten processus mastoïdeus, evenals door beider verloop. De crista lambdoïdea toch trekt door hare grootte

het parietale omhoog en, doordat ze zich mediaan ver naar voren uitstrekt, oefent ze deze werking op een groot deel van den omtrek van het parietale uit. De sterke ontwikkeling van den processus mastoïdeus en vooral zijn frontale stand, trekken den onderkant van het parietale en den bovenkant van het squamosum naar buiten en werken zoo aan den onderkant van het parietale evenzoo als de crista lambdoïdea aan den boven- en achterkant: door beiden samen wordt de concave vorm van het parietale teweeg gebracht. Terwijl nu de sterke ontwikkeling van de crista lambdoïdea en de hoogtetoename van den processus mastoïdeus ook eene verhooging van den schedel tegenover den Walrus veroorzaken, wordt hij door den frontalen stand der processus mastoïdei verbreed. Immers deze staan bij den Walrus schuin naar voren gericht en zijn bovendien smaller dan bij Alachtherium. Het kan dus niet verwonderen, dat de absolute hoogte en breedte van den schedel de analoge maten bij den Walrus overtreffen, maar dat hunne verhouding binnen de variatiegrenzen der recente dieren ligt.

Andere verschillen met Trichechus rosmarus treden op aan de schedelbasis. Bij den Walrus strekt eene zeer groote bulla ossea zich uit van den externrand van basioccipitale en basisphenoïd tot aan den processus mastoïdeus en naar voren tot aan de fossa glenoïdea; eene min of meer duidelijke groeve scheidt deze bulla ossea in een rostraal en een caudaal gedeelte. Bij Alachtherium echter is de bulla ossea zeer klein en hij verwijdert zich daardoor duidelijk van het Trichechustype. Eenigszins in aansluiting hiermede ligt de fossa glenoïdea bij Alachtherium ver naar achteren: de ruimte tusschen gewrichtskom en processus mastoïdeus is zeer klein. Terwijl nu bij den Walrus de fossa glenoïdea zich op den processus jugalis van het squamosum uitstrekt, zoodat boven haar het squamosum schuin naar achteren opstijgt, ligt ze bij Alachtherium veel minder vrij en vóor haar stijgt het squamosum steil in de hoogte. We zullen later zien, dat dit van belang is bij de beschouwing der mandibula, waaraan het schedelfragment door v. Beneden is toegevoegd.

Een verder verschil vertoont de grens van basioccipitale en basisphenoïd. Afgezien van eene naar voren divergeerende crista en eene daarachter gelegen beiderzijdsche ruwheid op het basioccipitale, gaan deze beenderen bij den Walrus geleidelijk in elkaar over. Bij Alachtherium is de buitenkant der sutura sphenoccipitalis sterk verdikt; er heeft zich een werkelijke knobbel gevormd, die alleen aan den linkerkant is bewaard gebleven. De achterkant van het basisphenoïd is nu links hoog tegen dezen knobbel opgetrokken en, in plaats van normaal de schedelbasis te volgen, staat het hier bijna sagittaal: het

volledige basisphenoïd moet dus eene diepe mediane groeve vertoond hebben. Analoge veranderingen zijn aan het basioccipitale opgetreden, dat naar den knobbel toe eene diepe concaviteit vertoont. Ook is hierdoor de hoek tusschen basisphenoïd en basioccipitale scherper geworden dan bij den Walrus.

Om den achterkant van den schedel vergelijkbaar te maken met den walrusschedel, zetten we het fragment zoo, dat de bovenkant van het parietale iets naar voren helt, evenals bij een walrusschedel, die zonder slagtanden op tafel wordt gezet.

Dan loopt ook bij beiden het basisphenoïd iets naar voren op en het basioccipitale iets naar achteren op, zoodat we hunne positie als correspondeerend kunnen beschouwen.

De omtrek van den achterschedel vertoont dan bij Alachtherium éene groote verandering, die veroorzaakt wordt door de sterke crista lambdoïdea en de breede processus mastoïdei. Hierdoor valt n.l. de schedelachterkant uiteen in een smal supraoccipitaal deel en een zeer breed temporaaldeel, een verschijnsel, dat ook soms bij oude Walrussen eenigszins is aangeduid, maar toch nooit in die mate als bij Alachtherium. Ook heeft Alachtherium eene zeer kleine hersenkas: alle beenderen zijn buitengewoon dik. Verder loopt bij Alachtherium de crista lambdoïdea mediaan ver naar voren en vertoont zelfs neiging om in eenen sagittalen kam over te gaan. Zeer opvallend wordt dit kenmerk tegenover den Walrus daardoor, dat de crista occipitalis externa geheel afwezig is. Waar dus het occipitale superius bij oude Walrussen door de massieve crista occipitalis sterk convex is, vertoont het bij Alachtherium eene diepe mediane plooi. In vergelijking met Trichechus vertoont dus de achterschedel van Alachtherium drie wijzigingen: afwezigheid der crista occipitalis externa, grootte der processus mastoidei en vorm der crista lambdoïdea. De verschillen aan den zijkant van den schedel zijn niet zeer groot en men mag hier zeker niet met v. Beneden zeggen, dat: „la conformation de toutes les régions est complétement différente". Vooral met de schedels van oude mannetjes Walrussen vertoont Alachtherium hier veel punten van overeenkomst en het schijnt bijna, dat v. Beneden bij zijne beschrijving slechts over een klein vergelijkingsmateriaal beschikte.

De vele veranderingen die de schedel van Alachtherium tegenover Trichechus vertoont, hebben hem toch niet zijn Trichechidenkarakter kunnen ontnemen. Evenwel zijn er drie verschijnselen, die hem nader tot de Otaridae brengen: de kleinheid der bulla ossea, de afwezigheid der crista occipitalis en de neiging der crista lambdoïdea om boven op den schedel in eenen sagittalen kam over te gaan [1]).

[1]) J. A. Allen (30) vermeldt echter van Trichechus obesus, dat ook deze eene kleine bulla ossea heeft.

Welke redenen had nu v. Beneden om het schedelfragment toe te voegen aan de mandibula, waarop Alachtherium gebaseerd is? Helaas, hij geeft ze nergens op:

„On ne possédait d'abord de ce curieux Amphitérien d'autre os que le maxillaire . . . . Nous rapportons à ce même animal . . . ., le crâne que nous réprésentons . . . ., les vertèbres cervicales etc. etc. . . . . La forme du maxillaire inférieure indique une conformation toute particuliere de tous les os en face . . . ."

De vraag is nu, of integendeel niet kan aangetoond worden, dat schedelfragment en mandibula niet bij elkaar behooren. Dit schijnt inderdaad het geval te zijn:

De onderkaak wijkt sterk van die van Trichechus af en wijst inderdaad op eene „conformation toute particulière de tous les os en face". Waar echter de achterschedel van Alachtherium zoo geheel binnen het Trichechus-type valt, gaat het niet aan, om voor het ontbrekende gedeelte eenen geheel afwijkenden vorm aan te nemen, alleen om den schedel bij de onderkaak te kunnen onderbrengen.

De achterschedel heeft veel massievere en grovere beenderen dan Trichechus, de mandibula daarentegen is wel grooter dan die van den Walrus, maar veel slanker en fijner gebouwd: ook in hunne structuur hebben dus schedel en onderkaak een tegengesteld karakter. Ook is de onderkaak te groot voor het schedelfragment. Het cranium toch behoort aan een oud dier toe en de onderkaak mag dus zeker niet veel te groot voor den schedel zijn. Deelen we nu twee afmetingen bij den Walrus en Alachtherium op elkaar:

	Walrus	Alachtherium	Alachtherium : Walrus
afstand fossae glenoïdeae	13.5	14.5	107
lengte mandibula	24.7	35.7	144

We krijgen dus hier weer zulke abnormaal groote verschillen van twee afmetingen tusschen den Walrus en Alachtherium, dat de overigens aanmerkelijke analogie der schedels niet toelaat, om de Mandibula met den schedel aan één species toe te schrijven. Het voornaamste argument is echter te vinden in den vorm van cranium en mandibula.

Zooals we zagen, heeft Alachtherium eene veel onvrijer gelegen fossa glenoïdea dan Trichechus. Bij den laatsten heeft de mandibula eenen korten, verticalen processus coronoïdeus, die dan ook gemakkelijk plaats vindt vóór het squamosum. De onderkaak van Alachtherium echter vertoont eenen langen, naar achteren en iets naar binnen gerichten processus coronoïdeus, die, bij de onvrije ligging der gewrichtskom van het schedelfragment, in onvermijdelijk conflict

moet komen met het squamosum ; de beide beenstukken kunnen dus onmogelijk bij elkaar behooren.

We kunnen dus besluiten, dat de als Alachtherium beschreven achterschedel niet tot dit geslacht behoort. Evenmin kan hij tot Trichecodon behooren, daar dit geslacht uit de literatuur moet verdwijnen ; hij is dus als ongedetermineerd te beschouwen.

Ten laatste bezit het „Musée d'Histoire naturelle" te Brussel nog eenen Trichechidenschedel, die bij Heyst aangespoeld is en voor diluviaal gehouden wordt. Het is een cranium van een zeer oud mannetje : de naden zijn alle verdwenen en de slagtanden bijna geheel afgesleten. De conservatie is geheel als die van het Zeeuwsche fossiel : de beenderen zijn bruin geworden en de tanden geheel zwart. De schedel is zeer zwaar en misschien is hij voor een deel verkiezeld. Behalve geringe lengte en een sterke ontwikkeling der slagtandalveolen, vertoont het fossiel geen verschillen met den Walrus : deze beide kenmerken geven hem echter een zeer vierkant voorkomen. Deze kleine verschillen geven ons echter geen recht, den schedel als een nieuwe soort te beschouwen : het schijnt een gewone Trichechus rosmarus te zijn. Na de bespreking der bekende fossiele schedels, moet aan het Zeeuwsche fossiel en aan den Antwerpschen achterschedel eene plaats in het systeem worden gegeven. Beide behooren tot eene verschillende soort. Er werd reeds gewezen op de overeenkomst der slagtanden van Trichechus Huxleyi met die van het Zeeuwsche cranium. De curvaturen der slagtanden van Trichechus Huxleyi, die Ray Lankester afbeeldt, zijn :

$$21,\ 27,\ 30,\ 38,\ >50,\ >50 \text{ cm.}$$

Zij komen dus veel beter met de Zeeuwsche slagtanden overeen dan die van den Walrus. Ook vertoonde de dwarse doorsnede der slagtanden analogiën en we kunnen dus den Zeeuwschen schedel gerust toevoegen aan Trichechus Huxleyi. — Vragen we nu naar den ouderdom van den schedel uit de Schelde, dan is allereerst te bedenken, dat de goede conservatie het aannemen van een lang transport verbiedt. De schedel moet dus uit de grondlagen op den bodem der Schelde zijn losgewoeld. Welke kunnen nu deze zijn ? Reeds vroeger heeft Dr. De Man resten van diluviale landzoogdieren beschreven (35), die ook uit de Schelde zijn opgevischt en wel gedeeltelijk zeer kort bij de plaats, waar ook de Trichechus gevonden werd (36). Het is nu zeer onwaarschijnlijk, dat de Trichechus en de landzoogdieren uit dezelfde laag komen, daar beide goede conservatie vertoonen. — In het jaar 1879 publiceerde Dr. Seelbeim eenige profielen door Zeeland (37), die gebaseerd waren op grondboringen en waaruit blijkt, dat in de Westerschelde ook hier en daar tertiaire

Nummer.	*f*	1	2	3	4	5	6	7
Hoogte I	24.0	19.0	16.7	16.8	16.5	14.9	16.4	19.2
Breedte II	31.8	28.0	26.0	25.9	24.7	22.7	24.1	27.8
Hoogte occip. sup . III	11.9	8.6	—	8.5	7.4	—	7.9	9.9
Hoogte for. magnum IV	4.3	4.5	—	4.1	4.6	—	4.1	3.4
Breedte for. magnum V	5.4	4.5	—	4.0	4.4	—	3.8	3.8
Lengte VI	39.5	36.6	33.6	33.6	32.4	—	31.7	35.8
Slagtandcurvatuur buitenrand } VII	26.0	—	49.0	>50	47.0	>50	—	>50
Slagtandcurvatuur binnenrand } VIII	28.0	—	>50	>50	>50	>50	—	>50
Afst. der processus praeorbitales } IX	22.0	16.5	14.8	16.8	14.2	12.5	15.0	18.9
Afstand der incisivi . X	2.7	3.8	3.0	3.6	3.9	3.6	3.2	3.0
I/II × 100 %	75.5	67.9	64.2	64.9	66.8	65.6	68.0	69.0
III/II × 100 %	37.4	30.7	—	32.8	30	—	32.8	35.6
V/IV × 100 %	125.6	100	—	97.6	95.5	—	92.7	111.5
IX/II × 100 %	69.2	61.8	56.9	64.9	57.5	55.1	62.2	60.8
X/II × 100 %	8.5	13.6	11.6	13.9	15.8	15.8	13.3	10.8
VI/II × 100 %	124.2	130.7	129.2	129.7	131.2	—	131.5	128.1

Alle maten zijn in centi

f = Trichechus Huxleyi

Nr. 7—24 zijn walru

Nr. 25—27 zijn waln

H zijn de door Ray

Nummer.	*f*	1	2	3	4	5	6	7	♀ 8	9	10	11	12	13	14	♀ 15	♀ 16	17	18	♀ 19	♀ 20	21	22	23	24	25	♀ 26	27	*h*	*H*	*H*	*H*	*H*	*H*	*H*
Hoogte I	24.0	19.0	16.7	16.8	16.5	14.9	16.4	19.2	15.9	23.9	16.8	18.4	19 3	14.5	19.7	16.6	16.3	20 4	20.1	15.7	16.8	22.4	—	—	—	21 3	16.4	18.8	22.0						
Breedte II	31.8	28.0	26.0	25.9	24.7	22.7	24.1	27.3	22.1	34.8	24.3	27.6	30.5	24.5	28.5	26.6	23 6	31 2	28.9	23.2	24.4	30.3	—	—	—	32 5	25.4	29 4	30.2						
Hoogte occip. sup . III	11.9	8.6	—	8.5	7.4	—	7.9	9.9	7.5	9.4	7.3	—	9.3	6.7	9.0	9.5	8.0	0 5	0.1	7 0	7.3	9.0	—	—	—	10.6	8 5	10.0	—						
Hoogte for. magnum IV	4.3	4.5	—	4.1	4.6	—	4.1	3.4	4.3	5.4	4.1	—	3.9	4.6	4.2	3.6	3.9	3.4	4.2	4.5	5.0	4.5	—	—	—	4 4	4.0	4 0	—						
Breedte for. magnum V	5.4	4.5	—	4.0	4.4	—	3.8	3.8	4.1	5.4	4.1	—	4.3	4.0	4.6	3.9	4 4	3 7	3.9	4.1	5.0	4.2	—	—	—	4.0	5 0	4.5	—						
Lengte VI	39.5	36.6	33.6	33.6	32.4	—	31.7	35.8	30.4	42.0	32.2	—	37.0	30.5	37.5	35.0	33.7	37.0	37.7	32.5	33.0	41.0	—	—	—	38.0	33.5	37.5	38 0						
Slagtandcurvatuur buitenrand VII	26.0	—	49.0	>50	47.0	>50	—	>50	43	45	>50	48	>50	>50	45	37	37	>50	47	33	38	>50	43	40	>50	>50	40	47	>50	21	27	30	38	>50	>50
Slagtandcurvatuur binnenrand VIII	28.0	—	>50	>50	>50	>50	—	>50	45	50	>50	>50	>50	>50	>50	39	35	>50	49	33	38	>50	47	50	>50	>50	42	>50	>50						
Afst. der processus praeorbitales IX	22.0	16.5	14.8	16.8	14.2	12.5	15.0	18.9	13.4	23.0	14.5	16.9	18.3	12.3	17.4	16.0	12.8	18.3	18 2	13.0	13.2	20.2	—	—	—	21.0	13.0	17.7	21.4						
Afstand der incisivi . X	2.7	3.8	3.0	3.6	3.9	3 6	3.2	3.6	3.7	3.2	3.4	3.2	3.1	3.0	3.8	3.2	3.8	3 5	3.8	3.4	3.2	2.6	—	—	—	1.8	3.2	3 3	2.7						
I/II × 100 %	75.5	67.9	64.2	64.9	66.8	65.6	68.0	69.0	71.9	68.7	69.1	66.7	63.3	65.5	69.1	62.4	69.1	65.4	69.6	67.7	68.0	73.9	—	—	—	65.5	64 5	63.0	73.2						
III/II × 100 %	37.4	30.7	—	32.8	30	—	32.8	35.6	33.9	27.0	30.0	—	30.5	34.2	31.6	35.7	36.4	30.5	31.5	34 1	29 9	29.7	—	—	—	32.6	33.3	39 0	—						
V/IV × 100 %	125.6	100	—	97.6	95.5	—	92.7	111.5	95.9	100	100	—	110.3	100	109.5	108.3	112.8	108.8	90.5	91.1	100.0	93 3	—	—	—	104 5	108.0	112.5	—						
IX/II × 100 %	69.2	61.8	56.9	64.9	57.5	55.1	62.2	60.8	60.7	66.1	60.0	61.7	60.0	57.2	61.1	60.2	54 2	58 7	63 0	58 5	50 0	66.7	—	—	—	64 3	53.5	59.9	70.0						
X/II × 100 %	8.5	13.6	11.6	13.9	15.8	15.8	13.3	10.8	16.7	9.2	14.0	11.6	10.2	14.0	13.3	12.0	16.1	11.2	13.1	14 7	13 5	8 6	—	—	—	5.5	12.6	11.2	8.9						
VI/II × 100 %	124.2	131.7	129.2	129.7	131.2	—	131.5	128.1	137.6	120.7	132.5	—	121.3	141.5	128.1	131.5	142.8	118.0	130,5	140.5	135.2	135.3	—	—	—	110.9	131 8	127.5	125.8						

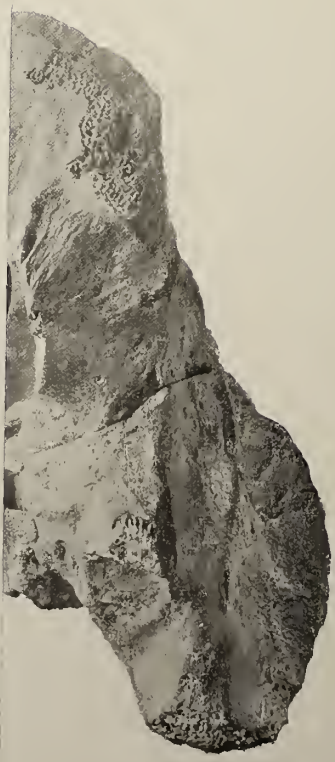
Alle maten zijn in centimers uitgedrukt.

f = Trichechus Huxleyi uit de Schelde, Nr. 1—6 zijn walrusschedels uit de Zoölogische Collectie der Universiteit te Utrecht.

Nr. 7—24 zijn walrusschedels uit 't Rijks Museum voor Naturlijke Historie te Leiden en uit de collectie van Natura Artis Magistra te Amsterdam.

Nr. 25—27 zijn walrusschedels uit 't Musée d'Histoire naturelle te Brussel. *h* is de schedel van Heyst.

H zijn de door Ray Lankester afgebeelde slagtanden van Trichechus Huxleyi. (29).



lagen voor den dag komen. Waar het nu natuurlijk onmogelijk is om precies de laag aan te geven, waaruit het Zeeuwsche fossiel losgewoeld is, daar blijkt het toch, dat het niet is uitgesloten, dat de schedel tot het tertiair en wel tot het plioceen behoort. Ook in dit opzicht zou hij dan met Trichechus Huxleyi overeenkomen. — Het schedelfragment van Antwerpen behoort niet tot Trichechus Huxleyi, daar het aanmerkelijk van den Zeeuwschen schedel afwijkt. Dan echter is het eene nieuwe soort. Het lijkt niet wenschelijk om voor een fragment, dat zooveel analogie met Trichechus vertoont, een nieuw geslacht op te stellen. De naam van dezen Trichechide moge, naar zijn vindplaats, zijn

Trichechus Antverpiensis.

De recente walrusschedels uit het Rijks Museum voor Natuurlijke Historie te Leiden, en uit de Zoölogische verzamelingen der Universiteiten te Utrecht en Amsterdam werden ter vergelijking welwillend afgestaan door Dr. F. A. Jentink en de professoren A. A. W. Hubrecht en Max Weber. Te Brussel stelde de vriendelijkheid van Dr. L. Dollò me in staat om het fossiele en recente materiaal uit het „Musée roy. d'Histoire naturelle de la Belgique" te bestudeeren. — Eindelijk moet ik Professor Wichmann bedanken die me het fossiel ter beschrijving afstond en zonder wiens hulp het me zeker niet gelukt zou zijn, alle literatuur bij elkaar te krijgen.

FIGUREN.

f. 1. 3. 5. Achterkant, Basis en Zijkant van den Schedel van Trichechus Huxleyi. Vindplaats: Tegenover Breskens in de Westerschelde.

f. 2. 4. 6. Achterkant, Basis en Zijkant van den Schedel van Trichechus Antverpiensis. Vindplaats: In de buurt van Antwerpen.

GEBRUIKTE LITERATUUR OVER FOSSIELE TRICHECHIDEN.

1. 1823. Cuvier. Ossements fossiles 2e éd. 1e partie p.264, 2e partie p.521.
2. 1828. Mitchill, Smith and Cooper. Discovery of the fossil Walrus in Virginia. Ann. Lyceum of Nat. Hist. of New-York II p. 271.
3. 1834. R. Harlan. Critical notices of various organic Remains, hitherto discovered in North America. Edinb. New. Phil. Journ XVII p. 360.
4. 1835. R. Harlan. Physical and medical Researches p. 255.
5. 1839. H. Ducrotay de Blainville. Ostéographie, II, p. 45 et 49.
6. 1843. Ch. Lyell. Edinb. New. Phil. Journ. p. 187.
7. 1842—1843. Ch. Lyell. Proc. geol. Soc. IV p. 31.
8. 1844. Ch. Lyell. On the tertiary strata of the Island of Martha's Vineyard. Amer. Journ. of Sc. XLVI. p. 319.

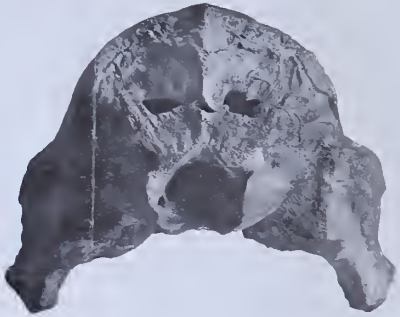


Fig. 1.

Fig. 2.

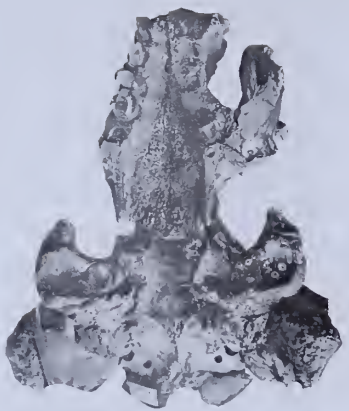


Fig. 3.

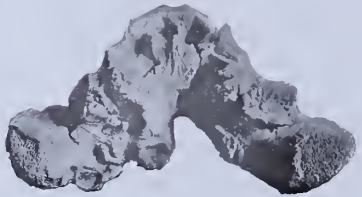


Fig. 4.

Fig. 5.

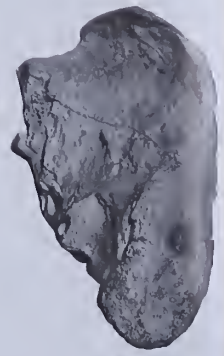


Fig. 6.

lagen voor den dag komen. Waar het nu natuurlijk onmogelijk is om precies de laag aan te geven, waaruit het Zeeuwsche fossiel losgewoeld is, daar blijkt het toch, dat het niet is uitgesloten, dat de schedel tot het tertiair en wel tot het plioceen behoort. Ook in dit opzicht zou hij dan met Trichechus Huxleyi overeenkomen. — Het schedelfragment van Antwerpen behoort niet tot Trichechus Huxleyi, daar het aanmerkelijk van den Zeeuwschen schedel afwijkt. Dan echter is het eene nieuwe soort. Het lijkt niet wenschelijk om voor een fragment, dat zooveel analogie met Trichechus vertoont, een nieuw geslacht op te stellen. De naam van dezen Trichechide moge, naar zijn vindplaats, zijn

Trichechus Antverpiensis.

De recente walrusschedels uit het Rijks Museum voor Natuurlijke Historie te Leiden, en uit de Zoölogische verzamelingen der Universiteiten te Utrecht en Amsterdam werden ter vergelijking welwillend afgestaan door Dr. F. A. Jentink en de professoren A. A. W. Hubrecht en Max Weber. Te Brussel stelde de vriendelijkheid van Dr. L. Dollò me in staat om het fossiele en recente materiaal uit het „Musée roy. d'Histoire naturelle de la Belgique" te bestudeeren. — Eindelijk moet ik Professor Wichmann bedanken die me het fossiel ter beschrijving afstond en zonder wiens hulp het me zeker niet gelukt zou zijn, alle literatuur bij elkaar te krijgen.

FIGUREN.

f. 1. 3. 5. Achterkant, Basis en Zijkant van den Schedel van Trichechus Huxleyi. Vindplaats: Tegenover Breskens in de Westerschelde.

f. 2. 4. 6. Achterkant, Basis en Zijkant van den Schedel van Trichechus Antverpiensis. Vindplaats: In de buurt van Antwerpen.

GEBRUIKTE LITERATUUR OVER FOSSIELE TRICHECHIDEN.

1. 1823. Cuvier. Ossements fossiles 2e éd. 1e partie p.264, 2e partie p.521.
2. 1828. Mitchill, Smith and Cooper. Discovery of the fossil Walrus in Virginia. Ann. Lyceum of Nat. Hist. of New-York II p. 271.
3. 1834. R. Harlan. Critical notices of various organic Remains, hitherto discovered in North America. Edinb. New. Phil. Journ. XVII p. 360.
4. 1835. R. Harlan. Physical and medical Researches p. 255.
5. 1839. H. Ducrotay de Blainville. Ostéographie, II, p. 45 et 49.
6. 1843. Ch. Lyell. Edinb. New. Phil. Journ. p. 187.
7. 1842—1843. Ch. Lyell. Proc. geol. Soc. IV p. 31.
8. 1844. Ch. Lyell. On the tertiary strata of the Island of Martha's Vineyard. Amer. Journ. of Sc. XLVI. p. 319.

9.	1845.	Ch. Lyell. Travels in North America I p. 257—258.
10.	1895.	K. G. Zimmermann. Brief an den Geheimrath v. Leonhard. Neues Jahrb. f. Min. p.73. (De hier beschreven walrusschedel uit den ondergrond van Hamburg schijnt door menschen binnengesmokkeld te zijn; mededeelingen van Prof. C. Gottsche).
11.	1847.	Giebel. Fauna der Vorwelt. I. p. 232.
12.	1851.	Agassiz. Proceed. Amer. Assoc. f. the Adv. of science. p. 252, 348.
13.	1853.	Eichwald. Lethaea rossica. 3. p. 890.
14.	1853—1856.	Bronn Lethaea geognostica. Thl. 6. p. 786.
15.	1853.	Pictet. Paléontologie I. p. 233.
16.	1857.	J. Leidy. Notice on the Remains of the fossil Walrus on the coast of the United States. Transact. Phil. Soc. Philadelphia New Series. vol. XI. p. 83.
17.	1858.	Gratiolet. Bull. Soc. géol. de France. 2e série. V.
18.	1859.	P. Gervais. Zoölogie et Paléontologie française. IIe éd. p. 275.
19.	1865.	E. Ray Lankester. On the Sources of the Mammalian Fauna in the Red Crag and on the Discovery in that Deposits of a new Mammal, allied to the Walrus. Proc. Geol. Soc. XXI. p. 233—232.
20.	1867.	Vicomte du Bus. Sur quelques mammifères du Crag d'Anvers. Bull. Acad. roy. Belgique. 2e serie 24. p. 562—577.
21.	1869.	J. Leidy. The extinct Fauna of Dakota and Nebraska Journ. Acad. Nat. Science of Philadelphia VII. p. 416.
22.	1869.	Le Hon. L'Homme fossile. p. 304.
23.	1871.	P. J. v. Beneden. Les Phoques de la mer Scaldisienne. Bull. Acad. roy. Belgique. 2e série 32. p. 5—18.
24.	1876.	P. J. v. Beneden. Les Phoques du bassin d'Anvers. Bull. Acad. roy. Belgique. 2e série T. 41. p. 783—812.
25.	1876.	Schaafhausen. Trichechus rosmarus in Cöln. Sitz. Ber. Niederrh. Ges. f. Natur- und Heilk. S. 427.
26.	1877.	P. J. v. Beneden. Description des ossements fossiles des environs d'Anvers I. Pinnipedia Ann. Musée d'Hist. Nat. de Belg. T. I.
27.	1878.	W. Davis. On a collection of pleistocene Mammals, dredged off the Eastern Coast. Geol. Mag. (2). V. p. 97. 98.
28.	1880.	E. T. Newton. Notes on the Vertebrata of the preglacial Forest Beds of the Coast. of England. Geol. Mag. (2). VII p. 152—159.
29.	1880.	E. Ray Lankester. On the Tusks of the fossil Walrus found in the Red Crag of Suffolk. Transact. Linn. Soc. (Zoology) (2). II. p. 213—221.
30.	1880.	J. A. Allen. History of North American Pinnipeds U. S. Geol. Survey. Miscellaneous Publications 12.
31.	1880.	E. Ray Lankester. Journ. Linn. Soc. (Zoology) XV London, p. 144—146.
32.	1881.	E. T. Newton. The vertebrata of the pliocene Deposit of Britain. Mem. Geol. Surv. of the United Kingdom, p. 17—18
33.	1891—1893.	K. Zittel. Handb. d. Paläontologie IV p. 680—685,
34.	1898—1899.	Trouessart. Catalogus Mammalium p- 375—376.

LITERATUUR OVER DE VINDPLAATS VAN TRICHECHUS HUXLEYI.

35 1875. J. C. DE MAN. Beenderen van den mammouth en van het uitgestorven rund, opgevischt in den omtrek van Zeeland. Arch. Zeeuwsch Genootsch. der Wetensch. III 2. p. 101—127.

36 1878. J. C. DE MAN. Een elandshoren, opgevischt in de Schelde. Mededeeling over eenige beenderen, in of nabij Zeeland gevonden. Arch. Zeeuwsch Gen. III 3. p. 1—22.

37 1879. F. SEELHEIM. Grondboringen in Zeeland. Verhand. Kon. Akad. der Wetenschappen. Afd. Natuurk. Amsterdam.

38 1880. J. C. DE MAN. Derde Mededeeling over in de Schelde gevonden beenderen. Arch. Zeeuwsch Genootsch. V. 1. p. 161—170.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan, getiteld: *„Golflengten van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultra-roode spectrum."*

Wanneer men in het ultra-roode spectrum, ontworpen met behulp van een steenzout-prisma, de plaatsen van emissie- of absorptiebanden zorgvuldig bepaald heeft, bestaat ten aanzien van de golflengte der daaraan beantwoordende stralensoorten nog steeds een onzekerheid, die grooter is (althans in een aanmerkelijk deel van het spectrum) dan de waarschijnlijke fout der plaatsbepalingen. Men is het namelijk nog niet voldoende eens over den loop der dispersiekromme van steenzout.

Onlangs heeft W. J. H. MOLL [1]) de beide dispersiekrommen, die volgens de formule van KETTELER kunnen worden berekend uit waarnemingsreeksen van RUBENS [2]) en van LANGLEY [3]), met elkander vergeleken. De resultaten van LANGLEY golden voor de temperatuur 20°; de getallen van RUBENS werden zoo gecorrigeerd, dat ze óók op 20° betrekking hadden. Nu bleek het dat, bij overeenstemming van de beide dispersiekrommen in het zichtbare spectrum, door het geheele ultra-roode deel de golflengten van stralen voor gegeven brekingsindices volgens RUBENS kleiner zijn dan volgens LANGLEY. Bij 1,5 μ bijv. bedraagt het verschil 0,028 μ; het klimt tot 0,062 μ (bij ongeveer 3 μ) en daalt vervolgens tot 0,032 μ (bij 8,5 μ). Onderzoekt men omgekeerd, hoeveel de brekingsindices onderling verschillen, die door LANGLEY en door RUBENS worden toegekend aan stralen van gegeven golflengten, dan blijken de afwijkingen door het geheele gebied van 4 μ tot 8,3 μ ongeveer evengroot, en wel 1,5 eenheden van de 4de decimaal te zijn, en in het gebied tusschen 0,6 μ en 4 μ een aantal van zulke eenheden, toenemend van 0 tot 1,5.

[1]) W. J. H. MOLL, Onderzoek van ultra-roode spectra. Dissertatie, Utrecht, 1907.

[2]) H. RUBENS, Wied. Ann. 60, 724; 61, 224; 1897. Zie ook KAYSER, Handbuch der Spectroscopie I, 371, 1900.

[3]) S. P. LANGLEY, Ann. Astroph. Obs. of the Smiths. Inst. I, 1900.

De tegenwoordige hulpmiddelen nu voor spectraalwaarnemingen in het ultra-rood veroorloven plaatsbepaling van eenigszins scherpe maxima of minima van stralingssterkte met een nauwkeurigheid, die veel verder gaat dan 1,5 eenheden van de 4de decimaal van den brekingsindex.

Toen in de jaren 1887—1891 door mij een aantal ultra-roode emissie- en absorptiespectra onderzocht werden, was aangaande de dispersie van steenzout alleen bekend het resultaat der eerste bepalingen van LANGLEY [1]), die zich slechts uitstrekten tot 5,3 μ. Ik gaf daarom destijds mijne uitkomsten, die voor een groot deel op langere golven betrekking hadden, geheel in den oorspronkelijken vorm, d. w. z. in hoeken van kleinste afwijking, gereduceerd op een temperatuur van 10° C. Daar ook de brekende hoek van het prisma vermeld werd, waren daarmee impliciet de brekingsindices voor de waargenomen maxima en minima tevens gegeven.

Om echter een ruwe schatting van de daarmee correspondeerende golflengten mogelijk te maken, had ik, onder uitdrukkelijk voorbehoud, LANGLEY's dispersiekromme rechtlijnig verlengd. De golflengten, afgelezen op deze kromme, waaraan ikzelf weinig gewicht toekende [2]), hebben ongelukkigerwijs als de resultaten van mijn onderzoek hun weg gevonden naar enkele handboeken [3]), hier en daar met de bijvoeging dat ze onjuist waren, als berustende op een ongeoorloofde extrapolatie. Die onjuistheid heeft echter met de nauwkeurigheid waarmee de ligging der banden in het prismatische spectrum bepaald was, blijkbaar niets te maken. En daar de voor genoemde onderzoekingen door mij gebezigde spectrometrische hulpmiddelen niet minder deugdelijk geweest schijnen te zijn dan die, welke door latere waarnemers van ultraroode spectra (DONATH, PUCCIANTI, IKLÉ, COBLENTZ, NICHOLS, RUBENS en ASCHKINASS, en anderen) zijn gebruikt, hebben de uitkomsten nog steeds haar waarde als kenmerkende eigenschappen van de onderzochte stoffen.

[1]) S. P. LANGLEY, Phil. Mag., Aug. 1886.

[2]) Men zie bijv. „Bolometrisch onderzoek van Absorptie-spectra", Verhandelingen der Kon. Akad. v. W. te Amsterdam, Dl. I, N°. 1, p. 8 (1892), of de Duitsche bewerking daarvan, in de Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses, 1893, p. 235, waar volkomen duidelijk uitgesproken staat dat ik de verlenging der dispersiekromme van LANGLEY als geheel onzeker beschouwde, en in de tabellen het zuivere waarnemingsmateriaal (deviatiehoeken) gaf, teneinde de opgaven niet noodeloos te verbinden aan een mogelijke onjuistheid van de dispersiekromme. Niettegenstaande dit voorbehoud zegt W. W. COBLENTZ in een werk, getiteld: „Investigations of Infrared Spectra", uitgegeven door de Carnegie Institution of Washington, 1905, op blz. 135, sprekende over LANGLEY's rechtlijnige verlenging van de dispersiekromme en dan verwijzende naar mijne verhandelingen over warmtestraling: „JULIUS, with apparently less hesitation, has applied this extrapolation to his work".

[3]) WINKELMANN, Handbuch der Physik; KAYSER, Handbuch der Spectroscopie; CHWOLSON, Lehrbuch der Physik.

Het kwam mij daarom wenschelijk voor, de destijds gevonden emissie- en absorptiemaxima [1]) nogmaals te vermelden, thans met opgaaf van de brekingsindices die uit mijn waarnemingen onmiddellijk voortvloeien, en van de golflengten zooals die uit de later bepaalde dispersiekrommen van LANGLEY en van RUBENS zijn af te leiden.

De plaatsen in het spectrum werden bij mijne onderzoekingen alle bepaald met betrekking tot de ligging der *D*-lijnen van een BUNSENsche vlam met chloornatrium. Deze waren te zwak om bolometrisch te worden opgemerkt. De overgang van de visueele waarneming der *D*-lijnen tot de bolometrische waarneming der ultra-roode stralen gaf een onzekerheid in de plaatsbepaling, die nog vergroot werd door dat men den bolometer verschuiven moest met het oog op den verschillenden brandpuntsafstand der steenzoutlenzen voor de zichtbare en de onzichtbare stralen. Aan het beperken van deze onzekerheid is vooral groote zorg besteed in het deel van het onderzoek, dat beschreven is op blz. 69 van „Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase". Daar werd voor het koolzuurmaximum van de BUNSENsche vlam gevonden een deviatiehoek 38°54′20″ bij 10° C. De brekende hoek van het prisma was 59°53′20″, dus de brekingsindex voor het koolzuurmaximum : $n = 1{,}52103$ bij 10° C. Was de temperatuur 20° geweest, dan zou de deviatiehoek 1′50″ kleiner, en derhalve de brekingsindex $n = 1{,}52069$ gevonden zijn.

Nemen wij deze plaatsbepaling van het koolzuurmaximum als juist aan, dan zijn in de eerste verhandeling Arch. néerl. vol. 22 en in „Licht- und Wärmestrahlung" p. 47—68 tengevolge van een instellingsfout de afwijkingshoeken bijna 3′ te klein opgegeven. In „Bolometrisch onderzoek van absorptie-spectra" is de afwijkingshoek van het koolzuurmaximum 1′40″ kleiner dan de als juist aangenomen waarde. Daarvan komt 1′ op rekening van het feit, dat van het toen gebruikte prisma de brekende hoek 1′ kleiner was dan van het vroeger gebezigde; slechts de rest van het verschil, 40″, is hier toe te schrijven geweest aan instellingsfout.

Thans heb ik aan de afwijkingshoeken de uit het bovenstaande voortvloeiende correcties aangebracht, en voor de berekening der brekingsindices alle waarnemingen herleid op 20°C., de temperatuur op welke ook de door MOLL nevens elkander gestelde dispersiekrommen betrekking hebben. Het opzoeken van de bijbehoorende golflengten geschiedde met behulp van de uitvoerige tabellen die Dr. W. J. H. MOLL met het oog op zijne onderzoekingen berekend had, en die hij mij welwillend ten gebruike afstond.

[1]) Recherches bolométriques dans le spectre infra-rouge. Arch. néerl. **22**, p. 310—383 (1888).
Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase, Berlin, Simion. 1890.
Bolometrisch onderzoek van absorptiespectra, l. c.

Emissie-spectrum van:	Brekingsindices voor de maxima (Temp. 20°)		Golflengten volgens de dispersiekromme van RUBENS	Golflengten volgens de dispersiekromme van LANGLEY	Intensiteit[1])
BUNSEN'sche vlam . . .	1.5268		1.905	1.953	0.5
	1.5247	H_2O	2.769	2.831	3—5
	1.52069	CO_2	4.410	4.462	10
Vlam van kooloxyd of van cyaan	1.52445	CO_2	2.883	2.947	1
	1.52069	CO_2	4.410	4.462	10
Waterstofvlam	1.5247	H_2O	2.77	2.83	10
	1.5176		5.41	5.46	2
Lichtgevende gasvlam .	1.5270	C	1.84	1.89	[2])
	1.5247	H_2O	2.77	2.83	[2])
	1.5207	CO_2	4.41	4.46	[2])
Vlam v. waterstof in chloor	1.5226	HCl	3.68	3.74	
Vlam van zwavel . . .	1.5093	SO_2	7.49	7.52	
Vlam van zwavel-koolstof	1.5247		2.77	2.83	1
	1.5207	CO_2	4.41	4.46	10
	1.5125	COS(?)	6.76	6.80	3—0 [2])
	1.5093	SO_2	7.49	7.52	2—3 [2])
Absorptie-spectrum van:					
C (diamant)	1.5238		3.18	3.24	4
	1.5202		4.58	4.63	10
	1.5183		5.20	5.25	
	1.5088 enz.[3])		7.59	7.62	10
H_2O	1.5287		1.41	1.43	1
	1.5265		2.01	2.06	1
	1.5236		3.25	3.31	9 s
	1.5194		4.85	4.90	
	1.5146		6.24	6.28	

[1]) In elk spectrum is de intensiteit van het hoogste maximum door 10 aangeduid. De letter s achter een intensiteits-cijfer beteekent, dat de band vrij scherp is.

[2]) De betrekkelijke sterkte dezer banden is zeer uiteenloopend voor de verschillende plaatsen in de vlam.

[3]) De toevoeging „enz." achter een brekingsindex beduidt, dat daar een uitgestrekt gebied van sterke absorptie aanvangt.

Absorptie-spectrum van:	Brekingsindices voor de maxima (Temp. 20°)	Golflengten volgens de dispersiekromme van RUBENS	Golflengten volgens de dispersiekromme van LANGLEY	Intensiteit
CS_2	1.5203	4.55	4.60	6 s
	1.5129	6.67	6.71	10
$S_2 Cl_2$	1.5219	3.96	4.02	1
	1.5163	5.78	5.82	1
	1.5090	7.55	7.58	7 s
	1.5049	8.36	8.39	1
	1.5020	8.90	8.93	1
	1.4992	9.41	9.44	8 s
	1.4942	10.28	10.31	10
PCl_3	1.5221	3.88	3.94	0.5
	1.5082	7.72	7.75	10 s
	1.5030	8.73	8.76	0.5
	1.4944	10.25	10.28	10
$Si Cl_4$	1.5172	5.53	5.57	6 s
	1.5154	6.03	6.07	1
	1.5058	8.19	8.22	10 s
	1.5014	9.02	9.05	10
	1.4974	9.73	9.76	10
$Si HCl_3$	1.5234	3.34	3.40	0.5
	1.5173	5.50	5.54	1 s
	1.5058	8.19	8.22	3
	1.5014	9.02	9.05	10
	1.4974	9.73	9.76	3
$C Cl_4$	1.5137	6.47	6.51	9 s
	1.5058	8.19	8.22	10 s
	1.4942	10.28	10.31	5 s
$C H Cl_3$	1.5234	3.34	3.40	3
	1.5131	6.62	6.66	3 s
	1.5115	6.99	7.03	4
	1.5058	8.19	8.22	10
	1.4980	9.62	9.65	7

Absorptie-spectrum van :	Brekingsindices voor de maxima (Temp. 20°)	Golflengten volgens de dispersiekromme van RUBENS	Golflengten volgens de dispersiekromme van LANGLEY	Intensiteit
$CHBr_3$	1 5235	3.30	3.36	3 s
	1.5207	4.40	4.45	3 s
	1.5164	5.76	5.80	4 s
	1.5116	6.97	7 01	3
	1.5083	8.19	8.22	7 s
	1.5024	8.83	8.86	10
	1.4992	9.41	9.44	6
C_6H_6	1.5259	2.25	2.31	1
	1.5236	3 25	3.31	4 s
	1.5211	4.26	4.31	1
	1.5173	5.50	5.54	6 s
	1.5128	6.69	6.73	10 s
	1.5107	7.18	7.21	3 s
	1.5088	7.59	7.62	1
	1.5060	8.15	8.18	2
	1.5039	8.56	8.59	7
$(C_3H_7)_2$	1.5259	2.25	2.31	2
	1.5230	3.51	3.57	7 s
	1.5154	6.03	6.07	1
	1.5118	6.93	6.96	10 s[1])
	1.5097	7.40	7.43	6
	1.5068	7.99	8.02	4
	1.5032	8.69	8.72	6 s
	1.4980	9.63	9.66	5
	1.4942	10.28	10.31	5
CH_3OH	1.5259	2.25	2.31	1
	1.5229	3.56	3.62	10
	1.5194	4 85	4.90	2 s
	1.5145 enz.	6.27	6.31	10
C_2H_5OH.	1.5259	2.25	2.31	1
	1 5229	3.56	3.62	10
	1.5183	5 20	5 25	2 s
	1.5154	6.03	6.07	2
	1.5126 enz.	6.74	6.78	10

[1]) Scherp begrensd alleen naar den kant der kleinere golflengten.

Absorptie-spectrum van :	Brekingsindices voor de maxima (Temp. 20°)	Golflengten volgens de dispersiekromme van RUBENS	van LANGLEY	Intensiteit
C_3H_7OH	1.5230	3.51	3.57	10
	1.5152	6.09	6.13	3
	1.5126 enz.	6.74	6.78	10
C_4H_9OH (normaal) . . .	1.5230	3.51	3.57	10
	1.5162	5.81	5.85	3
	1.5126 enz.	6.74	6.78	10
C_4H_9OH (iso).	1.5230	3.51	3.57	10
	1.5192	4.92	4.97	1
	1.5154	6.03	6.07	2
	1.5126	6 74	6.78	10
$C_5H_{11}OH$.	1.5230	3.51	3.57	10
	1.5192	4.92	4.97	1
	1.5154	6.03	6.07	3
	1.5126	6.74	6.78	10
$(C_2H_5)_2O$.	1.5327	0.953	0.958	1
	1.5293	1.30	1.32	1
	1.5259	2.25	2.31	2
	1.5230	3.51	3.57	8 s
	1.5183	5.20	5.25	3 s
	1.5164	5.76	5.80	1
	1.5116	6.97	7.01	10
	1.5099	7.35	7.39	4
	1.5078	7.80	7.83	4 s
	1.5045 enz.	8.44	8.47	10
C_2H_5SH	1.5256	2.38	2.44	1
	1.5230	3.51	3.57	5
	1.5221	3.88	3.94	3
	1.5183	5.20	5.25	1
	1.5162	5.81	5.85	1
	1.5115	6.99	7.03	10
	1.5074	7.88	7.91	10
	1.5001	9.25	9.28	8
	1.4936	10.39	10.42	9

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan van den Heer S. L. VAN OSS: *„Evenwicht van krachten- en rotatiesystemen in R_4."*

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

Wijzende op de volgende welbekende eigenschappen:

a. De coördinaten p_{ij}, π_{ij} van een lijn p, van een vlak π voldoen aan de vijf betrekkingen:

$$P_i \equiv p_{kl}\,p_{jm} + p_{lj}\,p_{km} + p_{jk}\,p_{lm} = 0 \quad , \quad \pi_i = \sum_i \pi_{kl}\,\pi_{jm} = 0, \quad . \quad (1)$$

van welke betrekkingen er drie onderling onafhankelijk zijn;

b. De voorwaarde, dat een lijn p en een vlak π elkaar snijden, wordt uitgedrukt door

$$\Sigma\, p_{ij}\,\pi_{ij} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

c. De coördinaten van het snijpunt X van twee vlakken π, π' en die van de $R_2\Xi$ door twee lijnen p, p' zijn:

$$x_i = \pi_{kl}\,\pi'_{jm} + \pi_{lj}\,\pi'_{km} + \pi_{jk}\,\pi'_{lm} + \pi_{jm}\,\pi'_{kl} + \pi_{km}\,\pi'_{lj} + \pi_{lm}\,\pi'_{jk};$$

$$\xi_i = \sum_i p_{kl}\,p'_{jm}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

vestigen wij de aandacht op de volgende eigenschappen:

I. Zijn (ij) tien *willekeurige* grootheden, d. w. z. niet voldoende aan de betrekkingen $\sum_i (jk)\,(lm) = 0$, zoo zal men steeds elk dezer grootheden in twee deelen $(ij)'$ en $(ij)''$ kunnen splitsen zoodat $\sum_i (kl)'\,(jm)' = \sum_i (kl)''\,(jm)'' = 0$ is. Het is gemakkelijk in te zien, dat deze splitsing op ∞^4 manieren kan geschieden.

Voor elke splitsing zal dan gelden:

$$\Sigma\,(kl)'\,(jm)'' = \Sigma\,(kl)\,(jm) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

immers:

$$\sum_i (kl)'\,(jm)'' = \sum_i (kl)'\,\{(jm) - (jm)'\} = \sum_i (kl)'\,(jm)$$

evenzoo:

$$\sum_i (kl)'\,(jm)'' = \sum_i (kl)''\,(jm)$$

waaruit door optelling:

$$\sum_i (kl)'\,(jm)'' = \sum_i (kl)\,(jm).$$

Meetkundig interpreteerend, beschouwen wij een homogeen stelsel van 10 willekeurige grootheden a_{ij} en α_{ij} als de coördinaten van

een stelsel a van ∞^4 lijnen, in paren a', a" geconjugeerd door de betrekkingen

een stelsel α van ∞^4 vlakken, in paren α', α'' geconjugeerd door de betrekkingen

$$a'_{ij} + a''_{ij} = a_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Al deze lijnen liggen in één $R_3\Xi$ die tot coördinaten heeft:

$$\xi_i = \sum_{\iota} a_{kl}\, a_{jm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\alpha'_{ij} + \alpha''_{ij} = \alpha_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Al deze vlakken gaan door één punt X, dat tot coördinaten heeft:

$$x_i = \sum_{\iota} \alpha_{kl}\, \alpha_{jm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

We heffen nu de homogeniteit der p-, π-, a- en α-coördinaten op. Hierdoor verkrijgen die elementen vector karakter en worden interpreteerbaar resp. als kracht, als rotatie, als dyname en als dubbeldraaiing. De vergelijkingen (5), (5′) bepalen dan de reductie der *vectoren* a en α op de geconjugeerde lijnen- en vlakkenparen der zooeven beschouwde nog niet met vectorkarakter bedeelde stelsels a en α, wier bouw thans aan het licht komt.

II. In verband met de sub b vooropgestelde beteekenis der vergelijking $\Sigma\, p_{ij}\, \pi_{ij} = 0$ interpreteeren we nu

$$\Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als de voorwaarde dat een lijn p een paar geconjugeerde vlakken van het stelsel α snijdt.

$$\Sigma\, a_{ij}\, \pi_{ij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

als de voorwaarde dat een vlak π een paar geconjugeerde lijnen van het stelsel a snijdt.

Hiermede verkrijgen we een zeer overzichtelijk beeld van den bouw van het lineaire lijnen- en vlakkencomplex. De reductie van de vergelijking van het lijnencomplex op zijn centrum, die van het vlakkencomplex op zijn diametrale ruimte ligt nu voor de hand; evenzeer de verdere herleiding op den eenvoudigsten vorm $(kl) = \sigma\,(jm)$, die de vergelijking aanneemt, als de ribben kl en jm, de vlakken ijm en ikl van het coördinatensimplex geconjugeerde elementen zijn van de stelsels a of α.

III. Kennen we aan de elementen p, π, a, α vectorkarakter toe, dan krijgen de uitdrukkingen $\Sigma\, a_{ij}\, p_{ij}$, $\Sigma\, a_{ij}\, \pi_{ij}$ beteekenis als *arbeidscoëfficienten* (virtual coëfficients in BALL's schroeventheorie) en het verdwijnen dezer coëfficienten geeft dan de *voorwaarde dat de kracht p geen arbeid verricht bij een verplaatsing tengevolge der dubbeldraaiïng α, resp. dat de dyname a geen arbeid verricht bij een rotatie π.*

In BALL's notatie geven dus de vergelijkingen (7), (7)′ *de voorwaarde van reciprociteit tusschen kracht en dubbeldraaiïng, r. p. tusschen dyname en rotatie.*

Evenzoo geeft de vergelijking

$$\Sigma\, a_{ij}\, \alpha_{ij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8$$

welke (7) en (7)′, zoomede (2) insluit, de voorwaarde van reciprociteit tusschen de dyname a en de dubbeldraaiïng α.

IV. We gaan nu over tot het algemeen evenwicht van krachten en rotaties. Hierbij zal het doelmatig zijn onder p, π, a, a *eenheids*-vectoren te verstaan, en de intensiteit dezer vectoren door een factor aan te duiden.

Het zal voldoende zijn ons te bepalen tot het evenwicht van krachten, de behandeling van het duale geval den lezer overlatend.

In de eerste plaats beschouwen we het geval van n krachten, $n > 10$, werkende in willekeurig gegeven lijnen.

Het spreekt van zelf, dat voor het evenwicht noodig en voldoende is, dat de intensiteiten $k^{(\nu)}$ voldoen aan de tien voorwaarden:

$$\Sigma\, k^{(\nu)}\, p^{(\nu)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

We kunnen derhalve in 't algemeen op $n - 10$ vectoren willekeurige intensiteiten brengen, die op de overige tien worden dan door bovenstaande vergelijking (9) bepaald.

In 't bijzonder, voor $n = 11$ geldt dan de stelling: *Bij vectoren in* 11 *willeceurig gegeven lijnen behoort in 't algemeen slechts één verdeeling van intensiteitsverhoudingen zoo dat het stelsel op die lijnen in evenwicht is.*

De algemeenheid van 't geval wordt omschreven door den eisch, dat er geen 10 lijnen tot eenzelfde lineaire voorwaarde kan geschreven worden in den vorm $\Sigma\, a_{ij}\, p_{ij}^{\nu} = 0$, waarin de coëfficienten a_{ij}, tengevolge van een welbekende eigenschap van verdwijnende determinanten, niet afhangt van ν.

Zijn er dus onder n lijnen hoogstens 10 die tot een lineair complex behooren, dan kan men aan de vergelijkingen (9) voldoen door alle intensiteiten behalve de bij deze 10 behoorende gelijk 0 te kiezen, en dan zal men (indien niet alle subdeterminanten der 9de orde verdwijnen) op deze laatsten slechts één van 0 verschillende intensiteitsverdeeling kunnen brengen zóo dat ook het hierdoor verkregen krachtenstelsel in evenwicht is.

We zijn dus met een gekomen tot de volgende stellingen:

Voor het evenwicht van 10 *krachten is noodig dat deze behooren tot één en hoogstens één lineair complex. Daarbij is dan steeds één en niet meer dan één intensiteitsverdeeling mogelijk.*

Zetten wij het onderzoek der vergelijkingen (9) voort, don komen we successievelijk tot de evenwichtsvoorwaarden van 9, 8, 7, 6, 5 krachten. Het resultaat kunnen wij als volgt uitspreken:

Opdat n krachten, $11 > n > 4$, *slechts ééne intensiteitsverdeeling toelaten waarbij zij in evenwicht zijn, is het noodig en voldoende, dat zij behooren tot de gemeenschappelijke elementen van juist* $21 - n$ *lineaire complexen.*

In 't bijzonder, voor $n = 5$, vinden we dan de voorwaarde, dat de krachten moeten behooren tot een stel geassocieerde lijnen van SEGRE.

Hiermede hebben we aansluiting verkregen met een vroegere mededeeling, waarin we dit geval op synthetische wijze hebben behandeld.

V. De voorwaarde, dat 10 krachten in evenwicht tot één complex behooren, volgt bijna onmiddellijk uit de interpretatie der vergelijking $\Sigma a_{ij} p_{ij} = 0$, als voorwaarde van reciprociteit van kracht en dubbeldraaiing.

Zijn nl. 10 krachten in evenwicht gegeven; negen dezer krachten, willekeurig gekozen, bepalen een complex en dus ook de dubbeldraaiing α waarbij geen hunner arbeid verrichten kan. Daar nu het gezamenlijk stel der 10 krachten, als zijnde in evenwicht, bij geen enkele beweging arbeid verricht, zoo is het noodzakelijk dat de 10de kracht eveneens reciprook is ten opzichte der dubbeldraaiing α, d. w. z. deze kracht behoort met de eersten tot hetzelfde complex.

Even eenvoudig is de afleiding der evenwichtsvoorwaarden voor 9 krachten.

Immers 8 krachten bepalen een enkelvoudig-oneindige schaar van complexen welker bijbehoorende dubbeldraaiingen $\alpha + \lambda\alpha'$ alle reciprook zijn t. o. van elk dezer 8 krachten. Zij moeten dus eveneens reciprook zijn ten opzichte van de met deze in evenwicht zijnde negende kracht; m. a. w. deze laatste moet behooren tot alle lineaire complexen waartoe de 8 andere behooren.

Enzoovoorts.

VI. We willen nu nog met enkele woorden aangeven op welke wijze men tot een uitbreiding van de schroeventheorie van BALL kan geraken door toepassing van het beginsel van verwisseling van ruimte-element op de vergelijkingen $\sum_1^{10} a_i \xi_i = 0$.

Door deze vergelijking te interpreteeren, hetzij:

1°. als voorwaarde van vereenigde ligging van een punt X en een R_8 Ξ in R_9,

2°. als voorwaarde van reciprociteit (BALL) van een dyname X en een dubbeldraaiing Ξ,

legt men verband tusschen de punt- en R_8-meetkunde in R_9 eenerzijds en de meetkunde van dynamen en dubbeldraaiing anderzijds.

Met elke stelling der eerstgenoemde correspondeert dan een stelling der laatstgenoemde meetkunde. Nu doet zich het merkwaardige feit voor dat de *fundamenteele stellingen der meetkunde van R_8 correspondeeren*

met de fundamenteele stellingen der schroerentheorie van BALL *in* R_3.

Hierop steunende zullen wij, zij het dan ook slechts door eenige weinige voorbeelden van fundamenteelen aard, laten zien dat de grondbeginselen van een veralgemeening der schroeventheorie op zeer eenvoudige wijze zijn te verkrijgen door transcriptie der eenvoudigste eigenschappen der punt- en R_8-meetkunde in R_9 welke voorbeelden meteen dienst kunnen doen om het bovenopgemerkte omtrent de theorie van BALL in R_3 toe te lichten.

Ter vermijding van breedsprakigheid voeren we de volgende notatie in. We noemen:

dynamoïde het lijnenstelsel, welks geconjugeerde paren als dragers kunnen dien van een dyname.

rotoïde het vlakkenstelsel, welks geconjugeerde paren als dragers kunnen dienen van een dubbeldraaiing. Dynamoïde en rotoïde verhouden zich alzoo tot dyname en dubbeldraaiing als in de notatie van BALL „Screw" tot dyname en schroefbeweging.

Mogen nu de volgende transscripties voldoende zijn om de toepassing van bovengenoemd beginsel toe te lichten.

σX:	Punt X dragende een massa σ.	Dynamoïde X, dragende een dyname van intensiteit X.
$\sigma \Xi$:	R_8 Ξ met een massadichtheid σ.	Rotoïde Ξ dragende een dubbeldraaiing van intensiteit σ.
$(X'X'')$:	Rechte, meetk. plaats der zwaartepunten van variabele massa's in de punten X' en X''.	Dynamoïdenschaar, meetk. plaats der dragers van de resultanten van twee variabele dynamen op de dynamoïden X' en X''.
$(\Xi'\Xi'')$:	R_8-waaier.	Rotoïdenschaar.
	Een rechte heeft steeds een punt met een R_8 gemeen.	Een dynamoïdenschaar bevat steeds een dynamoïde reciprook met een gegeven rotoïde.
	Een R_8 is bepaald door 9 punten.	Er kan steeds een rotoïde bepaald worden die reciprook ligt ten opzichte van 9 dynamoïden.
	p ruimten R_8 snijden elkaar volgens een R_{9-p}.	De dynamoïden, reciprook met de bewegingen van een lichaam met p graden van vrijheid vormen een $(9-p)$-voudig-oneindige schaar.

Enz. enz.

Wij willen nu het bovenstaande toepassen op het vraagstuk: Een dyname te ontbinden volgens *tien* gegeven dynamoïden, zijnde dit vraagstuk een transscr ptie van het volgende:

Op *tien* gegeven punten een massaverdeeling aan te brengen, zoo dat het zwaartepunt in een gegeven punt komt te liggen.

We stellen weer de oplossingen tegenover elkaar.

Men bepale achtereenvolgens:

a. De R_8 door 9 der gegeven punten.	De rotoïde reciprook met 9 der gegeven dynamoïden.
b. De rechte door het overige punt en het zwaartepunt.	De dynamoïdenschaar door de overige dynamoïde en den drager der gegeven dyname.
c. Het snijpunt dezer rechte met de sub *a* gevonden R_8.	De dynamoïde op deze schaar, reciprook ten opzichte van de sub *a* gevonden rotoïde.
d. De ontbinding der massa in het zwaartepunt volgens dit snijpunt en het sub *b* genoemde 10de punt, welke mogelijk is wijl deze drie punten op één rechte liggen, geeft in eens de in het laatstgenoemde punt aan te brengen massa.	De ontbinding der gegeven dyname volgens de sub *c* gevonden dynamoïde en de sub *b* genoemde 10de dynamoïde, welke mogelijk is wijl deze drie dynamoïden tot een zelfde schaar behooren, geeft in eens de intensiteit der dyname op laatstgenoemde dynamoïde.
(Het andere moet nl. noodzakelijk het zwaartepunt worden der overige 9 punten),	(De andere moet nl. noodzakelijk de resultante dragen der in de overige 9 dynamoïden aan te brengen dynamen).
e. Deze bewerkingen te herhalen voor de massabepaling in de andere punten.	Deze bewerkingen te herhalen voor de intensiteitsbepaling op de andere dynamoïden.

Zalt-Bommel, 28 Maart 1907.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels" II.*

(Vervolg van bladzijde 704).

Wij zullen om de beschrijving van den loop der q-lijnen, in geval de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanwezig is, niet te lang te onderbreken, het tot later uitstellen de temperatuur te bepalen, waarbij deze meetkundige plaats verdwenen is, en de waarde van x en v te zoeken voor het punt waarin zij verdwijnt, — en nu overgaan tot het aangeven van de wijziging in den loop der q-lijnen, welke van haar bestaan het gevolg is.

Uit de waarde van $\frac{dv}{dx_q} = -\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d^2\psi}{dxdv}}$ volgt, dat wanneer een q-lijn gaat door de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, zij in dusdanig snijpunt gericht is evenwijdig aan de x-as. Een q-lijn, welke $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ ontmoet, zal dus twee maal evenwijdig aan de x-as gericht zijn en een gedaante hebben als in fig. 3 is voorgesteld — ten minste zoolang de kromme

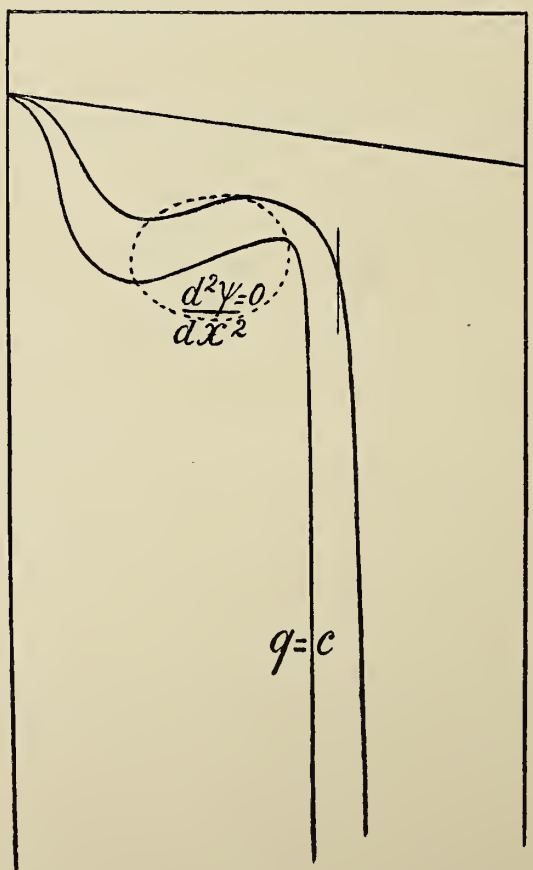


Fig. 3.

$\frac{d^2\psi}{dxdv} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ niet aanwezig is. Een dergelijke gedaante voor de q-lijnen zal dus kunnen voorkomen, in het geval dat de tweede component grooter waarde van b heeft, en lager waarde van T_k —

en als de temperatuur laag genoeg is zal zulk een gedaante in het genoemde geval zeker voorkomen.

Er is dan een groep van q-lijnen, bij welke maximumvolume en minimumvolume voorkomt. De eene uiterste dezer groep van q-lijnen, nl. die waarbij q de grootste waarde bezit, is die waarbij maximum- en minimumvolume zijn samengevallen en welke raakt aan de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ in het punt, waarin deze kromme zelve het kleinste volume heeft. De andere uiterste dezer groep van q-lijnen, nl. die waarbij q de kleinste waarde bezit, is die waarbij wederom maximum- en minimumvolume zijn samengevallen, en welke evenzeer raakt aan de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^3} = 0$, maar in dat punt waarin deze kromme zelve haar grootste volume heeft. Voor die beide raakpunten geldt dus de vergelijking $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$. Deze beide raakpunten worden dus gevonden door te zoeken, waar de krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$ elkander snijden. De laatste meetkundige plaats blijkt van de temperatuur onafhankelijk te zijn, daar wij $\frac{d^3a}{dx^3}$ gelijk 0 mogen stellen. Uit de vergelijking van bladz. 703 vinden wij:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3} = MRT \left\{ -\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2} + 2\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^3}{(v-b)^3} + \frac{\frac{d^2b}{dx^2}}{(v-b)^2} \right\} = 0.$$

Verwaarloozen wij $\frac{d^2b}{dx^2}$ dan vinden wij uit $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$

$$\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} = \sqrt[3]{\frac{1-2x}{2x^2(1-x)^2}}$$

De meetkundige plaats $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$ komt dus alleen voor in de linkerhelft der figuur of voor waarden van x beneden $\frac{1}{2}$. De lijn $x = {}^1/_2$ is een asymptoot voor deze kromme, en eerst bij oneindig volume wordt deze waarde van x bereikt. En daar voor $x = 0$ ook $v-b=0$ moet zijn, ontspringt de kromme $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$, in hetzelfde punt, van waaruit alle q-lijnen uitgaan. Mocht $\frac{d^2b}{dx^2}$ niet gelijk 0 zijn, dan hebben wij reden deze grootheid positief te stellen (Cont. II, pag. 21) en

komen wij voor het beginpunt en eindpunt der kromme $\frac{d^3\psi}{dx^2} = 0$ tot hetzelfde besluit.

De punten der kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, waar raaklijnen aan haar getrokken kunnen worden // aan de x-as, liggen dus zeker bij waarden van x kleiner dan $\frac{1}{2}$, en de twee uitersten van de groep der q-lijnen met maximum- en minimumvolume hebben hun horizontale raaklijnen dus evenzeer in de linkerhelft der figuur. De q-lijn met de hoogste waarde van q bij kleinere waarde van x dan de andere uiterste der groep. Dit is voorgesteld in fig. 4.

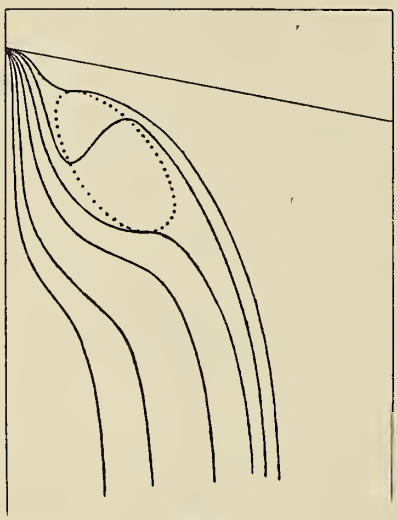


Fig. 4.

Te gelijkertijd merken wij op dat de punten, waarin een q-lijn de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanraakt, buigpunten voor zulk een q-lijn zijn, evenzeer als dat het geval is met de p-lijnen als een p-lijn de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ aanraakt. Uit

$$q = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_v$$

volgt

$$\frac{d^2\psi}{dxdv}\left(\frac{dv}{dx}\right)_q + \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

en

$$\frac{d^2\psi}{dxdv}\frac{d^2v}{dx^2}_q + \left\{\frac{d^3\psi}{dxdv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_q^2 + 2\,\frac{d^3\psi}{dx^2dv}\left(\frac{dv}{dx}\right)_q + \frac{d^3\psi}{dx^3}\right\} = 0.$$

In de genoemde punten is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q = 0$, omdat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en is tegelijkertijd $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$. Bijgevolg $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0$, iets dat ook onmiddellijk uit de figuur blijkt.

Binnen de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, heeft elke q-lijn, die haar snijdt, evenzeer een buigpunt, omdat deze in haar loop van minimumvolume tot maximumvolume moet overgaan. En is dus tusschen de twee

punten, waarin horizontale raaklijnen aan $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ kunnen getrokken worden, een aaneengeschakelde reeks van punten waarin de q-lijnen buigpunten bezitten. Maar evenzeer is er links van de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dus bij kleinere waarde van x een aaneengeschakelde reeks van punten, waarin de q-lijnen buigpunten moeten bezitten. Elke q-lijn toch heeft even nadat zij den oorsprong verlaat haar bolle zijde naar de x-as gekeerd. Zal zij de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ in horizontale richting binnentreden om daar naar kleiner volume te gaan, dán moet zij in dat punt haar holle zijde naar de x-as keeren, en dus vooraf ergens een buigpunt hebben bezeten. Hoogst waarschijnlijk sluit de laatstgenoemde tak zich ergens vloeiend aan de eerstgenoemde. Is dat zoo, dan is er een gesloten kromme waarin $\frac{d^2v}{dx^2_q} = 0$ is — en het laat zich dan verwachten, dat bij stijging van T deze gesloten kromme zich samentrekt, om boven zekere temperatuur verdwenen te zijn. Maar dit en meerdere andere bijzonderheden, blijve aan later onderzoek overgelaten.

Wij hebben nu den loop der q-lijnen beschreven 1° in het geval dat noch $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, noch $\frac{d^2\psi}{dxdv}$ gelijk 0 is, 2° in het geval dat de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ aanwezig is, 3° in het geval dat de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanwezig is. Er blijft dus nog over den loop der q-lijnen na te gaan als beide krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ aanwezig zijn.

Voor de tegenwoordigheid van de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ is alleen noodzakelijk dat $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief zij, zooals wij steeds zullen onderstellen en dat T beneden de waarde der temperatuur is, waarbij de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ tot een enkel punt is samengetrokken. Zij kan dus tegenwoordig zijn bij elk binair stelsel, zonder dat op de keus der componenten behoeft gelet te worden. Maar de tegenwoordigheid der kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ is niet altijd mogelijk, gelijk wij reeds hebben aangetoond bij de bespreking van den loop der isobaren. Raadpleegt men fig. 1 (bladz. 691 Verslag van 6 Maart jl.), dan

blijkt dat de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ niet over de geheele breedte der isobarenfiguur aanwezig is.

Bij mengsels, waarbij de loop der isobaren is, zooals in het linkergedeelte der figuur het geval is, is de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ in het geheel niet aanwezig. Eerst bij mengsels, waarbij de isobarenloop door het middengedeelte van fig. 1 is voorgesteld komt zij voor en kan zij, als de asymptoot aanwezig is, bij allerlei volumes voorkomen. Ook bij mengsels, waarbij de isobarenloop door het rechtergedeelte van fig. 1 is voorgesteld, is zij aanwezig, maar dan alleen bij zeer kleine volumes en bezit zij alleen den tak die asymptotisch nadert tot de lijn $v = b$.

Denken wij nu een mengsel zoodanig gekozen dat de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ werkelijk aanwezig is, bij zoodanige temperatuur, dat ook de kromme $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ aanwezig is, dan moeten wij nog onderscheiden tusschen twee gevallen, en wel 1^0 als de twee genoemde meetkundige plaatsen elkander niet snijden en 2^0 als zij elkander snijden. Snijden zij elkander niet, en is de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ rechts gelegen van $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$, dan zal de lijn, nadat zij daar maximum- en minimumvolume heeft gehad, de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ snijden, en dat snijpunt een raaklijn // v-as bezitten en verder weder naar kleiner volume terugloopen, evenals dit in Fig. 2 het geval is met een der geteekende q-lijnen. Dit zal bijv. kunnen voorkomen bij mengsels beantwoordende aan de linkerstrook der isobarenfiguur, als deze strook zoo breed is, dat ook de asymptoot en een verder gedeelte der kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ aanwezig is. Mocht bij niet snijding de relatieve stand der beide krommen $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ juist andersom zijn, dan zal dit wel niet anders kunnen voorkomen dan bij mengsels die beantwoorden aan een strook der isobarenfiguur welke ver aan den rechterkant gekozen is. De loop der q-lijnen, welke dan door de kromme $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ gaan, is voorgesteld in Fig. 5. Maar als de twee

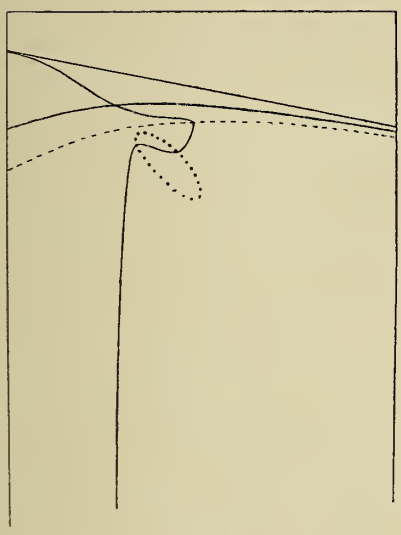


Fig. 5.

krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$ elkander snijden, wat dan noodwendig in 2 punten het geval is, is de loop der q-lijnen veel ingewikkelder. Dan is in

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_q=\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)_v}$$

teller en noemer gelijk nul en is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ uit deze vergelijking niet te bepalen. Dan moet $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ bepaald worden uit:

$$\left(\frac{d^3\psi}{dxdv^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)_q^2+2\left(\frac{d^3\psi}{dx^2dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)_q+\left(\frac{d^3\psi}{dx^3}\right)=0.$$

Bij de bespreking van den loop der p-lijnen hebben wij een analoog geval ontmoet, als de krommen $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv}=0$ elkander snijden; en daarbij hebben wij gevonden dat de beide snijpunten een verschillend karakter hadden. Voor het eene snijpunt heeft de p-lijn twee verschillende reëele richtingen, afhankelijk van het teeken van $\frac{d^3\psi}{dv^3}\frac{d^3\psi}{dvdx^2}-\left(\frac{d^3\psi}{dxdv^2}\right)^2$. Was die uitdrukking negatief dan ging door dat snijpunt de strik-isobare. Evenzoo, als wij uit bovenstaande tweede machtsvergelijking voor $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ de voorwaarde opschrijven voor het reëel zijn der wortels, vinden wij den eisch:

$\left[\frac{d^3\psi}{dx^3}\frac{d^3\psi}{dxdv^2}-\left(\frac{d^3\psi}{dx^2dv}\right)^2\right]$ negatief;

welke onmiddellijk uit de voorwaarde voor den strik der *strik-isobare* kan gevonden, als eisch

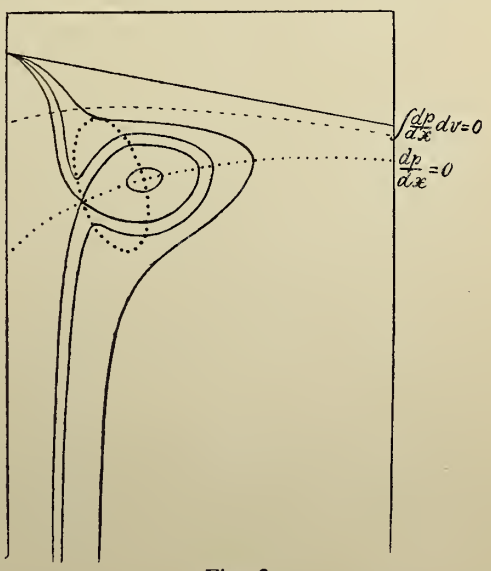


Fig. 6.

voor den strik der *strik-q-lijn*, als wij x en v met elkander verwisselen.

De q-lijn welke door het eerste punt gaat, waar bovenstaande voorwaarde negatief is, is dus een werkelijke striklijn, en loopt om het andere snijpunt heen alvorens voor de tweede maal door het strikpunt te gaan. In Fig. 6 is de gestippelde gesloten kromme $\frac{d^3\psi}{dx^2} = 0$ geteekend, benevens de gestippelde kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = -\left(\frac{d^2\psi}{dvdx}\right) = 0$. Het snijpunt, dat links gelegen is, is het strikpunt. In dat punt is volgens het vroeger opgemerkte, $\frac{d^3\psi}{dx^3}$ negatief en is, wat ook uit het vroeger behandelde omtrent het teeken van $\frac{d^2p}{dxdv} = -\frac{d^3\psi}{dxdv^2}$ af te leiden is, de grootheid $\frac{d^3\psi}{dxdv^2}$ positief. Aan het kenmerk voor het reëel zijn der twee richtingen van $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ is in dat snijpunt dus voldaan. In het tweede snijpunt is $\frac{d^3\psi}{dx^3}$ positief en ook $\frac{d^3\psi}{dxdv^3}$ positief. Daaruit volgt wel niet dat $\frac{d^3\psi}{dx^2}\frac{d^3\psi}{dxdv^2} > \left(\frac{d^3\psi}{dvdx^2}\right)^2$ is — maar 1° blijkt bij de teekening der strik-q-lijn, dat er geen andere mogelijkheid is, dan dat zij om het tweede snijpunt heenloopt en 2° blijkt, evenals wij voor het analoge geval voor den loop der p-lijnen hebben opgemerkt (Noot bladz. 691), dat eerst als de beide snijpunten samenvallen, dus als de twee krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ elkander raken, de grootheid $\frac{d^3\psi}{dx^3}\frac{d^3\psi}{dxdv^2} - \left(\frac{d^3\psi}{dvdx^2}\right)^2$ gelijk 0 is. Natuurlijk dat in het geval als $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ grooter afmetingen heeft, dus bij lager temperatuur, de strik-q-lijn veel meer nog naar rechts reikt, en de hoogere q-lijnen sterk samengedrongen moeten zijn bij het punt, waar de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ de tweede as snijdt (de lijn $x = 1$).

Deze strik-q-lijn is bepalend voor den loop van al de overige q-lijnen. Zoo gaat Fig. 6 een iets hoogere q-lijn even boven het strikpunt in horizontale richting door $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, stijgt dan tot zij voor de tweede maal door deze kromme gaat, bereikt haar hoogste punt

en ontmoet daarna de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ in vertikale richting, om na nog tweemaal horizontaal gericht te zijn geweest, haar weg naar beneden te vervolgen.

Zij moet dan weder asymptotisch naderen tot die waarde van x, waarin zij kort na het begin van haar loop de lijn $\int \frac{dp}{dx}\, dv = 0$ sneed. Deze lijn is ook in fig. 6 geteekend. Het is duidelijk, dat deze de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ niet snijden mag. In fig. 6 is zij dan ook geheel beperkt gebleven tot kleinere volumes dan die der kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$. Het aannemen toch van snijding brengt mede, dat een q-lijn de meetkundige plaats $\int \frac{dp}{dx}\, dv = 0$ meermalen zou kunnen ontmoeten. Daar in een zoodanig ontmoetingspunt $q = MRT\, l \frac{x}{1-x}$ is, volgt daaruit, dat bij gegeven q slechts één enkele waarde van x behooren kan. Het verdient opmerking, dat wij aldus zonder eenige berekening de stelling kunnen uitspreken: „De krommen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\int \frac{dp}{dx}\, dv = 0$ kunnen elkander nimmer snijden." Volgens de toestandsvergelijking zou dat dus luiden: „De vergelijkingen

$$MRT \left\{ \frac{1}{x\,(1-x)} + \frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} \right\} = \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v} \quad \text{en} \quad \frac{MRT\,\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{\frac{da}{dx}}{v}$$

kunnen geen oplossing gemeen hebben. En als men dan ook uit de tweede vergelijking v uitdrukt in x en T en deze waarde substitueert in de eerste, verkrijgt men de volgende tweede machtsvergelijking in MRT:

$$(MRT)^2 \left\{ \frac{1}{x\,(1-x)} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \frac{1}{b}\,\frac{db}{dx}\,\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}} \right\} -$$

$$- 2\,(MRT) \left\{ \frac{1}{b^2}\,\frac{db}{dx}\,\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\,\frac{1}{2}\,\frac{d^2a}{dx^2} \right\} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{da}{da}\right)^2 = 0.$$

Een waarde van MRT, welke noodwendig positief moet zijn, om

beteekenis te hebben, eischt $\frac{1}{b^2}\frac{db}{dx}\frac{da}{dx} > \frac{1}{2b}\frac{d^2a}{dx^2}$. Uit het voorgaande blijkt voldoende dat $\frac{da}{dx}$ positief moet zijn om de meetkundige plaats $\int \frac{dp}{dx}\,dv = 0$ mogelijk te maken, en dat $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief moet zijn om $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ mogelijk te maken. De wortels der gegeven tweedemachtsvergelijking zijn dan echter imaginair, daar het kwadraat van $\frac{1}{b^2}\frac{db}{dx}\frac{da}{dx} - \frac{1}{2b}\frac{d^2a}{dx^2}$ noodwendig kleiner is dan het kwadraat van $\frac{1}{b^2}\frac{db}{dx}\frac{da}{dx}$ en het kwadraat daarvan kleiner is dan het product van $\frac{1}{b^2}\left(\frac{da}{dx}\right)^2$ en den factor van (MRT):

Maar keeren wij tot de beschrijving van den loop der overige q-lijnen terug. Er is natuurlijk een hoogste q-lijn, welke de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ slechts aanraakt, in dat aanrakingspunt horizontaal gericht is, en voor welke, in dat punt ook $\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$ is. Evenzoo is er een q-lijn, welke de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ in haar benedenste punt aanraakt, en welke in den regel een andere zal zijn dan die welke haar in haar bovenste punt aanraakt. De q-lijnen van hoogeren graad dan de hoogste dezer twee, hebben weder het eenvoudige beloop, dat wij in fig. 2 (bladz. 700) hebben geteekend voor die q-lijn, welke de meetkundige plaats $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ snijdt. Alleen zullen zij alle door haar groote verbreeding naar den kant van den tweeden component nog in meerdere of mindere mate den invloed toonen van het bestaan der boven beschreven complicatie. De q-lijnen van lageren graad dan de strik-q-lijn zijn in twee deelen uiteengevallen. Een links gelegen gedeelte, dat het normale verloop vertoont van een q-lijn, die $\left(\frac{dp}{dv}\right)_v = 0$ snijdt; en een afgesnoerd gedeelte dat binnen den strik besloten blijft. Zulk een afgesnoerd gedeelte loopt om het tweede snijpunt dat $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$

en $\frac{d^3\psi}{dx^2} = 0$ gemeen hebben, gaat in het hoogste en laagste punt door $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en in het meest rechts- en meest linksgelegen punt door $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Bij voortgaande vermindering van den graad van q krimpt dit afgesnoerd gedeelte samen, om als geïsoleerd punt te verdwijnen. Dit geschiedt alvorens q tot negatief oneindig is afgedaald, zoodat q-lijnen van zeer lagen graad geheel het eenvoudige beloop teruggekregen hebben, dat zulke lijnen hebben als alleen de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ aanwezig is.

Ook in dit algemeenste geval voor den loop der q-lijnen kan men zich een voorstelling vormen omtrent de meetkundige plaats der buigpunten van deze lijnen, dus van de punten waarin $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0$ is. Hierboven hebben wij reeds opgemerkt dat als de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ aanwezig is, en op een zekeren afstand daarvan verwijderd bij grooter volume buigpunten der q-lijnen moeten zijn. Mocht ook de asymptoot der $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ kromme aanwezig zijn, dan heeft ook deze reeks van buigpunten der q-lijnen blijkbaar dezelfde asymptoot. In fig. 6 ligt deze asymptoot buiten de figuur, en is zij dus niet aanwezig — maar het overige gedeelte is wel aanwezig, echter in haar gedaante gewijzigd door de aanwezigheid van het strikpunt. De genoemde reeks van buigpunten moet nu veeleer beschouwd worden, als bestaande uit twee reeksen die in het strikpunt samen komen, en dus daar tot in de onmiddellijke nabijheid der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ gekomen zijn. Er komt dus een reeks van links, die naarmate zij het strikpunt nadert dichter bij $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ komt, en er gaat van uit het strikpunt een reeks naar rechts, die eerst binnen de ruimte blijft, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ is, en die door het laagste punt dezer kromme gaat maar dan verder naar den kant van den tweeden component beweegt bij grooter volume dan dat der kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Het strikpunt der q-striklijn is dus ook strikpunt voor de meetkundige plaats der buigpunten der q-lijnen, en de voortzetting der twee takken, die wij

hierboven noemden, moet boven de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ gevonden worden. Wij hebben daar dan ook een rechtertak, die binnen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ loopt en door het hoogste punt dezer kromme gaat, en een linkertak, welke van uit het strikpunt links van de strik-q-lijn loopt, en met den vorigen tak waarschijnlijk samenvloeit. Is dat het geval dan hebben de q-lijnen van uitersten rang, zoowel die van zeer lagen als van zeer hoogen, geen buigpunten.

DE SPINODALE LIJN EN DE PLOOIPUNTEN.

De spinodale lijn is de meetkundige plaats der punten, waarin een p en een q-lijn elkander aanraken. In deze punten is $\frac{dv}{dx_p} = \frac{dv}{dx_q}$ en dus $-\frac{\frac{d^2\psi}{dxdv}}{\frac{d^3\psi}{dv^2}} = -\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d^2\psi}{dxdv}}$ of $\frac{d^3\psi}{dv^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{d^2\psi}{dxdx}\right)^2$. Ten einde over het bestaan van zulke aanrakingspunten te kunnen oordeelen, zullen wij dus de p en de q lijnen gelijktijdig moeten aanbrengen. De loop der p lijnen is, zooals uit fig. 1 bladz. 691 blijkt, zeer verschillend naar gelang men een strook kiest, gelegen aan de linkerzijde of in het midden of aan de rechterzijde; maar de loop der q lijnen is in de verschillende strooken in zoover onafhankelijk van de keuze der strooken, dat steeds $q_{-\infty}$ de reeks der mogelijke volumes van den eersten component voorstelt, en $q_{+\infty}$ de reeks der mogelijke volumes van den tweeden component, benevens de lijn der limietvolumes. Daar de loop der p lijnen zoo verschillend zijn kan, zullen wij dus niet door een enkele figuur de gedaante der spinodale lijn kunnen aangeven. Daarenboven hangt de loop der p lijnen af van de al of niet aanwezigheid van de kromme $-\frac{dp}{dv} = \frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, en de loop der q lijnen van de al of niet aanwezigheid van de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en nog daarenboven, en dat geldt voor beiden, van de al of niet aanwezigheid van de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$. Wilden wij dan ook in alle mogelijke gevallen den gang der spinodale lijn in bijzonderheden door figuren ophelderen, dan zou dit onderzoek te zeer gerekt worden. Wij zullen ons dus moeten beperken, en er naar trachten ten minste de hoofdzaken te bespreken.

Kiezen wij daartoe in de eerste plaats een strook uit de linkerzijde der algemeene p figuur, en denken wij de temperatuur laag genoeg, dus beneden $(T_k)_2$, om over de geheele breedte der strook nog twee gescheiden takken voor de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ te hebben.

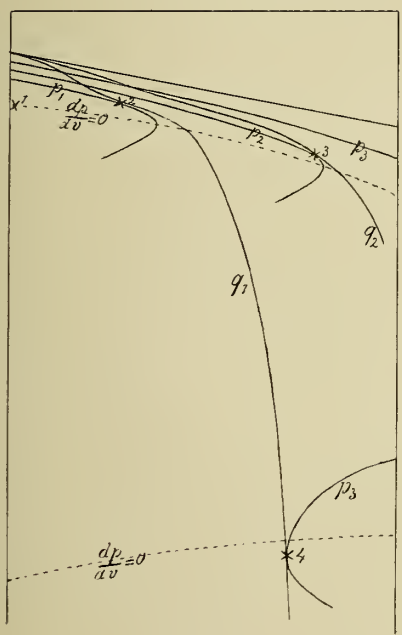


Fig. 7.

In fig. 7 is T gedacht hooger dan de temperatuur, waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt, en in fig. 8 beneden deze temperatuur. In fig. 7 hebben alle q lijnen den zeer eenvoudigen loop, welken wij daarvoor vroeger hebben aangegeven, en de p lijnen den bekenden loop waarbij $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ positief is aan de vloeistofzijde van $\frac{dp}{dv} = 0$ en aan de dampzijde van $\frac{dp}{dv} = 0$, negatief tusschen de beide takken dezer kromme, terwijl de overgang van $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ positief tot negatief plaats heeft door oneindig groot. De isobaren p_1, p_2 en p_3 zijn in de figuur aangegeven, waarbij $p_1 < p_2 < p_3$ is. Evenzoo een paar q lijnen, $q_1 < q_2$, en de aanrakingspunten van p_1 aan q_1 en van p_3 aan q_2. Evenzoo aan de dampzijde een aanrakingspunt van p_3 aan q_1. Het is 1°. duidelijk dat elke q lijn twee punten oplevert voor de spinodale lijn en 2°. dat deze aanrakingspunten buiten het gebied liggen waarin $\frac{dp}{dv}$ positief is. Aan den anderen kant ziet men dat de afstand van de spinodale lijn tot de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ nergens zeer groot kan zijn. Aan de dampzijde is het slechts door nauwkeurig te teekenen te bereiken, dat het duidelijk blijkt dat de spinodale lijn steeds iets grooter volume heeft dan de damptak der kromme $\frac{dp}{dv} = 0$. Trouwens in de 4 punten, waarin $\frac{dp}{dv} = 0$ de kanten snijdt, valt de spinodale lijn met deze kromme samen.

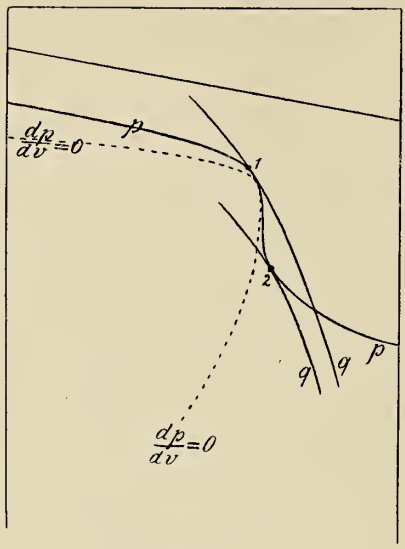


Fig. 7*b*.

Ten einde de omstandigheden bij het plooipunt te kunnen overzien is ook fig. 7*b* geteekend. Bij $T > (T_k)_2$ zijn de beide takken der kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ ineengevloeid, en wel bij die waarde van x, voor hetwelk $T = (T_k)_x$ is. Een p lijn, en wel die van de waarde $p = (p_k)_x$ raakt in het punt, waarin de beide takken bij een volume $v = (v_k)_x$ zijn ineengevloeid en heeft daar een buigpunt. Aan deze p lijn zijn twee deelen van q lijnen rakend getrokken. De twee raakpunten (1) en (2) zijn punten der spinodale lijn, en liggen weder buiten de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$. Bij een hoogere p lijn zullen deze punten dichter bijeenkomen. En de plaats waarin zij samenvallen is het plooipunt. Daar in punt (1) $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p > \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ en omgekeerd in punt (2) $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q > \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$, zal als (1) en (2) zijn samengevallen $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$, en dit kan als kenmerk voor het plooipunt gelden, zoodat voor zoodanig punt de twee vergelijkingen gelden:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q$$

en

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q.$$

De volgende opmerking is misschien niet overbodig. In punt (2) is $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ niet alleen kleiner dan $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$, maar zelfs negatief. Om het plooipunt te verkrijgen, het punt waarin 2 raakpunten voor de q en de p lijnen samenvallen, en dus $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ en $\left(\frac{d^2v}{dx^2}_q\right)$ evengroot zijn, moet $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ in het punt (2), nog eerst van teeken veranderen, bij verhooging van den graad der isobare alvorens de gelijkheid met

$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ verkregen kan worden. En dat, ten minste in dat geval, die teekenverandering met het punt (2) en niet met het punt (1) moet geschieden blijkt uit de steeds positieve waarde van $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_g$. Wij komen hier aldus tot de reeds vroeger bekende stellingen dat in het plooipunt de isobare de spinodale lijn, en evenzeer de binodale lijn omhult.

Daar

$$dv_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^2v}{dx^3}\right)_p dx^3 \text{ enz.}$$

en

$$dv_q = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q dx^3 \text{ enz.}$$

vinden wij voor een plooipunt:

$$dv_p - dx_q = \frac{1}{1.2.3}\left\{\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_p - \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q\right\} dx^3 \text{ enz.}$$

De p en de q lijnen in een plooipunt raken en snijden dus elkander en daarin komt nog niet altijd verandering als een punt een dubbel plooipunt mocht zijn. Wij zullen nl. later zien, dat het kenmerk somtijds voor een dubbelplooipunt aldus luidt:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q$$

en

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0.$$

Gaan wij nu over tot de behandeling van het geval, voorgesteld door fig. 8. Daarbij is ondersteld dat T beneden de temperatuur ligt, waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt, en dat dus deze meetkundige plaats aanwezig is, terwijl daarenboven ondersteld is dat zij de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ snijdt. Uit deze teekening blijkt dat voor de q lijnen, waarbij maximum- en minimumvolume voorkomt, in de nabijheid der punten van grootste en kleinste volume twee nieuwe raakpunten met de p lijnen noodzakelijk moeten voorkomen, ten minste voor zoo ver deze punten liggen aan de vloeistofzijde van $\frac{dp}{dv} = 0$.

Er is dus een groep van q lijnen, waarop 4 punten van de spinodale lijn voorkomen, en welke dus de spinodale lijn in 4 punten snijden zullen. De twee nieuwe raakpunten liggen ter wederzijde van

$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en deze twee nieuwe raakpunten verwijderen zich niet ver van deze kromme, terwijl de twee oude raakpunten niet ver van $\frac{dp}{dv} = 0$ verwijderd zijn.

Laat men de waarde van q stijgen dan naderen de twee nieuwe raakpunten tot elkander. Zoo is bijv. in de figuur ook nog geteekend de q lijn, welke $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ in haar hoogste punt aanraakt en voor welke $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q = 0$ en ook $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0$ is in dat punt. Ook aan die q lijn kunnen nog twee verschillende p lijnen raken, welke echter in de teekening niet aangebracht zijn. Voor een nog hoogere q lijn zouden deze punten samenvallen, en door het samenvallen van twee punten der spinodale lijn zou dan een plooipunt gevormd worden. Daar in dit geval $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ steeds positief is, moet $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$, dat in het aan de linkerzijde gelegen punt lang negatief geweest is, eerst van teeken veranderen alvorens het met het rechts gelegen punt kan samenvallen — een opmerking analoog aan die welke wij maakten voor het plooipunt, dat wij hierboven bespraken.

Laat men de waarde van q integendeel dalen, dan zal het meest links gelegen raakpunt zich meer en meer verwijderen van de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en steeds meer naderen tot de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$, totdat, voor q lijnen van zeer lagen rang, waarbij zoo als wij dadelijk zien zullen het aantal raakpunten weder tot twee is afgedaald, het geheel het gewone karakter draagt van een aan de vloeistofzijde gelegen raakpunt.

Maar omtrent de twee middenste raakpunten van de vier, welke op de bovengenoemde q lijn aanwezig zijn, valt iets bijzonders op te merken. Als de q lijn in graad daalt, zullen deze punten tot elkander naderen, en op een bepaalde q lijn zullen zij samenvallen. Dan hebben wij weder een plooipunt. In dit geval behoeft noch $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$, noch $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$, van teeken te veranderen, daar deze grootheden voor elk der twee nog niet samengevallen raakpunten steeds hetzelfde teeken hebben, n.l. in dit geval het positieve teeken. Maar toch is er ook in dit geval weder behalve raking ook snijding van de p en q lijnen. Links van dit plooipunt ligt de q lijn bij grooter volumes, rechts daarentegen bij kleiner volumes dan de p lijn, welke laatste

trouwens spoedig daarna haren loop weder van rechts in een naar links gaande verandert.

Dit plooipunt is echter niet te verwezenlijken. Bij de twee hierboven besproken plooipunten ligt de geheele p en de geheele q lijn, ten minste in de nabijheid van dat punt, buiten de spinodale lijn, en dus in het stabiele gebied. In dit geval liggen zij binnen het labiele gebied.

Vatten wij het omtrent fig. 8 behandelde samen, dan is er dus een groep van q-lijnen welke de spinodale lijn in vier punten snijden. De uitersten van deze groep gaan door plooipunten. Die met de hoogste waarde van q gaat door het te verwezenlijken plooipunt, dat met de laagste waarde van q gaat door het plooipunt, dat niet verwezenlijkt kan worden. Al de q-lijnen welke buiten deze groep liggen snijden de spinodale lijn slechts in twee punten. Mocht echter de gekozen temperatuur boven $(T_k)_2$ liggen, dan zullen de q-lijnen van nog hoogeren graad dan van die, welke door het dampvloeistofplooipunt gaat, de spinodale lijn niet meer snijden.

En ten slotte nog een enkele opmerking over de spinodale lijn, die in het geval van fig. 8 kan voorkomen. Wij hebben, door dat wij de lijn $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ elkander hebben laten snijden, een gebied, waarin èn $\frac{\partial^2\psi}{dv^2}$ èn $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is. In een dergelijk gebied is het product dezer grootheden toch weder positief en kan het gelijk worden aan $\left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2$. Mocht dit het geval zijn, dan geschiedt dit weder in een meetkundige plaats, welke een gesloten kromme vormt. Binnen dat gebied is dan er weder een gedeelte van de spinodale lijn dat van de besproken spinodale lijn geheel afgezonderd is. Omtrent den loop der p- en q-lijnen beteekent dit, dat daar zoowel $\frac{dv}{dx_p}$ als $\frac{dv}{dx_q}$ negatief is; en dat dus raking niet onmogelijk is. Een dergelijk afzonderlijk gedeelte eener spinodale lijn omsluit dan een stuk van het ψ-vlak, dat van onderen gezien concaaf-concaaf is. Beschouwen wij de punten binnen de spinodale lijn gelegen als voorstellende labiele evenwichten, dan zijn de punten binnen dit afzonderlijke gedeelte der spinodale lijn „a fortiori" labiel. Daar de aanwezigheid van een dergelijk gedeelte eener spinodale lijn niet kan bijdragen tot het doen begrijpen van de toestanden die voor verwezenlijking vatbaar zijn, zullen wij daaraan verder geen aandacht wijden.

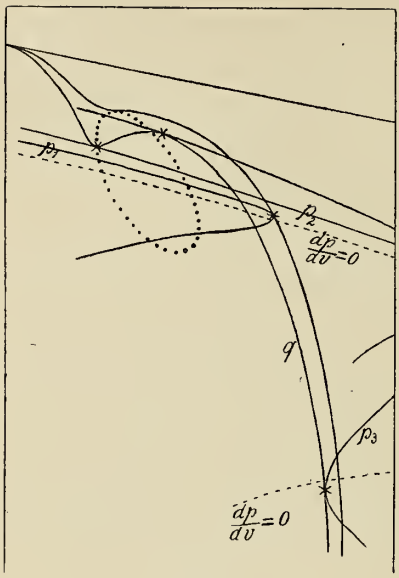


Fig. 8.

Uit deze beschrijving en uit de teekening (fig. 8) blijkt dat de spinodale lijn in dat geval een gecompliceerder loop heeft, dan zij hebben zou, als de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ niet aanwezig was. Zij heeft aan de vloeistofzijde een stuk waarin zij naar kleinere volumes heen gedrongen wordt. Toch is er geen aanleiding om hier van een lengteplooi te spreken. Men zou van een meer of minder samengestelde plooi kunnen spreken. Maar den naam van lengteplooi zullen wij eerst geven, als wij een van de gewone plooi geheel afgescheiden gedeelte, dat dan in hoofdzaak in de richting der v-as zal loopen, zullen ontmoeten.

Een belangrijke vraag blijft nu nog te beantwoorden over: „Wat gebeurt er met de spinodale lijn en met de plooipunten bij verhooging der temperatuur?"

Bij de temperatuur iets hooger dan $(T_k)_2$ zijn er in het diagram 3 plooipunten aanwezig. 1°. Het realiseerbare aan den kant der vloeistofvolumes. 2°. Het verborgen plooipunt eveneens aan den kant der vloeistofvolumes. 3°. Het realiseerbare damp-vloeistof-plooipunt. Noemen wij ze achtereenvolgens P_1, P_2 en P_3. Nu zijn er twee mogelijkheden, nl. 1°. dat hij het stijgen der temperatuur P_1 en P_2 elkander naderen en samenvallen, en de plooi, alvorens P_3 bij $T=(T_k)_1$ verdwijnt, haar eenvoudige gedaante heeft hernomen; en 2°. dat bij het stijgen van T de punten P_2 en P_3 samenvallen en verdwijnen, en ook in dat geval de plooi een eenvoudige gedaante hernomen heeft. Alleen is in dat laatste geval het plooipunt bij zeer kleine volumes te verwachten en dus ook bij zeer hoogen druk. Ook dan zijn bij $T=(T_k)_1$ alle heterogene evenwichten verdwenen. Misschien is er dan nog een derde mogelijkheid, nl. als de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ zou verdwijnen bij een temperatuur hooger dan $(T_k)_1$. Dan zou behalve het plooipunt P_1 nog bij $T=(T_k)_1$ een nieuw plooipunt aan den kant van den eersten component optreden. Daardoor zou de plooi een geheel gesloten plooi worden, en eerst boven de tempera-

tuur, waarop $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt, zouden alle heterogene evenwichten verdwenen zijn.

Bespreken wij in het kort deze verschillende mogelijkheden. Wij zullen ons daarbij beperken tot de beschrijving van wat in die gevallen gebeurt, en ten minste voorloopig de vraag onbeantwoord laten van welke eigenschappen der bijeengebrachte stoffen het afhangt of het eene of het andere plaatsgrijpt. Vallen P_1 en P_2 samen, dan moet het gedeelte van de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dat wij in fig. 8 bij kleiner volumes dan die van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ hebben geteekend of geheel of bijna geheel door de verhooging in temperatuur binnen het gebied, waar $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is, zijn gekomen, of misschien is bij verhooging van T de geheele meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwenen.

Nu is bij P_1 in de vroeger gegeven vergelijking:

$$dv_p - dv_q = \frac{1}{1.2.3}\left\{\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_p - \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q\right\} dx^3$$

de factor van dx^3 negatief, maar bij P_2 is deze factor positief. Vallen de punten P_1 en P_2 samen, dan is deze factor $= 0$. Bij het samenvallen dezer plooipunten, door KORTEWEG *heterogene* plooipunten genoemd, is dus behalve $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ en $\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ ook $\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_p = \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q$.

Vallen P_2 en P_3 samen, dan heeft zich $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ samengetrokken bij verhooging der temperatuur. Ook $\frac{d^3\psi}{dx^2} = 0$ trekt zich samen bij verhooging der temperatuur en verplaatst zich zooals ik verder hoop aan te toonen in haar geheel. Maar het samentrekken van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ waarvan de top naar links gaat, geschiedt relatief sneller, zoodat bijv. de top binnen het gebied valt waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is. Het bestaan van het punt P_3 eischt dat $\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$ positief is. Het punt P_2 ligt rechts van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en boven $\frac{d\psi^2}{dv^2} = 0$. Ligt de top van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$

binnen de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dan kan dus noch P_2 noch P_3 meer bestaan. Vóór dien relatieven stand der beide krommen zijn zij dus reeds door samen te vallen verdwenen. Ook in dat geval geldt het samenvallen van *heterogene* plooipunten. Bij P_2 was de factor van dx^3 positief, en bij P_3 is deze factor negatief. Bij het samenvallen is dus $\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_p = \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q$. Bij verdere verhooging van T zal

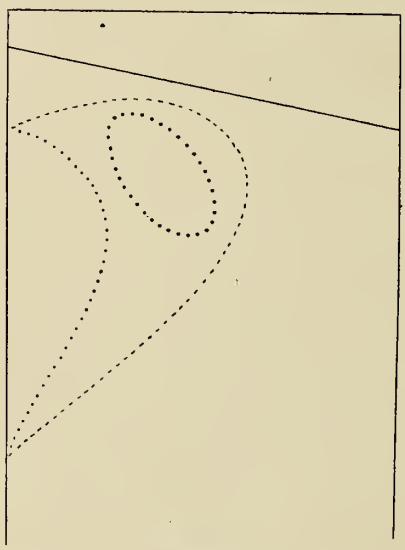


Fig. 9.

echter de top van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ weder buiten het gebied, waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is, moeten komen. De kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ kan zich namelijk niet uitstrekken tot $x = 0$, terwijl de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ bij $T = (T_k)$, haar top bij $x = 0$ heeft. Als gevolg trekken wij daaruit het besluit, dat bij voortgezette verhooging der temperatuur de krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander niet meer snijden zullen maar den stand zullen innemen door fig. 9 aangeduid.

De spinodale lijn loopt om beide krommen heen, en is dus door de aanwezigheid van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, genoodzaakt op buitengewoon grooten afstand te blijven van de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Misschien komt de vraag op, of de spinodale lijn zich niet in twee van elkander gescheiden gedeelten splitsen kan, het eene gedeelte de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ insluitend, en het andere gedeelte om $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ heen loopend. Het antwoord moet dan luiden: waarschijnlijk niet. In de punten tusschen de beide krommen in is wel $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief, maar dan toch klein, terwijl $\frac{d^2\psi}{dx\,dv} = 0$ in de geheele figuur niet voorkomt, en dus

in het algemeen groot zal zijn. Mocht nu de temperatuur waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt liggen boven $(T_k)_1$, dan schuift $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ links van de figuur af, en wordt de spinodale lijn bij $x = 0$ en $T = (T_k)_1$ gesloten, en komt het nieuwe plooipunt te voorschijn, waarvan wij hierboven gesproken hebben. Van dan af hebben wij een spinodale lijn met twee realiseerbare plooipunten. Het in teekening brengen van de kromming der p- en q-lijnen geeft in dit geval veel moeite, omdat beide groepen van lijnen slechts een geringe kromming hebben. Houdt men zich echter aan den regel, dat bij realiseerbare plooide p- en q-lijnen de spinodale lijn omhullen, dan besluit men dat in P_1 de waarde van $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ en $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ positief is en in het andere plooipunt negatief. Bij het samenvallen van deze punten, door Korteweg *homogene* plooipunten genoemd, is $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0$. Boven de temperatuur waarbij dit geschiedt hebben de p- en q-lijnen geen raakpunten meer. Door het wegvallen der meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, is de loop der p-lijnen in hoofdzaak van links naar rechts geworden, dus in de richting der x-as. Door het wegvallen der meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ is de loop der q-lijnen evenzeer vereenvoudigd en ten minste bij een volume dat iets boven het limietvolume is, in hoofdzaak in de richting der v-as.

Vele van de verkregen uitkomsten omtrent den gang van de spinodale lijn en omtrent de plaats der plooipunten, waartoe wij in het voorgaande gekomen zijn door de wijze na te gaan, waarop de p- en de q-lijnen tot onderlinge raking kunnen worden gebracht, kunnen getoetst worden aan de differentiaalvergelijking der spinodale lijn. Deze zal natuurlijk haren dienst kunnen bewijzen ook als wij een andere strook kiezen, dan die welke wij tot hiertoe besproken hebben.

Uit

$$\frac{d^2\psi}{dv^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2 = 0.$$

leiden wij af:

$$\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dv^3} + \frac{d^2\psi}{dv^2}\frac{d^3\psi}{dx^2dv} - 2\frac{d^2\psi}{dxdv}\frac{d^3\psi}{dxdv^2}\right\} dv +$$

$$+ \left\{\frac{d^3\psi}{dx^3}\frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^3\psi}{dxdv^2} - 2\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^3\psi}{dx^2dv}\right\} dx +$$

$$+ \left\{-\frac{d^2\eta}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{d^2\eta}{dv^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\frac{d^2\eta}{dxdv}\frac{d^2\psi}{dxdv}\right\} dT = 0.$$

Tot de gedaante van den factor van dT komen wij door te bedenken, dat uit

$$d\varepsilon = T\,d\eta - p\,dv + q\,dx$$

volgt

$$d\psi = -\eta\,dT - p\,dv + q\,dx$$

zoodat $\left(\frac{d\psi}{dT}\right)_{v,x} = -\eta$ en dus $\frac{d^3\psi}{dT\,dv^2} = -\left(\frac{d^2\eta}{dv^2}\right)_{x,T}$ is, enz.

Deze zeer samengestelde differentiaalvergelijking kan onder eenvoudige gedaante worden gebracht

Beschouwen wij daartoe eerst den factor van dv. Door daarin voor $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ in de plaats te stellen de grootheid $\frac{\left(\frac{d^2\psi}{dx\,dv}\right)^2}{\frac{d^2\psi}{dv^2}}$ en voor $-\frac{\frac{d^2\psi}{dx\,dv}}{\frac{d^2\psi}{dv^2}}$ te schrijven $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$, wordt deze factor:

$$\frac{d^2\psi}{dv^2}\left\{\frac{d^3\psi}{dv^3}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p^2 + 2\,\frac{d^3\psi}{dx\,dv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p + \frac{d^2\psi}{dx^2\,dv}\right\}.$$

Uit $p = -\frac{d\psi}{dv}$ leiden wij af:

$$\frac{d^2\psi}{dv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p + \frac{d^2\psi}{dx\,dv} = 0$$

en

$$\frac{d^2\psi}{dv^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p + \left\{\frac{d^3\psi}{dv^3}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p^2 + 2\,\frac{d^3\psi}{dv^2\,dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)_p + \frac{d^3\psi}{dx^2\,dv}\right\}$$

waaruit blijkt dat wij den factor van dv kunnen schrijven onder den vorm van

$$-\left(\frac{d^2\psi}{dv^2}\right)^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p.$$

Wij zouden op analoge wijze met den factor van dx kunnen te werk gaan, maar kunnen onmiddellijk weder de gedaante van dezen factor vinden door in den factor van dv de grootheid v met x te verwisselen en p met q. Wij vinden dan:

$$-\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)_q.$$

Zoolang wij T constant houden, en voor den gang eener spinodale lijn is dit noodzakelijk, kan de differentiaalvergelijking dus geschreven worden:

$$-\left(\frac{d^2\psi}{dv^2}\right)^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p dv - \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)_q dx = 0.$$

Door in aanmerking te nemen, dat $\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)_q = -\left(\frac{dx}{dv}\right)_q^3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ is, verkrijgen we na herleidingen, welke geen toelichting behoeven, de eenvoudige betrekking:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{spin} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q} \frac{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q}{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p}.$$

Als eerste gevolg van deze vergelijking leiden wij af de stelling, dat $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{spin}$ en $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q}$ gelijk teeken hebben als $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ en $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ gelijk teeken hebben en omgekeerd. Zoo hebben in fig. 7 aan de dampzijde steeds $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ en $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ tegengesteld teeken, en daar $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q}$ positief is, is op den damptak der spinodale lijn $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sptn}$ negatief. Omgekeerd hebben aan de vloeistofzijde de krommingen der p en q lijnen hetzelfde teeken en is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{bin} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q}$ = positief. Mocht daar echter terecht, zooals in punt 2 der spinodale lijn toevallig geteekend is, $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ negatief zijn geweest, dan loopt de spinodale lijn daar met toenemende waarde van x naar kleine volumes. Komen dus op de spinodale lijn punten voor met maximum- of minimumvolume dan moet in die punten $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q = 0$ zijn. Is daarentegen $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{spin}$ oneindig groot, iets wat in het behandelde geval voorkomt als bij $T > (T_k)_2$ de spinodale lijn aan de rechterzijde gesloten is dan moet $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = 0$ zijn, en de p lijn dus in zulk een punt een buigpunt hebben, waartoe trouwens reeds op andere wijze vroeger besloten was. Tal van andere gevolgen zouden uit deze differentiaalvergelijking der spinodale lijn zijn af te leiden. Wij zullen echter nog slechts wijzen op het volgende. In een plooipunt is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{spin} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q}$. Daaruit volgt voor een plooipunt $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$.

Is voor een punt eener spinodale lijn $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{spin}$ onbepaald, dan moeten

en $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ èn $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ gelijk 0 zijn. In twee gevallen komt dit voor, 1°, in een hierboven besproken geval, als de geheele spinodale lijn tot een enkel punt is gereduceerd. 2°. als een spinodale lijn zich in twee takken splitst, zooals bij mengsels, waarbij ook minimum T_k voorkomt, het geval is. In het eerste geval heeft het verdwijnende punt de eigenschappen van een geïsoleerd punt, in het tweede geval van een strikpunt.

De factor van dT in de differentiaalvergelijking der spinodale lijn kan geschreven worden :

$$-\frac{1}{T}\left\{\left(\frac{d^2T\eta}{dx^2}\right)_{vT}\frac{d^2\psi}{dv^2}-2\left(\frac{d^2T\eta}{dxdv}\right)_T\frac{d^2\psi}{dxdv}+\left(\frac{d^2T\eta}{dv^2}\right)_{Tx}\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\}$$

en, door voor $T\eta$ te schrijven $\varepsilon-\psi$, herleid worden tot :

$$-\frac{1}{T}\left\{\frac{d^2\psi}{dv^2}\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}-2\frac{d^2\psi}{dxdv}\frac{d^2\varepsilon}{dxdv}+\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\varepsilon}{dv^2}\right\}$$

of tot

$$-\frac{1}{T}\frac{d^2\psi}{dv^2}\left\{\frac{d^2\varepsilon}{dv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2_{p=q}+\frac{d^2\varepsilon}{dxdv}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p=q}+\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}\right\}.$$

De factor, waarmede $-\frac{1}{T}\frac{d^2\psi}{dv^2}$ vermenigvuldigd moet worden, komt het eerst voor in form. (4) Verslag K. A. v. W. Mei 1895, en aan het slot dier mededeeling heb ik dien factor geschreven onder den vorm

$$-\frac{2a}{v}\left\{\left(\frac{1}{v}\frac{dv}{dx_v}-\frac{1}{2a}\frac{da}{dx}\right)^2+\frac{a_1a_2-a_{12}^2}{a^2}\right\},$$

waaruit blijkt dat in elk geval, als $a_1a_2 > a_{12}^2$ is, deze uitdrukking negatief is. Ik zal ook hier het steeds negatief zijn van dien factor aannemen, maar kom misschien later op een uitvoeriger discussie daaromtrent terug.

Door deze herleidingen kan de differentiaalvergelijking der spinodale lijn aldus geschreven worden :

$$\frac{d^2\psi}{dv^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{pT}dv+\frac{d^2\psi}{dxdv}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{qT}dx+\frac{dT}{T}\left(-\right)=0.$$

Uit deze vergelijking volgt o.a. deze regel omtrent de verplaatsing der spinodale lijn met toeneming van T, dat aan de zijde, waar $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$ positief is, de waarde van v bij standvastige waarde van x toeneemt, èn omgekeerd. De beide takken eener spinodale lijn naderen dus tot elkander bij verhooging der temperatuur. Maar de verdere bijzonderheden, die bij de toepassing der formule zouden kunnen voorkomen, ga ik met stilzwijgen voorbij. Alleen wil ik nog door

eliminatie van dv de differentiaalvergelijking der spinodale lijn afleiden als wij ze gegeven denken door een betrekking tusschen p, x en T. Wij vinden dan:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dp=\left(\frac{dp}{dx}\right)_{v,T}\left[\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{p,T}-\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{q,T}\right]dx+\frac{dT}{T}\left[(-)+T\left(\frac{dT}{dp}\right)_{v,x}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{pT}\right]$$

voor een plooipunt valt de factor van dx weg, en vinden wij terug de vergelijking (4). Verslag K. A. v. W. Mei 1895 voor de plooipuntskromme. Bij constante temperatuur vinden wij voor de spinodale lijn:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{spin}=\left(\frac{dp}{dx}\right)_{v}\left\{1-\frac{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q}{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p}\right\}.$$

(*Wordt vervolgd*).

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*De gedaante der empirische isotherme bij de condensatie van een binair mengsel.*"

Denken wij een molekulaire hoeveelheid van een binair mengsel, met een gewichtshoeveelheid gelijk aan $m_1(1-x)+m_2 x$, bij gegeven temperatuur in een volume, zoo dat een gedeelte in vloeistofphase en het overige gedeelte in dampphase aanwezig is. Noemen wij de fractie welke in dampphase verkeert gelijk aan y. Het punt, dat den toestand van dat mengsel aangeeft ligt dan op een node-lijn, die op de binodale rust. Laat het uiteinde der nodelijn, dat op den vloeistoftak rust door den index 1 worden aangeduid, en het andere uiteinde door den index 2. Stellen wij het molekulairvolume van het uiteinde 1 voor door v_1 en het molekulairvolume van het andere uiteinde door v_2, dan is als v het volume van de in heterogeen evenwicht verkeerende hoeveelheid voorstelt:

$$v=v_1(1-y)+v_2 y$$

terwijl de constante hoeveelheid van x voorgesteld wordt door:

$$x=x_1(1-y)+x_2 y.$$

Hieruit vinden wij:

$$dv=(v_2-v_1)\,dy+(1-y)\,dv_1+y\,dv_2$$

en

$$0=(x_2-x_1)\,dy+(1-y)\,dx_1+y\,dx_2.$$

Door eliminatie van dy verkrijgen wij de vergelijking:

$$-dv=\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1}\left\{(1-y)\,dx_1+y\,dx_2)\right\}-(1-y)\,dv_1-y\,dv_2.$$

Nu is in het algemeen $dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_x dp$ Passen wij deze vergelijking toe voor de punten 1 en 2 der binodale lijn en kiezen wij den weg om van v_1 naar $v_1 + dv_1$ en van v_2 naar $v_2 + dv_2$ te gaan op het oppervlak voor de homogene phasen. Dan is

$$dv_1 = \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p dx_1 + \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom} dp$$

en

$$dv_2 = \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p dx_2 + \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom} dp.$$

De grootheden $\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p$ en $\left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p$ zijn dan te nemen langs een isobare.

Substitueeren wij de waarden van dv_1 en dv_2 in de vergelijking voor dv dan wordt deze:

$$-dv = (1-y)\left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p\right] dx_1 - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom} dp\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p\right] dx_2 - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom} dp\right\}$$

of

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} = (1-y)\left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p\right]\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin} - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom}\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p\right]\left(\frac{dx_2}{dp}\right)_{bin} - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom}\right\}$$

Nu is de factor van $\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin} = \frac{v_{21}}{x_2-x_1} = \left(\frac{d^2\xi}{dx_1^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin}$, en vinden wij:

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} = (1-y)\left\{\left(\frac{d^2\xi}{dx_1^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom}\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left(\frac{d^2\xi}{dx_2^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denken wij het begin der condensatie en dus $y = 1$, dan wordt bovenstaande vergelijking:

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} = \left(\frac{d^2\xi}{dx_2^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom}$$

waarin $v_2 = v$ en $x_2 = x$ moet genomen worden. Uit deze vergelijking blijkt, dat nimmer $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} = -\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$ is, en dat er dus aan het begin der condensatie een sprong in de waarde van $-\frac{dv}{dp}$

of van $-\frac{dp}{dv}$ zal moeten zijn, tenzij er gevallen mochten zijn waarin $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2_{bin}$ gelijk 0 is. Het eenige geval waarin dit zoo is, is in het kritisch raakpunt. Daar is $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin} = \infty$ en dus $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = 0$. Maar daar is dan ook eigenlijk geen condensatie meer, en is de empirische isotherme verdwenen. Men zou misschien aan een plooipunt kunnen denken, omdat daarin $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T} = 0$ is, maar daar is daarentegen $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin} = 0$ en $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$. Zoekt men de limietwaarde van $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2_{bin}$ of van $\frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{bin}}$, dan vindt men door teller en noemer naar x tweemaal te differentieeren:

$$\frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{pT}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{bin}} = \frac{\left(\frac{d^3\zeta}{dx^3}\right)_{pT}}{2\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin}\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{bin}} = \frac{\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}\right)_{p,T}}{2\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2_{bin}}$$

In het plooipunt is behalve $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}$ ook $\left(\frac{d^3\zeta}{dx^3}\right)_{p,T} = 0$, maar zal $\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}\right)_{p,T}$ een waarde hebben van 0 verschillend, en dus is ook in het plooipunt een sprong in de waarde van $-\frac{dv}{dp}$.

Daar $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$ steeds positief moet zijn, zal ook $\left(-\frac{dv}{dp}\right)_{het}$ steeds positief eu grooter dan $\left(-\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$ zijn, of $\left(-\frac{dp}{dv}\right)_{hom} > \left(-\frac{dp}{dv}\right)_{het}$.

Bij het begin der condensatie zal bij het kleiner worden van het volume de empirische kromme minder steil stijgen dan die voor homogene phasen.

Er zijn gevallen waarin $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} = \infty$ zal zijn, of $\left(-\frac{dp}{dv}\right)_{het} = 0$.

1°. aan de kanten, dus voor $x = 0$ en $x = 1$. Daarin is $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{pT}$ oneindig en wordt door den hoofdterm $\left(\frac{MRT}{x(1-x)}\right)$ voorgesteld. 2°. als

op de binodale lijn $\frac{dx}{dp}$ gelijk oneindig is of $\frac{dp}{dx} = 0$; dit heeft plaats bij die mengsels, welke zich als een enkele stof gedragen.

Stelden wij in vergelijking (1) $y = 0$ en $v_1 = v$ en $x_1 = x$ dan zouden wij dezelfde besluiten voor het eind der condensatie kunnen afleiden.

De betrekking tusschen $-\left(\frac{dp}{dv}\right)_{het}$ en $-\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hom}$ aan het begin en aan het eind der condensatie zouden wij onmiddellijk kunnen afleiden door de vergelijking:

$$dv = \left(\frac{dv}{dp}\right)_x dp + \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx$$

toe te passen zoowel voor het oppervlak der homogene phasen als voor dat der heterogene phasen. Nemen wij dan in aanmerking dat $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ op het heterogene oppervlak gelijk is aan $\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}$, dan vinden wij:

$$\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_{het} dp = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom} dp,$$

en daaruit de vroegere betrekking.

Uit den vorm voor $\left(-\frac{dv}{dp}\right)_{het}$ in het algemeen, dus niet alleen aan het begin of aan het eind der condensatie, ziet men dat de empirische isotherme alleen dan een element kan hebben, waarin zij horizontaal gericht is, als een nodelijn gesneden wordt, aan welks ééne of andere uiteinde $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin}$ oneindig groot is. Maar aangezien noch de kanten, noch de nodelijn welke evenwijdig aan de v-as loopt gesneden kan worden, zou hieruit volgen, dat de empirische isotherme nimmer in een harer elementen horizontaal kan loopen. Er zijn echter toch uitzonderingsgevallen op zulk een regel. Vooreerst als men het begrip van empirische isotherme zou uitbreiden, en daardoor zou willen verstaan de doorsnede van een vlak // v-as met het gederiveerde oppervlak van het ψ-vlak, ook in het geval van een samengestelde plooi. Dan zijn er ook nodelijnen aan punten, waarin de binodale lijn door de spinodale lijn loopt en waar dus $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$ is. Maar aangezien zulke evenwichten verborgen evenwichten zijn kunnen zij toch niet verwezenlijkt worden. Daar komt voor in de plaats een rechtlijnige doorsnijding van het vlak // v-as met den driephasen-

driehoek, en op dat gedeelte is natuurlijk $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{het}$ weder oneindig groot. Maar ten tweede en dit is een geval, dat wel verwezenlijkt zou kunnen worden, heeft de binodale lijn een punt waarin $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$ is, als dat punt een plooipunt is dat bij verhoogde of verlaagde temperatuur een verborgen plooipunt zal worden. Dit is een limietvorm van het eerstgenoemde geval waarin de driephasendriehoek gesneden werd. Dan heeft de driephasendriehoek zich tot een enkele lijn samengetrokken, en is het hierboven genoemde rechte lijntje tot een enkel punt samengetrokken. Dan is er natuurlijk in dat punt een buigpunt van de empirische isotherme. Bij grooter volumes is zij negatief gekromd, bij kleiner volumes positief.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement No. 15 bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM: „*Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. *XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen*". (Vervolg).

§ 7. *Het beloop der spinodale lijnen en der plooien voor het geval, dat de moleculen van eene component eenige, doch nog zwakke aantrekking uitoefenen.* Bij zeer kleine waarde van de wederzijdsche aantrekking, a_{12}, der moleculen der beide componenten, in verband met de kleine onderlinge aantrekking, a_{22}, der moleculen van eene component, zal zich de spinodale lijn zooals in Fig. 1 § 2 (Febr. '07, p. 754), van af de zijde der kleine v's bij dalende temperatuur meer en meer op het ψ-vlak uitstrekken, bij $T = T_{k_1}$ met de lijn $x = 0$ tot raking komen en daarna in twee gescheiden takken van de lijn $v = b$ naar de kant $x = 0$ oversteken [1]). Van hetgeen bij lagere temperaturen geschiedt, als de spinodale ook de kant $x = 1$ nadert en bereikt, zien we hier af.

---

[1]) Hierbij is voor $x = 0$: $\frac{dT_{xpl}}{dx} > 0$. We zien hier, dat de conclusie van VERSCHAFFELT (Zittingsversl. Jan. 1906 p. 694) omtrent de maximumtemperatuur in de plooipuntslijn voor mengsels, waarvoor de component wordt aangegeven door een punt uit het gebied *OHK* (fig. 2 aldaar), moet worden aangevuld met de mogelijkheid dat de van de eerste component uitgaande tak van de plooipuntslijn naar oneindige drukken gaat.

Om na te gaan welk beloop de spinodale bij grootere aantrekking der vluchtigste component zal kunnen hebben, zullen we van de in § 2 ingevoerde en ook in § 6 toegepaste onderstellingen betreffende de toestandsvergelijking en de grootheden a_{12} [1]) en b_{12} gebruik maken. In het spinodalennet voor een gegeven stoffenpaar kunnen alsdan 2 singuliere punten, behoorende bij de spinodalen voor verschillende temperaturen, optreden. De waarden van x hiervoor worden bepaald door de vergelijking:

$$\frac{x_M}{1-x_M} = \frac{3b_{11M}\sqrt{a_{22M}} \mp 2b_{11M}\sqrt[4]{a_{11M}a_{22M}} - b_{22M}\sqrt{a_{11M}}}{-b_{11M}\sqrt{a_{22M}} \mp 2b_{22M}\sqrt[4]{a_{11M}a_{22M}} + 3b_{22M}\sqrt{a_{11M}}} \quad (1)$$

Voor zeer kleine a_{22} vindt men hieruit twee singuliere punten met $x > 1$, dus niet behoorende tot dat gedeelte van het ψ-vlak, hetwelk phasen van mengsels kan aangeven. Van deze beide singuliere punten gaat dat, waarvoor de onderste teekens gelden, voor toenemende a_{22} door het oneindige, en nadert daarna aan de andere zijde van het ψ-vlak tot de lijn $x=0$. Deze lijn wordt bereikt voor:

$$\sqrt[4]{a_{22M}/a_{11M}} = \frac{1}{3}\{-1 + \sqrt{1 + 3\,b_{22M}/b_{11M}}\} = m_1 \quad . \quad (2)$$

Bij grooter wordende a_{22}/a_{11} nadert het singuliere punt, hetwelk voor dit gebied een dubbelpunt blijkt te zijn, de lijn $v = b$, welke lijn bereikt wordt voor

$$\sqrt[4]{a_{22M}/a_{11M}} = -(1-b_{22M}\,b_{11M}) + \sqrt{1-b_{22M}/b_{11M}+(b_{22M}/b_{11M})^2} = m_2 \quad (3)$$

Hierbij veronderstellen we $b_{22M} < b_{11M}$ [2]).

---

[1]) Bij dit eerste onderzoek naar hetgeen bij mengsels van helium verwacht zal kunnen worden, met het doel ons eenig oordeel te vormen omtrent de voorwaarden waaronder de experimenten daartoe zullen moeten worden uitgevoerd, werd door ons (§ 2, p. 756), nu ons nog geene gegevens betreffend a_{12} en b_{12} voor die mengsels ten dienste staan, bij de berekeningen $b_{12M} = \frac{1}{2}(b_{11M} + b_{22M})$ en $a_{12M} = \sqrt{a_{11M}a_{22M}}$ gesteld (verg. Meded. Suppl. N°. 8, Zittingsversl. Feb. '04 p. 890). Ook Van der Waals (Zittingsversl. Febr. '07, p. 695) neemt aan dat in den regel $a_{12M} < (a_{11M} + a_{22M})$. Voor een volledig overzicht omtrent de verschillende mogelijkheden zal het noodig zijn omtrent a_{12M} ook andere onderstellingen te doen (verg. Van der Waals l.c., Kohnstamm ibid p. 735), waarbij dan tevens er op gelet zal moeten worden, dat a en b, althans beide niet onafhankelijk van v en T (verg. Van der Waals, Zittingsversl. Sept. '05 p. 249) en slechts bij benadering kwadratische functies van x mogen gesteld worden.

Indien ook voor mengsels met zeer kleine a_{22}, $a_{12M} < \sqrt{a_{11M}a_{22M}}$ zou kunnen zijn (verg. Kohnstamm l c. p. 736), dan zouden de hier besproken verschijnselen van beperkte mengbaarheid nog eerder te verwachten zijn.

[2]) Voor $b_{22M} > b_{11M}$ komt het andere singuliere punt voor eene kleinere waarde van a_{22M}/a_{11M} van af de kant $x=1$ op het ψ-vlak. Daar dit geval zich bij de ons bekende stoffenparen met kleine a_{22}/a_{11} waarschijnlijk niet voordoet, zien we van de discussie hiervan af.

Indien derhalve de wederzijdsche aantrekking der moleculen van de meest vluchtige component en die der andere in verband met de onderlinge aantrekkingen een zeker bedrag bereikt — bij de voor de berekeningen aangenomen onderstellingen voor $m = \sqrt{a_{22M}/a_{11M}} = m_1$ — zal de spinodale voor $T = T_{k_1}$ niet meer in K_1 aan de kant raken (verg. Fig. 1 § 2), doch aldaar een dubbelpunt hebben, in hetwelk de twee takken van de spinodale elkaar en de lijn $x=0$ onder een hoek snijden. In dit geval wordt de kritische temperatuur van de minst vluchtige component door kleine hoeveelheden bijmengsel van de andere component in eerste benadering niet veranderd.

Bij grootere aantrekking der meest vluchtige component — bij de genoemde onderstellingen voor $m_1 < m < m_2$ — zal eene spinodale op het ψ-vlak een dubbelpunt hebben. Dit zal des te dichter naar de kant der kleine v's liggen naarmate de aantrekking der meest vluchtige component grooter wordt. Bij zekere waarde der aantrekking — $m = m_2$ — bereikt de spinodale de lijn $v = b$ met een dubbelpunt, bij grootere aantrekking zal de spinodale bij dalende T van af $x = 0$ op het ψ-vlak voortschrijden en bij $T = T_{km}$ de lijn $v = b$ raken. Hierbij zal voor de genoemde onderstellingen voor $b_{22M}/b_{11M} < {}^{16}/_{21}$ de aanraking aan de lijn $v = b$ plaats grijpen bij temperaturen $> T_{k_2}$, voor $b_{22M}/b_{11M} > {}^{16}/_{21}$ voor $T < T_{k_2}$, zoodat in het laatstgenoemde geval de spinodale eerst met de lijn $x = 1$ tot aanraking komt.

In het eerste geval ($b_{22M}/b_{11M} < {}^{16}/_{21}$) zal eene plooi van af $x = 0$ komen en bij lagere T, terwijl voor grootere m zich eene naar de zijde $x = 1$ gerichte zijplooi kan ontwikkelen: indien $m < m_2$ door een homogeen dubbelplooipunt (Korteweg, *Archiv Neerl.* 24 (1891)) zich met eene van af $v = b$ komende plooi tot eene schuin overstekende plooi vereenigen, indien $m > m_2$ door aanraking aan $v = b$ in eene schuin overstekende plooi overgaan.

In het tweede geval zal voor kleinere m weder de van $x = 0$ komende plooi zich met eene van $v = b$ komende vereenigen; voor grootere m zal voordat deze vereeniging tot stand komt of de spinodale de lijn $v = b$ gaat raken zich eene zijplooi ontwikkeld hebben.

Van de discussie van het beloop der spinodale voor deze gevallen bij steeds grootere aantrekking der meest vluchtige component, waar we driephasenevenwichten zullen moeten beschouwen, kunnen we als niet behoorende tot het geval van eene aantrekkingszwakke componente voorloopig afzien [1]).

[1]) Verg. overigens Van Laar, Arch. Teyler (2) 10 (1906), Zittingsversl. Sept. '06, p. 227.

Tabel I geeft voor enkele waarden van b_{22M}/b_{11M} de waarden $a_{22M}/a_{11M} = m^4$, berekend uit de vergelijkingen (2) en (3). Vergelijkt men hiermede de waarden van a_{22M}/a_{11M} waarvoor $T_{km} = T_{kl}$ (Febr. '07, p. 762), dan ziet men dat deze inderdaad tusschen de hier berekende inliggen.

TABEL I.

b_{22M}/b_{11M}	m_1^4	m_2^4
1/2	0.0014	0.0179
1/4	0.000134	0.000527
1/8	0.000011	0.000022

Het beloop der spinodalen voor een geval, waarin $m_1 < m < m_2$, is voorgesteld op plaat II, voor het ψ-vlak van de gewichtseenheid (verg. § 2, p. 755) met de in § 2 aangenomen verhoudingen, behoudens $a_{22}/a_{11} = 0.00049$ (of $a_{22M}/a_{11M} = 0.00196$).

De van af $v = b$ op het ψ-vlak zich uitstrekkende plooi voor eene temperatuur $> T_{k1}$, zal volgens § 4 als eene gas-gasplooi moeten worden beschouwd (verg. § 6). Evenzoo eene dergelijke plooi voor $T < T_{k_1}$, indien de connodale niet door eene isomignische lijn wordt aangeraakt en nergens gesneden wordt door eene isomignische lijn die de connodale van de van af $x = 0$ komende plooi snijdt [1]). Men zal volgens § 4 gerechtigd zijn ook de voor $T_{k_1} > T > T_{dpl}$ (temperatuur waarbij het beschouwde dubbelplooipunt optreedt) aan de zijde der kleine v's gelegen plooi als gas-gasplooi te beschouwen, zoolang de temperatuur voor alle deelen dier plooi is boven de kritische temperaturen der ongespitste mengsels. Dat hiertoe aanleiding kan bestaan, blijkt als men voor het dubbelplooipunt voor sommige gevallen, b.v. voor de in Tabel I genoemde verhoudingen b_{22M}/b_{11M} en de daarbij behoorende m_2, de gereduceerde temperatuur berekent.

De dubbelplooipuntstemperatuur wordt n.l. als we $b_{22M}/b_{11M} = n$ stellen, bepaald door:

$$T_{dpl}/T_{k_1} = \frac{27}{4} m (1+m) \frac{(n-m^2)^2}{(n+m)^3}$$

terwijl

$$v_{dpl}/v_{k_1} = \frac{2}{3} \frac{m}{(1+m)^2} \cdot \frac{(n+m)^2}{m(2-m) - n(1-2m)}$$

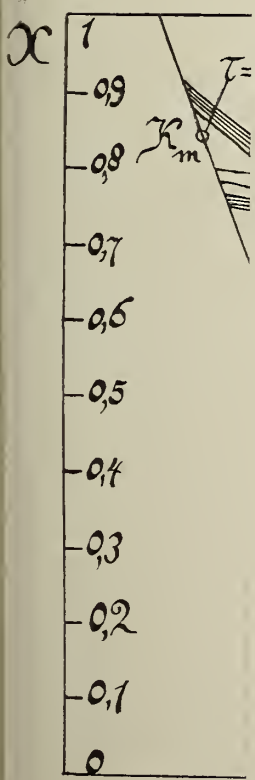
Men vindt aldus voor het geval voorgesteld op Plaat II:

$$x_{dpl} = 0.587, \quad T_{dpl}/T_{k_1} = 0.966, \quad T_{dpl}/T_{kx} = 2.17.$$

(Wordt vervolgd).

[1]) Hier blijkt dat ook indien $T_{km} < T_{k_1}$, en voor temperaturen $T < T_{k_1}$ bij $T_{km} > T_{k_1}$. eene gas-gasplooi kan optreden (verg. p. 761 noot 1 en p. 763).

H KAMERLING
VAN DER
met molec



Tabel I geeft voor enkele waarden van b_{22M}/b_{11M} de waarden $a_{22M}/a_{11M} = m^4$, berekend uit de vergelijkingen (2) en (3). Vergelijkt men hiermede de waarden van a_{22M}/a_{11M} waarvoor $T_{km} = T_{k1}$ (Febr. '07, p. 762), dan ziet men dat deze inderdaad tusschen de hier berekende inliggen.

TABEL I.

b_{22M}/b_{11M}	m_1^4	m_2^4
1/2	0.0014	0.0179
1/4	0.000134	0.000527
1/8	0.000011	0.000022

Het beloop der spinodalen voor een geval, waarin $m_1 < m < m_2$, is voorgesteld op plaat II, voor het ψ-vlak van de gewichtseenheid (verg. § 2, p. 755) met de in § 2 aangenomen verhoudingen, behoudens $a_{22}/a_{11} = 0.00049$ (of $a_{22M}/a_{11M} = 0.00196$).

De van af $v = b$ op het ψ-vlak zich uitstrekkende plooi voor eene temperatuur $> T_{k1}$, zal volgens § 4 als eene gas-gasplooi moeten worden beschouwd (verg. § 6). Evenzoo eene dergelijke plooi voor $T < T_{k_1}$, indien de connodale niet door eene isomignische lijn wordt aangeraakt en nergens gesneden wordt door eene isomignische lijn die de connodale van de van af $x = 0$ komende plooi snijdt [1]). Men zal volgens § 4 gerechtigd zijn ook de voor $T_{k_1} > T > T_{dpl}$ (temperatuur waarbij het beschouwde dubbelplooipunt optreedt) aan de zijde der kleine v's gelegen plooi als gas-gasplooi te beschouwen, zoolang de temperatuur voor alle deelen dier plooi is boven de kritische temperaturen der ongespitste mengsels. Dat hiertoe aanleiding kan bestaan, blijkt als men voor het dubbelplooipunt voor sommige gevallen, b.v. voor de in Tabel I genoemde verhoudingen b_{22M}/b_{11M} en de daarbij behoorende m_2, de gereduceerde temperatuur berekent.

De dubbelplooipuntstemperatuur wordt n.l. als we $b_{22M}/b_{11M} = n$ stellen, bepaald door:

$$T_{dpl}/T_{k_1} = \frac{27}{4} m (1+m) \frac{(n-m^2)^2}{(n+m)^3}$$

terwijl

$$v_{dpl}/v_{k_1} = \frac{2}{3} \frac{m}{(1+m)^2} \cdot \frac{(n+m)^2}{m(2-m) - n(1-2m)}$$

Men vindt aldus voor het geval voorgesteld op Plaat II:

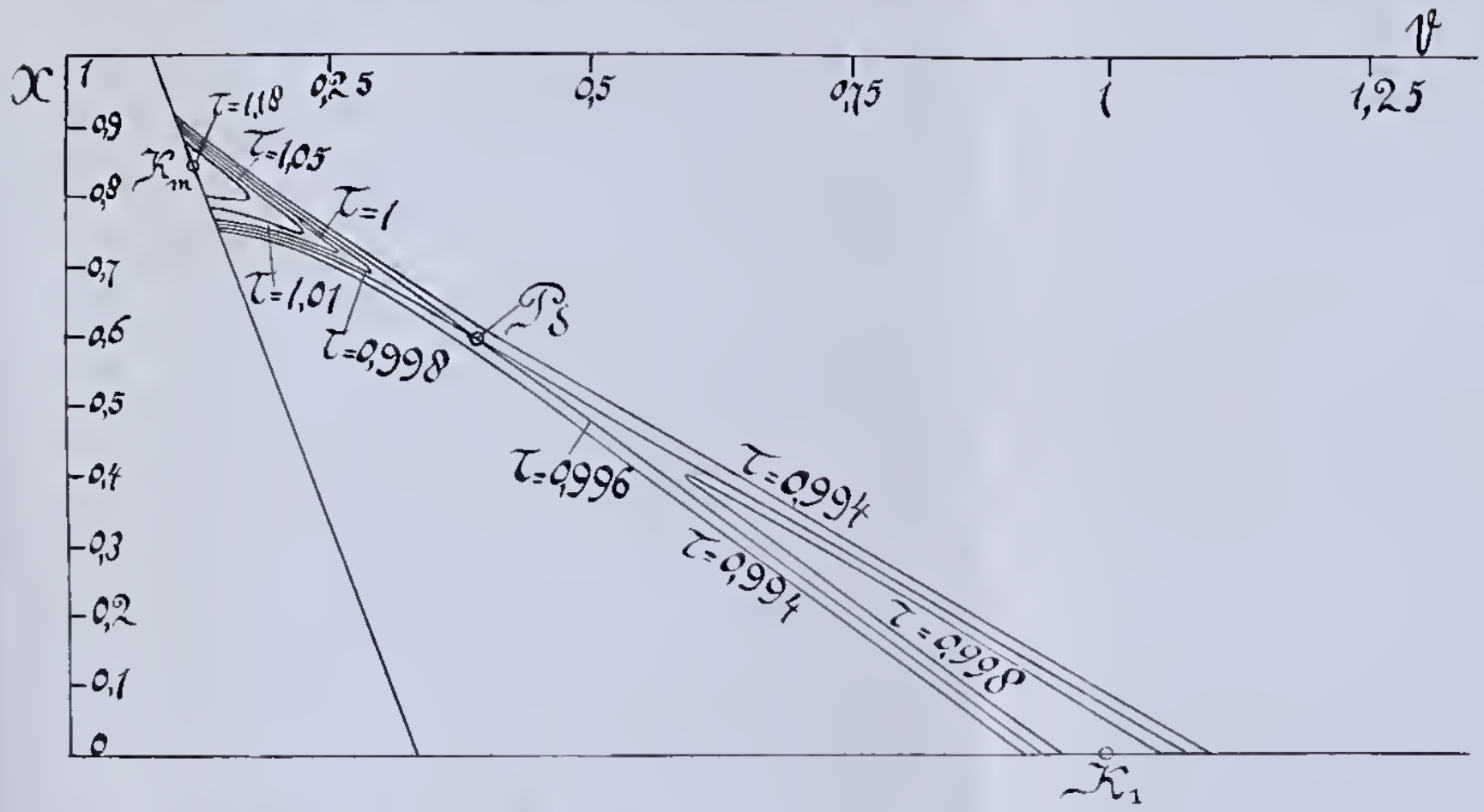
$$x_{dpl} = 0.587, \quad T_{dpl}/T_{k_1} = 0.966, \quad T_{dpl}/T_{kx} = 2.17.$$

(Wordt vervolgd).

[1]) Hier blijkt dat ook indien $T_{km} < T_{k_1}$, en voor temperaturen $T < T_{k_1}$ bij $T_{km} > T_{k_1}$. eene gas-gasplooi kan optreden (verg. p. 761 noot 1 en p. 763).

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen.

Plaat II.



Natuurkunde. — De Heer WIND biedt eene mededeeling aan: *„Een hypothese aangaande den oorsprong* RÖNTGEN-*stralen"*.

W. WIEN [1]) heeft de energie van RÖNTGEN-stralen, in warmte omgezet in een bolometer of een thermo-element, gemeten en met die der kathodestralen, eveneens in warmte omgezet (voor verreweg het grootste gedeelte althans) in de antikathode, vergeleken. Hij vindt voor de verhouding van de totale energie-hoeveelheden der beide stralen-soorten

$$\frac{E_r}{E_k} = 2{,}18 \;.\; 10^{-3}\ ^{2}).$$

Onderstellende, dat de R.-stralen zijn de energiestraling, door de in hun vaart gestuite kathodestraal-electronen uitgezonden, en dat deze stuiting als een eenparig vertraagde beweging mag worden opgevat, leidt hij dan verder met behulp der theorie van M. ABRAHAM den duur dezer beweging of wel de dikte der RÖNTGEN-golven af.

Voor laatstgenoemde grootheid vindt hij

$$\lambda = 1{,}15 \;.\; 10^{-10} \text{ cm.}$$

Uitkomsten van dezelfde orde van grootte zijn later door EDNA CARTER [3]) verkregen bij een onderzoek, eveneens aan het door WIEN bestuurde laboratorium verricht.

Deze uitkomsten zijn niet zeer goed te rijmen met de waarden, door HAGA en mij uit buigingsproeven afgeleid voor de „golflengte" der R.-stralen

$$\lambda = 270 \text{ tot } 12 \;.\; 10^{-10} \text{ cm.}\ ^{4})$$

en

$$\lambda = 160 \;,\; 120 \;,\; 50 \;.\; 10^{-10} \text{ cm.}\ ^{5})$$

Moeten de R.-stralen inderdaad worden opgevat als ethergolven van zoodanigen oorsprong als door WIEN in overeenstemming met de tegenwoordig meest gangbare opvatting wordt aangenomen, dan moeten uit dezelfde buigingsproeven voor de dikte der RÖNTGEN-golven worden afgeleid waarden, die ongeveer $\frac{3.7}{1\frac{1}{2}}$ of $2\frac{1}{2}$-maal zoo klein zijn [6]) als de voor λ opgegevene, derhalve:

$$\beta_1 = 110 \text{ tot } 5 \;.\; 10^{-10} \text{ cm.},$$
$$\beta_2 = 64,\ 48,\ 20 \;.\; 10^{-10} \text{ cm.}$$

---

[1]) W. WIEN. WÜLLNERS Festschrift, Leipzig, 1905; Ann. d. Ph. 18, p. 991, 1905.

[2]) l. c. p. 996. Het getal is hier verdubbeld, wegens de desbetreffende opmerking op pag. 1000.

[3]) E. CARTER. Ann. d. Ph. 21, p. 955, 1906.

[4]) H. HAGA en C. H. WIND. Deze verslagen 7. p. 506, 1899.

[5]) Id. Ibid. 11, p. 356, 1902.

[6]) C. H. WIND. Physik. Zschr. 2, p. 96. Fussnote 2), 1901.

De proeven van WIEN zouden tot beter met de buigingsproeven overeenstemmende uitkomsten hebben geleid, indien daarbij 20- tot 100-maal geringere waarden voor de energie der R.-stralen waren gevonden. Dit verschil is te groot om er aan te mogen denken, het aan waarnemingsfouten toe te schrijven. Eerder moet worden gedacht aan principieele onjuistheden in de methoden van waarneming of in de aan de berekening ten grondslag liggende voorstellingen omtrent het mechanisme der verschijnselen.

Wat de waarnemingsmethoden betreft, WIEN zelf heeft gewezen [1]) op de mogelijkheid, dat de warmteontwikkeling, die door bolometer of thermo-element wordt aangewezen, niet ten volle is op te vatten als omgezette energie van R.-stralen, doch ten deele — misschien zelfs voor een groot deel — moet worden beschouwd als omgezette inwendige atoom-energie, vrijgemaakt door een werking der R.-stralen, die men gevoegelijk met den naam katalytische werking zou kunnen bestempelen.

J. D. v. d. WAALS Jr. [2]) oppert daarnevens het denkbeeld, dat wellicht de electronen niet door een enkelvoudige rechtlijnige vertraging tot rust komen, doch veeleer door de wisselwerking met de deeltjes der anti-kathode, alvorens tot rust te komen, zich een tijd lang nog met zeer groote snelheden zigzagsgewijze daartusschen bewegen om dan bij elke sterke bewegingsverandering opnieuw een Röntgengolf uit te zenden. Aldus ware van elk electron een veel grootere bijdrage tot de stralingsenergie te verwachten dan bij een toedracht, als WIEN zich voorstelt, en lieten de uitkomsten van WIEN's energiemetingen zich beter rijmen met die der buigingsexperimenten.

Het komt mij voor, dat naast deze onderstelling een andere de aandacht verdient, welke mij toeschijnt beter in overeenstemming te zijn met de bekende eigenschappen der kathodestralen. Het is deze, *dat niet enkel de kathodestraalelementen, doch in vereeniging met deze de atomen der antikathode de voornaamste emissiecentra der R.-stralen zijn.*

Men stelle zich voor, niet dat de in snelle vaart aankomende elektronen tegen de atomen als het ware reflecteeren, maar dat zij voor 't meerendeel deze, zonder aanmerkelijke belemmering in hun vaart, doorboren. Dit denkbeeld is geenszins nieuw. Men vindt het uitgewerkt bij LENARD [3]), die er de beste verklaring in ziet voor de

---

[1]) W. WIEN. Drudes Ann. d. Ph. 18, p. 1005, 1905; vgl. ook E. CARTER. Ann. d. Ph. 21, p. 957, 1906.

[2]) J. D. v. d. WAALS JR. Ann. d. Ph. 22. p. 603. 1907.

[3]) P. LENARD. Drudes Ann. d. Ph. 12, p. 734, 1903.

absorptiewetten der kathodestralen. Enkele malen zal het gebeuren, dat een electron bij het doorschrijden van een atoom in centra van buitengewoon sterke electromagnetische werking gevangen raakt of aanmerkelijk van bewegingsrichting verandert [1]), doch in verreweg de meeste gevallen zal het, bij de groote ijlheid, die men vermoedelijk in het binnenste van een atoom moet aannemen [2]), dwars door het stelsel heenvliegen, betrekkelijk weinig blijvende belemmering ondervindende.

Aldus echter zullen de electronen voor 't meerendeel duizenden of tienduizenden van atomen doorboren, aleer zij inderdaad in hun vaart worden gestuit, en zoo laat het zich verklaren, dat kathodestralen nog in merkbare mate een aluminiumlaag ter dikte van b.v. 10 μ [3]) of, bij gewone drukking, een luchtlaag van eenige cm [4]) dikte kunnen doordringen.

Beschouwen wij de door de buigingsproeven voor de orde van grootte van de dikte der Röntgengolven opgeleverde waarden als juist, dan moet uit Wiens proeven — afgezien dan van de vermelde mogelijke „katalytische" werking der Röntgenstralen — worden afgeleid, dat de uitstraling door de kathodestraalelectronen op zich zelf bij hun vertraging slechts iets als $\frac{1}{20}$ of $\frac{1}{100}$ van de geheele energie der Röntgenstralen zou kunnen opleveren. Voor verreweg 't grootste deel derhalve zou deze energie, als de voorstellingen van Lenard mogen worden aangenomen, een anderen oorsprong moeten hebben. Wat deze kan zijn, ligt geheel voor de hand. De atomen toch zullen bij hun doorboring door de electronen niet ongestoord blijven. Zelf waarschijnlijk bestaande uit negatieve electronen en uit positieve deeltjes zal gedurende het doorboringsproces de bouw hunner electromagnetische velden tijdelijk geheel worden gewijzigd. Ongetwijfeld zullen zij dientengevolge in den omringenden ether een storingsgolf uitzenden [5]). Omtrent den aard en het verloop van deze storings-

---

[1]) In verband ook met het uitstooten van oorspronkelijk tot het atoom behoorende electronen kan hieruit ook volgens Lenard de diffusie der kathodestralen worden verklaard.

[2]) Lenard berekent (Drudes Ann. d. Ph. 12, p. 739, 1903) dat slechts 10^{-9} van het volumen van een atoom door de „dynamiden", uit welke hij dit denkt opgebouwd, wordt ingenomen.

[3]) Lenard. Wied. Ann. 51, p. 233, 1894.

[4]) Id. Ibid. p. 252.

[5]) Lenard drukt zich als volgt uit:

(„Ueber Kathodenstrahlen". — Nobel-vorlesung, p. 37, Leipzig 1906) „Das durchquerende Strahlenquant" — het electron — „wird vermöge der abstossenden Kräfte, welche es auf die anderen, dem Atom eigenen, negativen Quanten ausübt,

golven, die zeer zeker niet bij elke doorboring van een atoom door een electron in alle opzichten gelijksoortig zullen zijn, kunnen wij, zonder meer bepaalde onderstellingen omtrent den bouw van het atoom te maken, weinig zeggen, maar er is één belangrijk punt, waarin de storingsgolven vermoedelijk tot zekere hoogte zullen overeenkomen, nl. hun *duur*.

Deze is, als a de diameter van een atoom en v de snelheid van het electron is, ten naaste bij gelijk aan $\frac{a}{v}$ en hieruit volgt een dikte van de in den ether geëmitteerde storingsgolven van de orde van grootte van $c\,\frac{a}{v}$, indien c de lichtsnelheid in den ether is.

Stellen wij hierin $a = 10^{-8}$ en $v = 10^{-10}$, dan komt 3.10^{-8}, een getal dat nog juist van de orde is van de uit de buigingsproeven voor β afgeleide waarden (p. 855), al ligt het ook iets boven de bovenste grens daarvan.

Daar bij de geschetste voorstellingen een enkel elektron eenige duizenden of tienduizenden atomen in beroering zou kunnen brengen zou, elk atoom bij het passeeren van een electron gemiddeld slechts iets als $\frac{1}{100}$ van de energiehoeveelheid, welke door het electron zelf bij zijn volledige stuiting zou worden uitgezonden, behoeven uit te zenden, om een verklaring mogelijk te maken van het betrekkelijk groot bedrag van de door Wien gemeten energie der R.-stralen. Dat dergelijke verhoudingen zouden bestaan, schijnt mij niet onmogelijk.

Mocht de hier aangeduide voorstelling omtrent het ontstaan der R.-stralen worden aangenomen, dan zou daarmee de voor experimenteele bepaling toegankelijke „golflengte" dezer stralen een nieuwe gewichtige beteekenis krijgen door haar eng verband met den diameter der atomen. Of er inderdaad ten naaste bij evenredigheid tusschen deze beide lengte-afmetingen bestaat, zou wellicht reeds experimenteel op de proef kunnen worden gesteld, door buigingsproeven b. v. met antikathoden uit verschillende stoffen vervaardigd. Meer in het algemeen zou mogen worden verwacht, dat dergelijke proeven eenig nieuw licht zouden kunnen verspreiden over den bouw der atomen en wellicht der moleculen of molecuulaggregaten. Van bijzonder belang zou het daarbij wellicht zijn, kristallen als antikathoden te gebruiken, daar men in deze een gelijkmatige

eine gewaltige Störung innerhalb des Atoms hervorbringen können", en vervolgt dan wel aldus: „und als Folge dieser Störung kann ein dem Atom gehöriges Quant aus ihm hinausgeschleudert werden (sekundäre Kathodenstrahlung)", maar hij spreekt niet van een door het atom geemitteerde straling.

plaatsing van deeltjes mag aannemen, welke zich mogelijkerwijze zou kunnen uiten zoowel in tamelijk scherp afgebakende golflengten als in een polarisatie der R.-stralen.

Wat de polarisatie der R.-stralen meer in het algemeen betreft, vermoedelijk laten zich daaromtrent wel bepaalde verwachtingen uitspreken op grond van de aangegeven hypothese, mits deze wordt aangevuld door meer bepaalde onderstellingen omtrent den bouw der atomen.

Ook de betrekking, die volgens onze voorstellingen tusschen de golflengte der R.-stralen en de snelheid der kathodestralen zou moeten bestaan, is voor experimenteele verificatie vatbaar.

Twee verdere vragen, welke zich aan dezelfde voorstellingen laten vastknoopen en proefondervindelijk zouden kunnen worden beantwoord, zijn deze:

1°. of niet de luchtmoleculen aan de buitenzijde van het door LENARD aan de CROOKES'sche buis aangebrachte aluminiumvenster in aanmerkelijke mate R.-stralen emitteeren,

2°. of niet de γ-stralen bij een radium-preparaat, behalve door het preparaat zelf, ook voor een aanmerkelijk deel worden geömitteerd door de lucht in de nabijheid daarvan onder den invloed van de door de luchtdeeltjes heenvliegende electronen der β-stralen.

Anatomie. — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan van den Heer B. VAN TRICHT. *„Over den invloed der vinnen op den vorm van het rompmyotoom"*. (Uit het Anatomisch Kabinet te Leiden.

(Deze mededeeling zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen).

Anatomie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van Dr. L. J. J. MUSKENS: *„Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen"*. (3e Mededeeling).

(Deze mededeeling zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen.

De Heer HUGO DE VRIES leest de concept-adressen van gelukwensch te zenden aan de Universiteit te Upsala en aan de Kon. Akademie van Wetenschappen te Stockholm, bij gelegenheid van den 200-jarigen geboortedag van CAROLUS LINNAEUS op 23—24 Mei a.s.

De Commissie betreurende dat de Akademie geen fondsen heeft

om een afgevaardigde naar Zweden te zenden, stelt voor aan de Regeering een subsidie daarvoor aan te vragen, hetgeen door de Vergadering wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor de Werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer F. SCHUH te Sneek: *„Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen."*

De Voorzitter benoemt de Heeren SCHOUTE en CARDINAAL om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij worden aangeboden:

1°. Door den Heer MOLL de dissertatie van den Heer PH. VAN HARREVELD: „Die Unzulänglichkeit der heutigen Klinostaten für reizphysiologische Untersuchungen."

2°. Door den Heer VOSMAER de dissertatie van den Heer G. J. DE GROOT: „Aanteekeningen over de ontwikkeling van Scoloplos Armiger."

3°. Door den Heer JULIUS de dissertatie van den Heer W. J. H. MOLL: „Onderzoek van ultra roode spectra."

4°. Door den Heer HUBRECHT: 1°. de dissertatie van Mejuffrouw M. VAN HERWÈRDEN: „Bijdrage tot de kennis van menstrueelen cyclus en puerperium"; 2°. „Normentafeln zur Entwicklungsgeschichte der Wirbelthiere, Heft 7. Normentafeln zur Entwicklungsgeschichte des Koboldmaki (Tarsius spectrum) und des Plumplori (Nycticebus Tardigradus)".

5°. Door den Heer SCHOUTE de dissertatie van den Heer M. J. DE BOER: „De rationale krommen van den vijfden graad in R_5 en R_4".

6°. Door de Heer LORENTZ de dissertatie van den Heer H. B. A. BOCKWINKEL: „Van de stralingsverschijnselen in bewogen stelsels" en namens de Heer J. M. VAN BEMMELEN: „De ontdekking van sodabereiding uit keukenzout door LEBLANC-DIZÉ. II".

De vergadering wordt gesloten.

(11 April, 1907).

ERRATUM.

Verslag der vergadering 29 September 1906.

W. VAN BEMMELEN: Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia.

Bladz. 253.

In plaats van:		lees:	
in 6 gevallen	7^u12^m	in 6 gevallen	7^u0^m
„ 28 „	7 0	„ 28 „	7 6
„ 19 „	7 6	„ 19 „	7 12
gemiddeld	$7^u7^m15^s$	gemiddeld	$7^u7^m28^s$

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Vrijdag 26 April 1907.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 864.

Verslag van de Commissie in zake de ventilatie van de bovenzalen van het Rijks Museum te Amsterdam, p. 865.

Verslag van de Heeren JULIUS, J. C. KAPTEYN en SCHREINEMAKERS over eene verhandeling van den Heer A. BREMER Jr., getiteld: „Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables", p. 868.

Verslag van de Heeren SCHOUTE en CARDINAAL over eene verhandeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats der punten in het vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen". p. 871.

B. VAN TRICHT: „Over den invloed der vinnen op den vorm van het romp-myotoom". (Aangeboden door de Heeren G. C. J. VOSMAER en C. WINKLER), p. 874. (Met één plaat).

L. J. J. MUSKENS: „Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen". (3de Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en T. PLACE). p. 879.

M. W. BEIJERINCK: „Over melkzuurgisting in melk", p. 883.

J. W. VAN WIJHE: „Over het voorkomen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den schedel der vogels", p. 902.

L. J. J. MUSKENS: „Bijdragen tot de kennis van zenuwinvloed op de hartswerking. Iste mededeeling: Genese van den pulsus alternans." (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en T. PLACE), p. 905. (Met één plaat).

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". III, p. 915.

J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 939.

J. BOEKE: „Over den bouw van de ganglioencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum". (Iste Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren G. C. J. VOSMAER en L. BOLK), p. 952. (Met één plaat).

H. KAMERLINGH ONNES en G. H. FABIUS: „Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand", p. 952.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewonende parasitisch auftretende Arten", p. 952.

Aanbieding eener verhandeling van de Heeren CLEMENT REID en ELEANOR M. REID: "The fossil flora of Tegelen-sur-Meuse, near Venloo in the province of Limburg", p. 953.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 953.

Erratum, p. 953.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren Hoogewerff, Kamerlingh Onnes, van Romburgh en Wind dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 18 April 1907 waarbij bericht wordt, dat de benoeming van de Heeren H. G. van de Sande Bakhuyzen tot Voorzitter en D. J. Korteweg tot Onder-Voorzitter door H. M. de Koningin zijn bekrachtigd. Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 22 April 1907 waarbij bericht wordt dat aan de Natuurkundige Afdeeling een extra-subsidie van *f* 250.— is verleend, tot bestrijding der kosten voor het zenden van een afgevaardigde naar Zweden bij gelegenheid van de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van Carol. Linnaeus op 23—25 Mei a.s.

De Heer Moll verklaart zich bereid de Akademie te vertegenwoordigen.

4°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 13 April 1907 met verzoek om bericht en raad over een schrijven van den Belgischen Gezant waarbij de Nederlandsche Regeering wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen op een congres voor poolonderzoek, hetwelk in Mei 1908 te Brussel zal worden gehouden.

Deze stukken zijn bereids in handen gesteld van de Heeren Leeuwen, Weber en van der Stok om advies.

5°. Circulaire van de Geological Society te Londen waarbij de Akademie uitgenoodigd wordt zich te doen vertegenwoordigen bij gelegenheid van het 100-jarig bestaan dier vereeniging op 26—28 September a.s. De Heer Molengraaff neemt op zich de Akademie te vertegenwoordigen.

6°. Uitnoodiging van de New-York Academy of Sciences tot het zenden van een officieel document ter waardeering van het werk van Linnaeus, dat zal kunnen worden voorgelezen in een feestelijke vergadering van genoemde Akademie op 23 Mei a.s.

Op verzoek van het Bestuur heeft de Heer Hubrecht een zoodanig document opgesteld.

7°. Circulaire van de Keiz. Akademie van Wetenschappen te

Weenen mededeelende, dat volgens bericht van de Akademie te Berlijn de volgende staten n.l. Duitschland, Oostenrijk-Hongarije, België, Nederland, Noorwegen, Zwitserland en de Vereenigde Staten van Noord-Amerika zich in principe verklaard hebben voor eene internationale uitleening van handschriften, dat van Denemarken, Zweden en Japan nog geen antwoord is ontvangen en dat Egypte, Groot Brittannië, Frankrijk, Spanje en Rusland zich er tegen verklaard hebben.

Voor kennisgeving aangenomen.

De Voorzitter deelt mede dat volgens besluit van het Bestuur, met den ingang van het nieuwe Zittingsjaar (Mei 1907) de kosten van extra-correctie, veroorzaakt door veranderingen in den oorspronkelijken tekst van stukken bestemd voor de Verslagen of voor de Verhandelingen, niet meer door de Akademie gedragen zullen worden, maar zullen komen ten laste van den schrijver.

Natuurkunde. — De Heer DE BRUYN leest het volgende verslag inzake de ventilatie der lokalen in 's Rijks Museum te Amsterdam.

Bij schrijven d.d. 24 October jl. werd in onze handen gesteld een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent een doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's Rijks Museum te Amsterdam. Door verschillende omstandigheden, afwezigheid, ziekte, enz. is de behandeling daarvan vertraagd. Wij hebben ons eerst in verbinding gesteld met den Hoofddirecteur van dat museum en na voorloopige bespreking onze denkbeelden den waarnemenden architect der Rijksmuseumgebouwen, den Heer J. CUYPERS, medegedeeld, van wien wij naar aanleiding daarvan een algemeen schema van de ventilatie van zaal no. 235 mochten ontvangen. Wij hebben vermeend den Architect te moeten raadplegen, daar bij eventueele uitvoering natuurlijk rekening is te houden, behalve met het doel, ook met het uiterlijk en de constructie van het gebouw.

Door ons is in beschouwing genomen een der bovenzalen, waar het meest hinder door gebrek aan een goede ventilatie, vooral zomers, wordt ondervonden en wel zaal n°. 235. Deze zaal is lang 29.16 M., breed 9.45 M., hoog in het midden van het plafond 9 M., aan de zijden 6.50 M. De inhoud is ongeveer 2300 M³. De zaal staat met de nevenzalen in verbinding door deuropeningen in de korte zijden; de deuropening aan de eene zijde heeft een oppervlakte van 5 M². Als ventilatie zijn aangebracht in de muren aan de lange zijden te

zamen 7 kokers, wijd 0.24 bij 0.24 M. Deze kokers komen uit in de driehoekige ruimte boven de zaal, gevormd door de beide dakschilden; in die dakschilden zijn aangebracht dakvensters. Bovendien zijn in de segmenten onder het glazen plafond nog twee kleppen, uitkomende in de bovengenoemde driehoekige ruimte. Die ventilatie werkt niet of geheel onvoldoende. Dikwijls zijn de roosters voor de ventilatieopeningen gesloten, de dakvensters in den regel altijd; die kokers voeren nu eens lucht aan, dan weder af, voornamelijk afhankelijk van de windrichting. Die ventilatie-inrichting is geheel onvoldoende, ook zelfs dan, wanneer voor een behoorlijk openzetten der dakvensters, enz. dat bezwaar heeft, werd gezorgd.

Ons inziens moet de ventilatie niet een natuurlijke maar een kunstmatige zijn. Wij oordeelen het voldoende, wanneer het luchtvolume van de zaal per uur wordt ververscht, dus een luchtverplaatsing van $\frac{2300}{3600} = 0.64$ M³ per seconde.

In de gegeven omstandigheden, namelijk een zaal geheel gevuld met menschen, en waar voor de schilderijen geen bepaalde strooming langs de wanden mag plaats hebben, achten wij het wenschelijk de bedorven lucht af te voeren aan de bovenzijde, en de versche lucht aan te voeren aan de benedenzijde, liefst aan de tegenovergestelde zijde van de zaal waar de afvoer plaats heeft. De afvoer kan geschieden door ventilatoren, electrisch gedreven, en wel naar de ruimte boven het plafond, waaruit die kan ontwijken naar de buitenlucht. Voor de beschouwde zaal twee ventilatoren aannemende, moet de luchtverplaatsing van elk 0.32 M³ per secunde zijn; deze luchtverplaatsing moet bereikt worden ook in de ongunstigste omstandigheden. De aanvoer van voldoend versche lucht kan het geschikst plaats hebben uit de overdekte binnenplaats, waartoe de glazen overdekking de noodige openingen tot toetreding van buitenlucht moet bevatten. Voor drie aanvoeropeningen, elk van 0.50 bij 0.50 M., is de doorsnede van aanvoer 0.75 M². Bij aanvoer alleen door die openingen, dus aangenomen dat geen toevoer door de deuren plaats heeft, is de snelheid in die toevoeropeningen 0.85 M. per secunde.

De aanvoer in de zaal moet geen te groote snelheid hebben; wij achten het wenschelijk dien over de geheele lange zijde te doen plaats hebben, uitkomende iets boven den vloer, uitstroomende in horizontale richting, b.v. door geperforeerde platen, dus de lucht over een groot oppervlak in de zaal, gelijkmatig verdeeld, aan te voeren; daardoor wordt tocht vermeden. Bij de constructie der toevoerkanalen zal het dus noodig zijn door tusschenschotten den aanvoer direct behoorlijk te verdeelen naar de leiding langs den wand van de zaal.

Van den Architect ontvingen wij, bij schrijven d.d. 21 Februari j.l., een drietal teekeningen in den geest van deze wijze van ventilatie. Alleen waren daarbij de afvoer en aanvoer aan dezelfde zijde van de zaal aangebracht, hetgeen wij niet verkieselijk achten.

Bij eventueele toepassing van dit stelsel over het geheele Museumgebouw zullen bij werking van alle ventilatoren de toevoer-kanalen van zelf lucht moeten aanvoeren; des te meer, naarmate er minder lucht uit de beneden-ruimten kan toestroomen, naarmate dus de verbindingswegen tusschen die ruimten en de verdieping, alsmede tusschen de benedenruimten en de buitenlucht meer afgesloten zijn. Bij het in werking stellen van slechts enkele, b.v. indien alleen in enkele zalen veel bezoek is of om andere redenen, zoude het kunnen gebeuren, dat de toevoer naar de geventileerde zaal plaats had door de deuropeningen uitkomende in andere zalen. Voor dat geval zoude het in de toekomst nog wenschelijk kunnen blijken ook de lucht kunstmatig aan te voeren, om versche lucht te verkrijgen. Dit kan geschieden door ook in de toevoer-kanalen ventilatoren, electrisch gedreven, aan te brengen. Voorloopig achten wij die niet noodig, maar het is wel wenschelijk dat bij de constructie der toevoerkanalen er op gerekend wordt deze zoo in te richten, dat, mocht dit later noodzakelijk blijken, daarin ventilatoren zijn te plaatsen.

Voor het geheele Museumgebouw zullen voor afvoer ongeveer 20 electrisch bewogen ventilatoren van verschillende grootte noodig zijn. De kosten van aankoop van een zoodanigen ventilator kunnen per stuk gemiddeld op ongeveer *f* 150 worden gesteld. Van het maken van een begrooting van de geheele installatie, als niet tot onze opdracht behoorende, vermeenen wij ons te moeten onthouden.

Naar aanleiding van het bovenstaande stellen wij aan de Afdeeling voor het volgende antwoord aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven:

„In antwoord op het schrijven van Uwe Excellentie d.d. 13 September j.l. N°. 2345, afd. K.W. en onder terugzending der daarbij gevoegde bijlagen, hebben wij de eer te berichten dat een doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's Rijks-Museum te Amsterdam ons voorkomt te moeten bestaan uit electrisch gedreven ventilatoren, ten getale van ongeveer 20, die de lucht uit die zalen aan de bovenzijde afvoeren naar de ruimten boven de zoldering, van zoodanig vermogen dat per uur in alle omstandigheden het luchtvolume dier zalen wordt afgevoerd, met aanvoer van versche lucht uit de overdekte binnenplaatsen, op zoodanige wijze dat de versche lucht, gelijkmatig verdeeld, over de geheele lengte der zalen, iets boven den vloer, in horizontale richting

binnen komt; een en ander overeenkomstig een schema door den Architect der Rijksmuseum-gebouwen aan ons medelid Dr. Th. H. Mac Gillavry bij schrijven van 21 Februari j.l. gezonden, zoo mogelijk met deze wijziging dat de afvoer plaats hebbe aan de tegenovergestelde zijde van den aanvoer, en voorts met zoodanige inrichting der aanvoerkanalen dat later, zoo noodig, daarin ook electrisch gedreven ventilatoren kunnen worden geplaatst.

Th. Mac. Gillavry.
W. H. Julius.
P. Zeeman.
C. H. Wind.
H. E. de Bruyn.

De conclusie van het Verslag wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — Verslag over een verhandeling van den Heer A. Brester Jr., getiteld: „*Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables.*"

De Heer Brester begint deze zeer uitvoerige en doorwerkte verhandeling met nogmaals zijn reeds in 1888 uitgesproken denkbeeld te bepleiten, dat de zon in rust is, d.w.z. vrij van de heftige bewegingen en uitbarstingen die men meent te aanschouwen. Hij toont aan dat de algemeen heerschende overtuiging van het bestaan dier snelle bewegingen eigenlijk *uitsluitend* berust op de waargenomen lijnverplaatsingen in 't spectrum, daar men deze niet anders dan op grond van het beginsel van Doppler kon uitleggen. Men zou er geen bezwaar in hebben gezien, vele moeilijk te begrijpen bewegingsverschijnselen van protuberanties, fakkels, enz. voor schijnbaar te houden en op te vatten als lichtverschijnselen, die achtereenvolgens op verschillende plaatsen ontstaan, indien niet de spectroscoop de realiteit van stofverplaatsingen in de gezichtslijn, met snelheden van dezelfde orde van grootte als die welke men loodrecht op de gezichtslijn waarneemt, onomstootelijk aantoonde.

Brester bestrijdt die onomstootelijkheid. Hij stelt vooreerst de groote tegenstrijdigheden in het licht, waartoe de gevolgtrekkingen uit het beginsel van Doppler voeren wanneer men aanneemt, dat verplaatsing der spectraallijnen slechts op een snelle beweging der emitteerende of absorbeerende moleculen berusten kan, en voert daarom de hypothese in, dat de bedoelde spectraalverschijnselen zich óók voordoen, wanneer in rustende stof een scheikundig proces, gepaard gaande met luminescentie-verschijnselen, voortschrijdt in de

gezichtslijn. Deze hypothese, tot welker staving tot heden geen experimenteele noch theoretische gronden zijn aangevoerd, maar waarvan evenmin het onhoudbare met zekerheid gebleken is, vormt één der steunpunten van BREWSTER's zonnetheorie.

Volgens die theorie is de zon in hoofdzaak gasvormig; de fotosfeer is een soort wolkenlaag die voortdurend daalt, in diepere deelen gekomen verdampt, doch van boven door nieuwe condensatieproducten wordt aangevuld; het licht van chromosfeer en protuberanties is hoofdzakelijk een luminescentieverschijnsel, opgewekt daar, waar scheikundige vereeniging plaats heeft van gassen, die eerst wegens vermenging met veel andere condenseerbare gassen gescheiden waren, doch zich verbinden naarmate die bijmengselen door condensatie en daling zich verwijderen.

Een andere grond, dien de schrijver aanvoert als zeer overtuigend ten gunste van zijn meening dat de zon in rust is, bestaat in de rangschikking der elementen in lagen, o n g e v e e r in de orde hunner atoom-gewichten, een rangschikking die hij door vele waarnemingen, o.a. bij eclipsen, bewezen acht, en die niet zou kunnen blijven bestaan als de massa in heftige beweging verkeerde. Ook de onverandelijkheid van het spectrum der zonneschijf, waarvan toch de meeste lijnen volmaakt vaste plaatsen innemen, bewijst de rust der gasmassa.

De temperatuur in de zon is volgens BREWSTER weinig of niet veranderlijk; alleen maar toenemend met de diepte. Het warmteverlies naar buiten wordt aangevuld uit mechanische energie (bij de contractie), uit condensatiewarmte (bij het neerslaan der fotosferische wolken), uit verbindingswarmte (bij exothermische scheikundige processen), uit dissociatiewarmte (bij het uiteenvallen van de endothermische verbingen die in de diepere deelen der zon aanwezig zijn) en uit warmteontwikkeling bij radioactieve processen.

Aan de mechanische en endochemische warmtebronnen kent BREWSTER de hoofdrol toe in de huishouding der zon; daarentegen ziet hij vooral in de processen van condensatie en van scheikundige verbinding, die in de buitenste deelen van het hemellichaam plaats hebben, de onmiddelijke oorzaak van de zichtbare veranderingen op en om de zonneschijf. Van deze physische en chemische processen echter zou de energie spoedig uitgeput raken; doch zij verloopen straks in tegengestelden zin onder den invloed van de hoogere temperatuur der diepere deelen, waarbij dan de twee eerstgenoemde warmtebronnen het energieverlies dekken.

De hier genoemde denkbeelden worden alle in de „Inleiding" ontwikkeld; wij zijn er iets langer bij blijven stilstaan omdat zij den

grondslag vormen voor de beide hoofddeelen der verhandeling: 1o. Verklaring van het mechanisme der periodiciteit in de zon, en 2o.: Verklaring van het mechanisme der periodiciteit in de veranderlijke roode sterren.

Het ligt niet op onzen weg, van den ganschen inhoud, die loopt over nagenoeg alle verschijnselen welke in het beeld der zon en in het licht der roode sterren de aandacht hebben getrokken, een overzicht te geven. Slechts zij in het kort vermeld, hoe BREWSTER de 11-jarige periode der zonnevlekken verklaren wil.

De fotosferische wolkenlaag is tijdens het maximum dun en zweeft hoog in de gasvormige atmosfeer; zij wordt dan gemakkelijk veelvuldig doorbroken door opstijgende gasmassa's: de vlekken. Deze laatste zijn geen trechtervormige verdiepingen in de fotosfeer, maar eer vergelijkbaar met uitpuilende blazen, waarvan het barstende bovenvlies als „penumbra" zich voordoet. In dit stadium verliest de fotosfeer meer warmte naar buiten dan zij van binnen ontvangt; zij wordt dus door verdere condensatie dikker en daalt, 6 à 7 jaren lang. Nu onderstelt BREWSTER dat de fotosfeer aan de binnenzijde meer en meer warmte per tijdseenheid ontvangt naarmate zij daalt, en dat dus eindelijk het verlies naar buiten juist gecompenseerd wordt: dàn is de fotosfeer zoo dik mogelijk en het aantal vlekken minimaal. Bij nog verdere daling predomineert de warmte-opname en verdampt dus de fotosfeer weer langzamerhand; in gasvormigen toestand stijgen hare bestanddeelen omhoog, en aan de buitenzijde van die gasmassa begint zich een nieuwe fotosfeer door condensatie te vormen, waarmee, na ruim 11 jaren, de kringloop voltooid is.

Men kan niet beweren dat het genoemde periodieke proces op grond van onze physische en astronomische kennis als een noodzakelijkheid moet worden beschouwd; maar het is natuurlijk geoorloofd, het als h y p o t h e s e voorop te stellen. BREWSTER wil doen zien hoe uit den geschetsten gang van zaken talrijke gevolgen voortvloeien, die meerendeels zeer fraai in overeenstemming zijn met waargenomen bijzonderheden van vlekken, fakkels, chromosfeer, protuberanties, hunne spectraalverschijnselen, enz. Door een onnoemelijk aantal aanhalingen uit de literatuur te beschouwen in verband met zijne voorstellingen, tracht de schrijver den indruk te geven alsof alles uit het beschreven mechanisme kan worden afgeleid.

Een dergelijk periodiek proces als de fotosfeer der zon zou doorloopen, wordt volgens BREWSTER óók afgespeeld in de buitenste lagen der sterren van het Mira-type, met dit verschil evenwel, dat aldaar de wolkenlaag juist *donker* is en het licht uit de kern periodiek *tegenhoudt*. Ook uit deze voorstelling trekt de schrijver dan tal van

conclusies, die zich aansluiten bij hetgeen de waarnemingen hebben geleerd. Aan dit onderwerp is het tweede deel der verhandeling gewijd.

Overzien wij het geheele stuk van Dr. BREMSTER, dan meenen wij dat onder de denkbeelden die de schrijver te berde brengt omtrent een grooten rijkdom van verschijnselen betreffende zon en roode sterren, er een aantal zijn die eene nauwgezette studie der astrophysici verdienen en misschien den sleutel bevatten tot eenige der vele raadselen die de constitutie der hemellichten aanbiedt. Naast andere zonnetheoriën moet die van BREMSTER in aanmerking worden genomen.

Terwijl wij dus aanbevelen, deze vrucht van ernstige studie in de Verhandelingen der Akademie op te nemen, ligt daarin natuurlijk niet opgesloten, dat wij de bewijsvoering en de gevolgtrekkingen van Dr. BREMSTER in allen deele zouden willen onderschrijven. Met een aantal van onze bezwaren hebben wij den auteur in kennis gesteld; hij heeft ons medegedeeld dat hij van deze aanmerkingen gaarne gebruik zal maken, om zijn werk, vóór het gedrukt wordt, nog zooveel mogelijk te verbeteren.

W. H. JULIUS.
J. C. KAPTEYN.
F. A. H. SCHREINEMAKERS.

De conclusie van het Verslag wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE brengt ook namens den Heer CARDINAAL verslag uit over de verhandeling van Dr. F. SCHUH, getiteld: *„Over de meetkundige plaats der punten in het vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen."*

De verhandeling van den Heer SCHUH, in de vorige vergadering om advies in onze handen gesteld, groepeert zich om het volgende eenvoudige vraagstuk der analytische meetkunde: „In een vlak zijn n rechte lijnen gegeven; gevraagd de meetkundige plaats van het punt, waarvoor de som der afstanden tot die n rechten een gegeven waarde heeft".

Beschouwt men de in dit énoncé voorkomende meetkundige elementen „vlak, lijn, punt" als „ruimten van twee, een, nul afmetingen", dan ligt de volgende meerdimensionale uitbreiding van het vraagstuk voor de hand: „In een ruimte R_p zijn gegeven n ruimten R_{q_1}, R_{q_2}, . . . , R_{q_n}; gevraagd de meetkundige plaats der ruimten

R_r, waarvoor de som der afstanden tot de n gegeven ruimten R_q een bepaalde waarde heeft".

Wil men zich niet in algemeenheden verliezen, dan is men genoodzaakt zich tot enkele groepen van bijzondere gevallen van dit algemeene vraagstuk te bepalen. In deze richting heeft de schrijver een gelukkige keus gedaan. Hij blijft zich beperken tot de gevallen, waarin de meetkundige plaats van een punt gevraagd wordt, en neemt aan, dat de n gegeven ruimten R_{q_1}, R_{q_2}, . . . , R_{q_n} hetzelfde aantal afmetingen q hebben. In het eerste hoofdstuk onderstelt hij, dat dit aantal q een eenheid minder is dan het aantal afmetingen p der dragende ruimte R_p; daaraan voegt hij in het tweede hoofdstuk het geval toe, dat in onze ruimte R_3 n rechte lijnen — en incidenteel ook n punten — gegeven zijn.

Het eerste hoofdstuk is verdeeld in drie paragraphen, waarin de dragende ruimte achtereenvolgens een vlak, onze ruimte R_3 en de ruimte R_d met d afmetingen is. Wijl de schrijver onder afstand hier de absolute waarde beschouwt en dus geen rekening houdt met het analytische onderscheid in teeken, is de meetkundige plaats in het platte vlak de omtrek van een convexen veelhoek, in de ruimte R_3 het oppervlak van een convex veelvlak, in de ruimte R_d de begrenzing van een convex polytoop; van deze figuren vertoonen het polyeder en het polytoop in dien zin een bijzonder karakter, dat ze vlakken en ruimten R_i toelaten, die ze uitsluitend volgens ribben en i—1-dimensionale grenspolytopen snijden. Met groote nauwkeurigheid worden van het de meetkundige plaats vormende polytoop de aantallen der hoekpunten, ribben, zijvlakken, grenslichamen, enz. bepaald; deze aantallen blijken naar behooren te voldoen aan de voor het convexe polytoop geldende uitbreiding der bekende wet van Euler.

In het tweede hoofdstuk, dat verreweg het belangrijkste is, bepaalt de schrijver de meetkundige plaats der punten, waarvan de afstanden tot n gegeven rechten onzer ruimte een gegeven som opleveren. In plaats van een door platte vlakken begrensd veelvlak levert het analytisch onderzoek, waarbij de algebraïsche som der afstanden de som der absolute waarden gaat vervangen, een veelbladig oppervlak van den graad 2^n op, waarvan een bepaald blad aan het geval der absolute afstanden beantwoordt; natuurlijk is dit blad alleen dan bestaanbaar als de gegeven som der afstanden een bepaald minimum overtreft. In het algemeen hangen twee bij verschillende teekencombinaties der afstanden behoorende bladen van de geheele meetkundige plaats slechts in het oneindige samen en ver-

toont zich dan alleen samenhang in het eindige, als de teekencombinaties der afstanden op die met betrekking tot een der gegeven lijnen na gelijk zijn; hierbij vindt deze samenhang in het eindige dan op de bedoelde lijn plaats. De beschouwing van het bijzondere geval, dat er drie lijnen gegeven zijn en deze in een zelfde vlak liggen, verhoogt de duidelijkheid der voorstelling, te meer wijl het door een bijzonder geslaagde figuur is toegelicht.

Het zou ons te ver voeren, indien we al het merkwaardige gingen opsommen, dat vervat is in de zes paragraphen van dit aan de studie van het oppervlak van den graad 2^n gewijde hoofdstuk. Dus gaan we het uitstekend onderzoek omtrent de singuliere krommen van het oppervlak en zijn singuliere punten van verschillend soort met stilzwijgen voorbij. Evenmin houden wij stil bij de behandeling der verschillende gevallen, waarin dit oppervlak — en ook het analoge oppervlak, dat bij vervanging der n rechten door n punten optreedt — zijn graad verlaagt. Alleen bij het onderwerp van de laatste paragraaph, het geval van slechts twee gegeven lijnen, wenschen we nog een oogenblik Uwe aandacht te bepalen. Het met dit eenvoudigst denkbare geval overeenkomende oppervlak O^4 van den vierden graad hangt van drie grootheden af, van den kortsten afstand $2k$ der gegeven lijnen, den hoek 2α dier lijnen en de constante waarde c der afstandensom. Bestaat er tusschen deze drie willekeurig onderstelde grootheden geen nader verband, dan is het oppervlak O^4 een bijzonder Kummer'sch oppervlak met twee in het oneindige liggende dubbelrechten, waarvan dientengevolge de 16 kegelpunten en de 16 kegelsneeraakvlakken niet alle van elkaar verschillen; behalve de twee dubbelrechten liggen op dit oppervlak vier enkelvoudige rechten. Is de constante som c der afstanden echter gelijk aan den kortsten afstand $2k$ der gegeven lijnen, dan gaat dit Kummer'sch oppervlak over in het bekende oppervlak van STEINER met drie door een punt gaande dubbelrechten, welk punt hier het oneindig verre punt van den kortsten afstand der gegeven lijnen is.

In deze verhandeling geeft de begaafde schrijver blijk van groote vaardigheid in het generaliseeren; naar onze meening ligt de verdienste van zijn werk hierin, dat hij bij het generaliseeren niet oppervlakkig is geworden, doch uitkomsten heeft geleverd, die in diepte niet verloren hebben. Met warmte bevelen wij de opneming ervan in de Verhandelingen onzer Akademie aan.

Groningen. P. H. SCHOUTE.
Delft. J. CARDINAAL.

De conclusie van het Verslag wordt goedgekeurd.

Anatomie. — De Heer Vosmaer biedt eene mededeeling aan van den Heer B. van Tricht. „*Over den invloed der vinnen op den vorm van het rompmyotoom*". (Uit het Anatomisch laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer C. Winkler).

(Aangeboden in de vergadering van 30 Maart 1907).

Dit onderzoek is een onmiddellijk vervolg op Professor Langelaan's werk „Over den vorm van het romp-myotoom", en heeft ten doel den invloed na te gaan der vinnen op den vorm van het myotoom. De methode die ik volgde, was gebaseerd op het voornaamste resultaat van het voorafgaand onderzoek, nl. dat de differentiatie van het myotoom op continue wijze plaats heeft door middel van plooiing, en dat het mogelijk is dit proces te vervolgen door prepareeren van het intermyotomale weefsel. Nu bleek het, dat de methode van direct prepareeren beperkt was in hare toepassing, zoodat het noodzakelijk was gedeeltelijk een meer indirecten weg te volgen. Deze indirecte methode berust op het verband dat er bestaat tusschen den vorm van het myotoom en den bouw der dwarsdoorsneden door het dier.

Differentiatie van de dorsale musculatuur.

Van een vrij groot exemplaar van Mustelus vulgaris werd de huid met onderliggend bindweefsel verwijderd, zoodat het buitenoppervlak der myotomen bloot lag. (Fig. I). Vervolgens werden, in de streek rostraal van de eerste dorsale vin, de deelen vastgesteld die één en hetzelfde myotoom vormen. Dit myotoom vertoonde ongeveer denzelfden vorm als bij Acanthias, met dit verschil, dat het laterale deel caudaal verplaatst bleek te zijn. De breedte dezer verplaatsing beliep ongeveer de halve breedte van het myotoom. Aan dit myotoom werd willekeurig het nummer 1 toegekend en aan de opvolgende myotomen opvolgende nummers. Daarna werden dwarsdoorsneden door het dier gemaakt van 1—2 cM. dikte, en de nummering op deze doorsneden overgebracht, zoodat de lamellen, die tot één en hetzelfde myotoom behoorden, hetzelfde nummer kregen. Ter wille van de gemakkelijke beschrijving geeft fig. II een halfschematische voorstelling van het myotoom, waarvan de pieken aangeduid zijn met cijfers, de lamellen met letters. In fig. III die een dwarsdoorsnede voorstelt, (in fig. I met A aangeduid) zien wij de pieken als stelsels van concentrische lamellen, die in overeenstemming met de notatie van fig. II zijn aangeduid. Komen wij nu in het gebied der eerste dorsale vin, (fig. IV, coupe B van fig, I en fig. V, coupe

C van fig. I) dan is het beeld der dwarsdoorsnede veranderd ; in plaats van vier pieken, blijkt de dorsale musculatuur uit nog slechts drie te zijn samengesteld. De piek die met N°. 1 werd aangeduid is verdwenen en in plaats van deze piek vinden wij de eerste lamellen der dorsale vin. In alle opvolgende doorsneden verschijnt deze eerste piek nu niet meer. Door de methode van opeenvolgende nummering was het mogelijk vast te stellen, welk het eerste myotoom is, dat zijn meest dorsale piek (N°. 1) verliest. De buitenoppervlakte van dit myotoom is zwart gemaakt in fig. I. Uit het beginsel, uiteengezet in den aanvang dezer mededeeling, volgt, dat het myotoom, dat schijnbaar zijn eerste piek verliest, een element levert aan de dorsale vin ; dit element is daarom eveneens in fig. I zwart gemaakt. Men merke op, dat het eerste myotoom, dat een spierelement aan de vin levert, een weinig caudaal gelegen is ten opzichte van den voorrand dier vin. Het aantal myotomen, dat een aandeel aan de eerste dorsale vin levert, kan gemakkelijk vastgesteld worden, daar deze samenstellende deelen der vin van elkaar gescheiden zijn door intersegmentaal weefsel ; dat wij werkelijk te maken hebben met intersegmentaal weefsel volgt uit het feit, dat door deze lamellen bloedvaten en uiterst fijne zenuwvezels de huid bereiken (zie v. Bisselick „Over de Innervatie van het Romp-Myotoom"). Het totale aantal der spierelementen welke de eerste dorsale vin samenstellen, beliep 34, zoodat het laatste myotoom dat nog een element levert aan de eerste dorsale vin, reeds in het gebied der tweede dorsale vin is gelegen. Uit het feit, dat de meest dorsaal gelegen piek (N°. 1) niet meer in de dwarsdoorsneden te voorschijn treedt, volgt, dat het eerstkomend myotoom het eerste spierelement aan de tweede dorsale vin levert. Het oppervlak van dit myotoom is eveneens zwart gemaakt in fig. I om zijn ligging ten opzichte van den voorrand der tweede dorsale vin aan te toonen. Klaarblijkelijk neemt dit myotoom dezelfde plaats in met betrekking tot de tweede dorsale vin als het eerste myotoom doet met betrekking tot de eerste dorsale vin. Het aantal myotomen, dat de tweede dorsale vin vormt, beloopt 30.

Op de tweede dorsale vin volgt het dorsale deel der staartvin. In deze vin zijn de myotomen zóózeer samengedrukt, dat een directe telling van het aantal spierelementen hetwelk de vin vormt, niet meer mogelijk is ; door vergelijking van het geheele aantal wervels met het aantal myotomen dat eerste en tweede dorsale vin vormt, blijkt, dat ongeveer 70 myotomen een element leveren aan het dorsale deel der staartvin.

De uitkomsten, verkregen door deze indirecte methode, worden bevestigd door de resultaten, met direct prepareeren verkregen. Wanneer wij een myotoom nemen dat een spierelement levert aan het

meer naar voren gelegen deel der dorsale vin, en beginnen met lamel *b* in de buurt van de tweede piek, caudaalwaarts gaande, te prepareeren, vinden wij, dat lamel *b* in mediale richting is ingerold, in de ondiepe uitholling waarin de basis van de vin rust. (fig. VI). Op dezen weg wordt het spierweefsel gaandeweg atrofisch en slechts een dunne band blijft over, bestaande uit het bindweefsel, dat het omhullende weefsel van de spiervezels vormt. In de nabijheid van het sagittale lichaamsvlak is deze lamel gevouwen, en wel zóó, dat de plooilijn (fig. VI *L''* *L''*) evenwijdig loopt aan de sagittale as van het lichaam. Door deze invouwing wordt de richting van lamel *b* omgekeerd, zoodat het omgevouwen deel craniaalwaarts loopt; dit deel van lamel *b* gaat over in de dichte bindweefsellaag, die gelegen is tusschen de dorsale musculatuur en de basis der vin. Voor zoover ik zien kan is deze laag bindweefsel opgebouwd uit een groot aantal van zulke lamellen, maar deze zijn zóó innig tot één geheel vereenigd, dat ik niet in staat was lamel *b* in deze laag te vervolgen. Wanneer wij, uitgaande van de vin, een spierelement vrij prepareeren, en dit met genoeg voorzorg optillen, zien wij dat ook van af de basis van zulk een vinelement een dunne lamel bindweefsel in die weefsellaag overgaat, waarin wij eveneens het omgeslagen deel van lamel *b* konden vervolgen. Den directen samenhang echter van beide lamellen in deze laag van dicht bindweefsel, ben ik niet in staat geweest aan te toonen.

De spierelementen (Fig. VI) die de vin samenstellen zijn driehoekige platen; een zijde van den driehoek ligt tegen de vinstralen en het bindweefsel dat deze vereenigt in het mediane lichaamsvlak, de laterale zijde maakt deel uit van het laterale oppervlak der vin, terwijl de basis uitgehold is en aansluit tegen de ondiepe inbochting der dorsale musculatuur. Van buiten af dringt een septum van intermyotomaal weefsel (s. i. fig. VI) de spiersubstantie van de vin binnen, deze substantie verdeelend in een lateraal deel *l* (*b*) en een mediaal deel *l* (*a*). Dit septum insereert even boven de spiersubstantie op de vinstralen, en wordt dunner en dunner zonder de basis van de vin te bereiken. Aan de basis zijn dus lateraal en mediaal deel van de spiersubstantie één geheel en vormen een piek (Fig. VI p. 1), die vlak tegen het mediane septum van het lichaam rust. Deze piek moet dus de piek vertegenwoordigen, die in de dwarsdoorsnede der dorsale musculatuur verdween (Fig. IV), welke wij ter hoogte van de eerste dorsale vin maakten. Het septum, dat in de spiersubstantie van de vin binnendringt is dus het intermyotomale septum, dat ligt tusschen lamel *a* en *b* van figuur II.

Uit de gecombineerde waarnemingen volgt dus, dat de eerste

dorsale vin (en hetzelfde geldt voor de andere dorsale vinnen) gedifferentiëerd wordt door een inplooiing, op de zelfde wijze als de differentiatie plaats had tusschen dorsaal en lateraal, zoowel als tusschen lateraal en ventraal deel van het myotoom. De plooilijn loopt over lamel *b*. In dat gedeelte van de lamel, dat in de diepte van de plooi ligt, is het spierweefsel atrofisch. Van uit piek 2 lamel *b* caudaalwaarts vervolgend, zien wij de atrofie der spiervezels gaandeweg toenemen, terwijl wij aan den anderen kant, de atrofie van het spierweefsel plotseling zien beginnen aan de basis van de vin, wanneer wij van piek 1 uit lamel *b* (voor zoover die op de vin ligt) caudaalwaarts vervolgen. De plaats van piek 1 is niet veranderd ten opzichte van het mediane lichaamsvlak, alleen de lamellen zijn veranderd van richting. Het cornu dorsale (d.i. het craniale einde van lamel *a*) is niet meer craniaalwaarts gericht, maar naar boven en dit is ook het geval met dat deel van lamel *b* dat overgaat op de vin. In verband met deze voorstelling der feiten, bepaalde ik de richting der spiervezels in de vin; zij loopen hier van boven naar beneden, divergeerend van af het intermyotomale septum. Als wij nu de lamellen welke de vin vormen in hun oorspronkelijken stand teruggebracht denken, zou de loop der vezels in lamel *a* van mediaal naar lateraal moeten zijn en van caudaal naar craniaal, en dit was werkelijk de richting der spiervezels in lamel *a*, in het gebied rostraal van de eerste dorsale vin.

Differentiatie der latero-ventrale musculatuur.

De laterale musculatuur vertoont, volgens de beschrijving door Van Bisselick gegeven, een piek die caudaalwaarts gericht is (piek 5) fig. II en fig. VII) en gelegen in de nabijheid der tweede plooilijn *L'L'*. Komen wij meer caudaal, dan zien wij een tweede piek optreden, die craniaalwaarts gericht is. Het eerste myotoom dat deze piek vertoont (piek 6, fig. II en fig. VII) is het elfde myotoom volgende op het eerste myotoom, dat een element geeft aan de voorste dorsale vin. Beide pieken liggen dicht bij elkaar in de nabijheid der tweede plooi. Tengevolge van de inplooiing van het myotoom daar ter plaatse, komen zij niet aan het lichaamsoppervlak, doordat zij bedekt worden van buiten af door de ventrale musculatuur. Gelijktijdig verandert het ventrale deel van het myotoom van vorm; de eerste lamel, behoorend bij de ventrale musculatuur (lamel *f* fig. II en fig. VII) wordt korter, en de eerste, craniaalwaarts gerichte piek der ventrale musculatuur (piek 7 fig. II) ontwikkelt zich meer en meer tot een ware piek. Nu naderen piek 6 en 7 elkander, tengevolge van het

verdwijnen van lamel *f*, maar zij blijven steeds gescheiden door een dunne lamel bindweefsel, welke in de tweede plooi binnendringt langs de lijn *L'L'* (fig. VIII en IX). Tengevolge van de inplooiing ligt piek 6 mediaal ten opzichte van piek 7, welke piek 6 van buiten bedekt. Ter hoogte van myotoom 15 (gerekend van het eerste myotoom dat een element aan de voorste dorsale vin geeft) verdwijnt de tweede plooi. Tegelijk hiermede verdwijnt de verplaatsing der laterale musculatuur ten opzichte der ventrale, die slechts een gevolg was van het plooiingsproces, zoodat beide pieken (6 en 7) nu tegen elkaar liggen in het zelfde transversale vlak. Op het oogenblik dat de tweede plooi verdwijnt, vereenigen zich beide pieken tot één enkele craniaalwaarts gerichte. Met het verdwijnen van lamel *f* gaat de verdere ontwikkeling van lamel *g* gepaard.

In het zelfde gebied waar de tweede laterale plooi verdwijnt treedt de kraakbeenplaat op die beide basipterygii der buikvinnen verbindt. Met zijn voorrand vouwt deze plaat lamel *g* (fig. II en X) in, van binnen naar buiten, zoodat deze lamel den voorrand van de plaat bedekt; op deze wijze wordt de buikvin gevormd. De bijzonderheden van de vorming der buikvin heb ik nog niet onderzocht. Bij de vorming der buikvin gaan piek 8 (fig. II) en lamel *g* en *h* over in de vinmusculatuur, zoodat de rompmusculatuur op een dwarsdoorsnede door het dier, ter hoogte van de buikvin, slechts bestaat uit vijf pieken, (nl. 2. 3. 4. 5. 6 + 7) van fig. II). De bouw der transversale doorsneden verandert niet meer, caudaalwaarts langs het lichaam voortgaande (fig. XI en XII).

Het verdwijnen der eerste plooi welke dorsale van laterale musculatuur scheidt, heeft plaats, op dezelfde wijze als voor de tweede plooi beschreven is, ter hoogte van myotoom 45, eveneens gerekend van het eerste myotoom dat een element geeft aan de voorste dorsale vin; alleen is het geval eenvoudiger, doordat het niet gecompliceerd wordt door de aanwezigheid van twee pieken.

Ten slotte wijdde ik mijn aandacht aan den invloed der lichaamsholte op den vorm van het myotoom. Ik vond dat deze invloed zeer gering is, daar hij slechts in zekere mate de afmetingen van het myotoom bepaalt, zonder tot eenige bijzondere differentiatie van den myotoomvorm aanleiding te geven.

Ten slotte betuig ik mijn dank aan Professor Langelaan voor zijn steun mij bij dit onderzoek verleend.

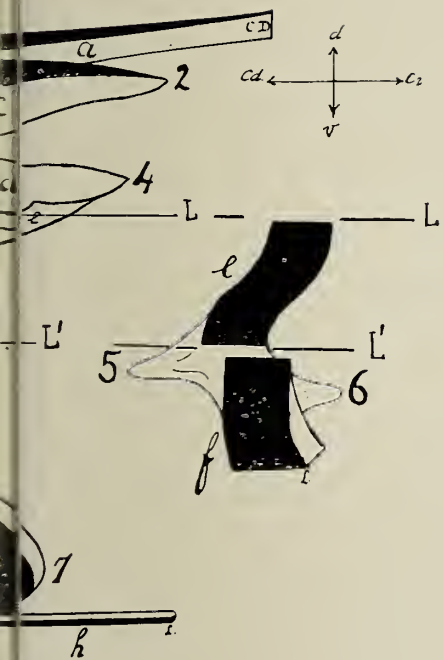


Fig. II.

verdwijnen van lamel *f*, maar zij blijven steeds gescheiden door een dunne lamel bindweefsel, welke in de tweede plooi binnendringt langs de lijn *L'L'* (fig. VIII en IX). Tengevolge van de inplooiing ligt piek 6 mediaal ten opzichte van piek 7, welke piek 6 van buiten bedekt. Ter hoogte van myotoom 15 (gerekend van het eerste myotoom dat een element aan de voorste dorsale vin geeft) verdwijnt de tweede plooi. Tegelijk hiermede verdwijnt de verplaatsing der laterale musculatuur ten opzichte der ventrale, die slechts een gevolg was van het plooiingsproces, zoodat beide pieken (6 en 7) nu tegen elkaar liggen in het zelfde transversale vlak. Op het oogenblik dat de tweede plooi verdwijnt, vereenigen zich beide pieken tot één enkele craniaalwaarts gerichte. Met het verdwijnen van lamel *f* gaat de verdere ontwikkeling van lamel *g* gepaard.

In het zelfde gebied waar de tweede laterale plooi verdwijnt treedt de kraakbeenplaat op die beide basipterygii der buikvinnen verbindt. Met zijn voorrand vouwt deze plaat lamel *g* (fig. II en X) in, van binnen naar buiten, zoodat deze lamel den voorrand van de plaat bedekt; op deze wijze wordt de buikvin gevormd. De bijzonderheden van de vorming der buikvin heb ik nog niet onderzocht. Bij de vorming der buikvin gaan piek 8 (fig. II) en lamel *g* en *h* over in de vinmusculatuur, zoodat de rompmusculatuur op een dwarsdoorsnede door het dier, ter hoogte van de buikvin, slechts bestaat uit vijf pieken, (nl. 2. 3. 4. 5. 6 + 7) van fig. II). De bouw der transversale doorsneden verandert niet meer, caudaalwaarts langs het lichaam voortgaande (fig. XI en XII).

Het verdwijnen der eerste plooi welke dorsale van laterale musculatuur scheidt, heeft plaats, op dezelfde wijze als voor de tweede plooi beschreven is, ter hoogte van myotoom 45, eveneens gerekend van het eerste myotoom dat een element geeft aan de voorste dorsale vin; alleen is het geval eenvoudiger, doordat het niet gecompliceerd wordt door de aanwezigheid van twee pieken.

Ten slotte wijdde ik mijn aandacht aan den invloed der lichaamsholte op den vorm van het myotoom. Ik vond dat deze invloed zeer gering is, daar hij slechts in zekere mate de afmetingen van het myotoom bepaalt, zonder tot eenige bijzondere differentiatie van den myotoomvorm aanleiding te geven.

Ten slotte betuig ik mijn dank aan Professor Langelaan voor zijn steun mij bij dit onderzoek verleend.

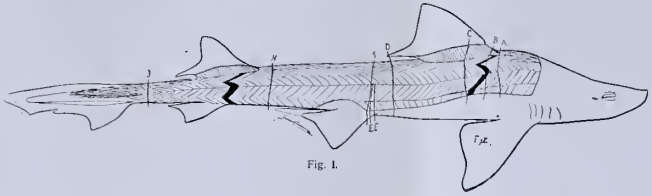


Fig. I.

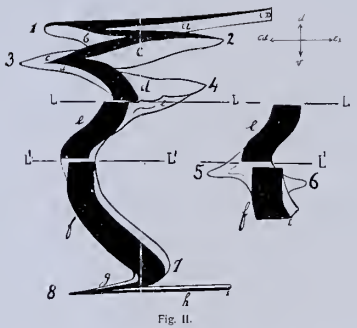


Fig. II.

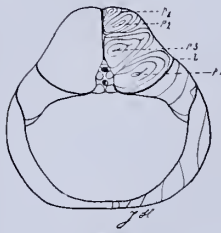


Fig. III.

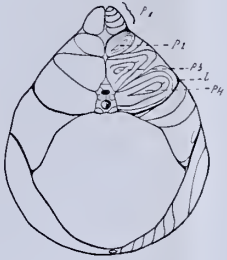


Fig. IV.

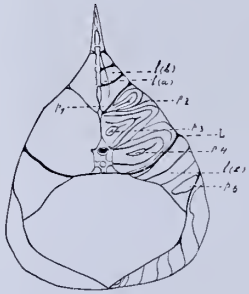


Fig. V.

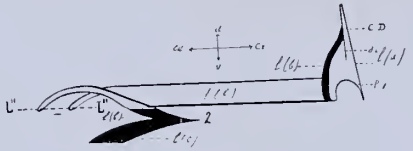


Fig. VI.

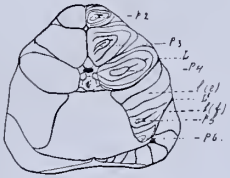


Fig VII.

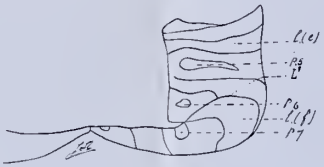


Fig. VIII.

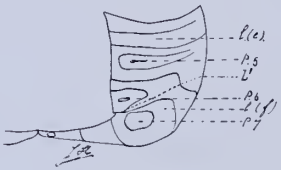


Fig. IX.

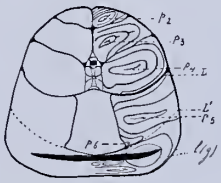


Fig. X.

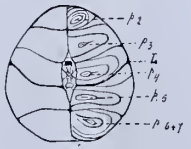


Fig. XI.

Fig. XII.

Anatomie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van Dr. L. J. J. MUSKENS: *„Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen"*. (3e Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer T. PLACE.)

(Aangeboden in de vergadering van 30 Maart 1907).

Ventrale kleinhersen-thalamusbundel.

Terwijl alle onderzoekers kunnen geacht worden, het daarin eens te zijn geworden, dat, als het ééne eindpunt der meeste den bovensten kleinhersensteel samenstellende zenuwvezelen, de nucleus dentatus en nucleus tecti van de kleinhersenen moet worden beschouwd, zal het thans ook nauwelijks meer op tegenspraak stooten, indien verzekerd wordt, dat de richting van ontaarding in den bovensten kleinhersensteel is cerebello-fugaal. Slechts MINGAZZINI [1]) trachtte nog onlangs een cerebellopetale geleidingsrichting dezer vezelen te verdedigen, op grond van pathologische preparaten, waarvan de gegevens zeker minder betrouwbaar zijn te achten dan die, verkregen in het experiment.

Minder eenstemmigheid daarentegen is bereikt geworden, wat betreft de drie andere vezelbundels, welke tot nu toe door kleinhersenonderzoekers volgens de methode van MARCHI zijn beschreven geworden, in verband met den voorsten kleinhersensteel. Omtrent twee van deze bundels laat mijn tot nu toe onderzocht materiaal nog geen oordeel toe. Alleen mag er misschien aan herinnerd worden, dat zoowel door VAN GEHUCHTEN [2]) als LEWANDOWSKY [3]) het bestaan van den, door PROBST genoemden accessorischen kleinhersenbundel zeer ernstig in twijfel is getrokken, terwijl de aangiften van den laatste omtrent het verband tusschen den, door R. RUSSELL ontdekten haakbundel en de vestibulariskernen nog niet bevestigd werden. Het is omtrent den derden vezelbundel, waarover, naar ik meen, een tiental mijner preparaten-seriën, een voorloopig oordeel toelaten. Ik bedoel den bundel, die, afkomstig uit den voorsten kleinhersensteel, dààr, waar hij in de commissuur van WERNEKINK de middellijn gekruist heeft, volgens PELLIZZI, VAN GEHUCHTEN en andere onderzoekers, in de streek van den nucleus reticularis, in den pons en het verlengde merg zoude afdalen tot de streek der abducenskernen. Het optreden van een groot aantal kleine, door de osmium donker gekleurde stip-

[1]) MINGAZZINI. Monatschr. f. Psychiatrie u. Neurologie. 1904.
[2]) VAN GEHUCHTEN. Le nevraxe. 1905. Vol. VII.
[3]) LEWANDOWSKY. Neurobiologische Arbeiten. Band I. H. 1. 1904.

pen, naast de raphe, dorsaal van het mediale lint, en wel aan den gezonden kant, werd behalve door de genoemde onderzoekers ook door Thomas, Orestano, Cayal en Lewandowsky na diverse kleinhersenlaesies bemerkt.

Het vraagstuk omtrent de beteekenis van dezen bundel, door Probst de ventrale kleinhersen-thalamus-bundel genoemd, laat zich in twee détail-vragen splitsen. Eerstens is te beantwoorden: Wat is het distale eindpunt van de dezen bundel samenstellende vezelen; want dat het centrale einde van dezen bundel in den rooden kern en thalamus is gelegen, wordt, meen ik, door geen enkelen onderzoeker betwijfeld. Tweedens moet worden vastgesteld, welke de degeneratierichting is in dezen bundel, in welke richting derhalve de geleiding van indrukken in dit deel van het centrale zenuwstelsel plaats grijpt.

Terwijl in een vorige mededeeling [1]) erop werd gedrukt, hoe na de exstirpatie van den flocculus, of beter gezegd, van den lobus petrosus cerebelli van het konijn, regelmatig in de formatio reticularis aan de gezonde zijde deze bundel gedegenereerd gevonden wordt, was het noodig, ruimere gegevens bijeen te brengen, teneinde daaraan een reeds destijds uitgesproken vermoeden, als zoude speciaal na laesie van dit deel der formatio vermicularis de degeneratie van dezen bundel vaker worden waargenomen, te toetsen. Voor een opzettelijk onderzoek in deze richting bleken katten meer geschikte proefdieren dan konijnen en het is dan ook aan die dieren, dat door mij in zeer verschillende andere deelen der cortex cerebelli gelocaliseerde exstirpaties, meest met laesie van het bijbehoorende deel van den nucleus tecti en nucleus dentatus, werden verricht, zonder zulk eene uitgebreide ontaarding van den ventralen kleinhersen-thalamusbundel te veroorzaken (XXX en XLII), als gevonden werd in 3 andere mijner geopereerde katten, nl. in kat VII, XIV en XXVIII. In deze laatste dieren was steeds ook flocculus cerebelli geexstirpeerd geworden. Hoewel een voortgezet, ook op andere zoogdieren uitgebreid onderzoek gewenscht is, schijnen deze bevindingen er op te wijzen, dat inderdaad de meest laterale deelen van de kleinhersenhemispheren meer dan de overige deelen met den ventralen kleinhersen-thalamusbundel in verband staan. Dat in geen geval in belangrijke mate van den cortex cerebelli afkomstige vezelen deelnemen aan de vorming van dien bundel, blijkt uit geval VIII, waar in de streek der formatio vermicularis alleen de cortex werd getroffen; hierbij werd de ventrale bundel intact gevonden.

---

[1]) L. J. J. Muskens, 2e Mededeeling. Koninkl. Akad. v. Wetensch. 30 Dec. 1905.

Herinneren wij ons nu uit mijn 2e Mededeeling [1]), dat bij het konijn de vezelen van het middelste derde deel van den bovenste kleinhersensteel tot ontaarding komen, indien met den cortex flocculi (i. e. lobus petrosus), ook het betrokken deel van den nucleus dentatus is gekwetst geworden, dan mag vermoed worden zoowel voor katten als konijnen, dat het degenereeren van den ventralen kleinhersen-thalamusbundel voornamelijk het gevolg zal zijn van een laesie van dat deel van den nucleus dentatus, dat correspondeert met de formatio vermicularis.

Erkennen wij met de genoemde onderzoekers den nucleus ruber, eventueel ook de ventrale thalamus-kernen, als eindpunt der ons hier interesseerende baan, met de vraag naar het andere uiteinde dier baan hangt die naar de degeneratie-richting ten nauwste samen. Immers, volgens Probst zou het distale eind gelegen zijn in het cerebellum, terwijl volgens Cayal, Thomas, van Gehuchten en Lewandowsky, deze collateralen van den voorsten kleinhersensteel in den nucleus reticularis van pons en verlengde merg hun eind zouden vinden. Van het materiaal, tot nu toe bijeengebracht, teneinde nader deze verhoudingen te onderzoeken, volgt een korte mededeeling omtrent die preparaten, welke berusten op experimenten, genomen met kwetsing, of niet-kwetsing van tot de vorming van dezen bundel medewerkende, vezelen of van den bovensten kleinhersensteel zelve.

In 2 dieren werd bezijden de middellijn over den lobus simplex cerebelli heen, een laesie aangebracht, distaal van den rooden kern, dààr, waar de ventrale bundel in de formatio reticularis in de lengterichting verloopt en de bovenste kleinhersensteel reeds gekruist is. In geen van beide preparaten (XXIII en LXI), werd degeneratie naar de periphere zijde, aangetroffen. Indien de opvatting van Cayal, c.s. juist is, dan moet na deze laesie stellig ook ontaarding van den bundel in kwestie worden gepostuleerd; het uitblijven van deze degeneratie schijnt dus een argument voor het directe cerebellofugaal verloop van deze vezelen.

Anderzijds werd in een kat een overlangsche incisie in het tegmentum, door den middelsten kleinhersensteel heen, verricht, ter controle van het vermoeden, dat de ventrale kleinhersen-thalamusbundel zou zijn samengesteld uit vezelen, die onmiddellijk na hun ontstaan uit den nucleus dentatus door de formatio reticularis heen de raphe zouden kruisen. Inderdaad leert dit experiment, in LVIII genomen, dat ontaarding van dergelijke vezelen, kruisende caudaal van de achterste corpora quadrigemina, van deze laesie het gevolg

[1]) L. J J. Muskens. 1e Mededeeling. Koninkl. Akad. v. Wetensch. 29 Oct. 1904.

is. In LVIII kan men zulke vezelen met een, naar achter convexen boog, de raphe zien kruisen, teneinde, in de formatio reticularis gekomen, in de lengterichting oraalwaarts om te buigen. Deze waarneming zou derhalve erop wijzen, dat niet slechts door den middelsten kleinhersensteel zelf (vergelijk 1e Mededeeling over de verhoudingen bij het konijn) door eenige der bedoelde vezelen de middellijn gekruist wordt, doch ook door middel van den directen weg, via de formatio reticularis der zelfde zijde en dorsaal van het mediale lint. Weliswaar konden door deze laesie ook vezelen getroffen zijn, die uit het laterale lint en nabijgelegen deelen afkomstig, de middellijn kruisen en in den predorsalen bundel frontaalwaarts verloopen; temeer, daar door LEWANDOWSKY [1]) met O. P. dergelijke vezelen in fig. 36 en 37 worden afgebeeld. Verwarring met deze vezelen is echter reeds daarom uit te sluiten, omdat het verdere verloop van den door L. tractus ascendens pontis genoemden bundel een geheel andere is, dan die in mijne preparaten, welke gelijk reeds boven gezegd, direct den weg naar den nucleus ruber inslaan.

Eindelijk werd in een dier de voorste kleinhersensteel gedeeltelijk doorsneden, daarbij ook de middelste kleinhersensteel geincideerd (LXII); ook bij dit dier werd distaal van de laesie *geen* degeneratie van den kleinhersen-thalamusbundel aangetroffen. Was nu de ventrale kleinhersen-thalamusbundel slechts een bundel van afdalende collateralen van den voorsten kleinhersensteel, dan zoude in dit dier ook verder distaalwaarts het bewuste veld ontaard gevonden zijn.

Ten slotte werd in kat LXVIII een hemisectie van de pons verricht. Ook hier wordt slechts aan de orale zijde van de laesie ontaarding in het hier bestudeerde veld aangetroffen; hetgeen ook wederom nauwelijks verklaard kan worden, dan door met Probst aan te nemen, dat wij hierbij met een echte kleinhersen-thalamusverbinding te doen hebben.

Ik meen derhalve, op grond van deze gegevens, dat naast de opvatting van CAYAL, volgens wien deze bundel uit collateralen van den voorsten bindarm bestaat, ook nog plaats is voor die van PROBST, waarvoor zoowel positieve als negatieve argumenten kunnen worden bijgebracht.

---

[1]) Loc. cit. blz. 78.

Mikrobiologie. — De Heer Beijerinck doet eene mededeeling over: *„Melkzuurgisting in melk".*

In aan zich zelf overgelaten melk, die tengevolge van spontane infektie de meest algemeen verspreide kiemen bevat, worden met zekere regelmatigheid bepaalde mikrobenflora's waargenomen, wier samenstelling vooral door twee faktoren beheerscht wordt, namelijk, de temperatuur en de zuurstofspanning. Is de laatste zeer gering, dat wil zeggen verkeeren de mikroben in de melk onder meer of minder volkomen anaërobe condities, dan worden de flora's eenvoudig van samenstelling en veroorzaken zekere gistingen. De drie voornaamste dezer gistingen zijn de Aerobacter-, de Boterzuur- en de Melkzuurgisting, waarvan de beide eerste steeds gekenmerkt zijn door de ontwikkeling van waterstof en koolzuur, terwijl bij de melkzuurgisting, die onder verschillende vormen kan voorkomen, naast het melkzuur in het geheel geen gas, of koolzuur alleen ontstaat. Somtijds gaat de melkzuurgisting gepaard met sterke slijmvorming, welk slijm bestaat uit de opgezwollen celwanden der betrokken melkzuurfermenten.

Voor de menschelijke huishouding moeten de melkzuurgistingen als nuttig, de beide andere als nadeelig worden beschouwd.

De gistingsproef der zuivelfabrieken voor de beoordeeling van de zuiverheid van de melk, heeft tot bedoeling de algemeenheid of zeldzaamheid der kiemen van *Aerobacter* en van de boterzuurfermenten vast te stellen. Daartoe wordt een hoog standglas met melk gevuld, in een waterbad van 40° C. geplaatst en waargenomen of zich gistingsgas ontwikkelt en zoo ja na hoeveel tijd. In goede melk vindt gasontwikkeling niet plaats, omdat daarin de melkzuurfermenten zoo spoedig op den voorgrond komen, dat de andere genoemde mikroben worden verdrongen. De Aerobactergisting in melk verkrijgt men kunstmatig het gemakkelijkst door niet gezuurde melk met faeces, grond of grachtwater te infekteeren en bij omstreeks 37° à 40° te kultiveeren. Reeds na 6 à 12 uur neemt men dan meestal gasontwikkeling waar, die afkomstig is van *Aerobacter coli* of zeldzamer van *A. aërogenes* De aard van de daarbij verkregen varieteiten is o. a. afhankelijk van de gekozen temperatuur.

Gewoonlijk, vooral bij temperaturen beneden 40°, wordt de Aerobactergisting na eenige uren voortgeduurd te hebben, vervangen door een boterzuurgisting, en nog later deze door een melkzuurgisting. Uiterlijk zijn de *Aerobacter* en boterzuurgisting niet te onderscheiden, mikroskopisch gemakkelijk.

Heeft men aan de melk 3 à 5% krijt toegevoegd en kultiveert

men in een gesloten flesch bij 35° a 40° C., dan kan de boterzuurgisting langer doorgaan en bij vroegtijdig overenten, eveneens in melk met krijt en bij luchtafsluiting, de ontwikkeling der melkzuurfermenten tegenhouden, zonder deze fermenten evenwel geheel te verdringen.

Mikroskopisch is de boterzuurgisting herkenbaar aan de lange, dunne bij neutrale reaktie sterk bewegelijke staven, somtijds gemengd met gestrekte of meer afgeronde, met jodium zich blauw kleurende clostridiën, alle behoorende tot de soort *Granulobacter saccharobutyricum*.

Om uit een zoodanige ruwe boterzuurgisting in melk de melkzuurfermenten, die daarin bijna nooit ontbreken op den voorgrond te laten komen, is het voldoende een weinig daarvan over te enten in melk zonder krijt en deze overenting zoo noodig te herhalen nadat de boterzuurgisting is afgeloopen. Onverschillig of dit geschiedt in open of gesloten flesschen of kolven zal men dan bij 37° à 40° melkzuurstaven van het geslacht *Lactobacillus* op den voorgrond zien komen, die bij herhaald overenten de boterzuurfermenten geheel verdringen.

Gaat men bij deze proeven niet uit van versche, niet verwarmde infectiematerialen, maar verhit men den voor de infektie gebruikten grond, het water of de faeces vooraf tot 80 à 95° C., waardoor alleen sporen vormende mikroben in de melk tot ontwikkeling kunnen komen, dan ontstaan de gistingen van *Aerobacter* en de melkzuurfermenten niet, omdat de kiemen daarvan geen sporen voortbrengen, maar men verkrijgt een boterzuurgisting, waaruit de aerobe sporenvormers door herhaald overenten bij luchtafsluiting, kunnen verdrongen worden.

1. *Eigenschappen der aktieve melkzuurfermenten.*

Daar vele bacterien, van de meest verschillende groepen, melkzuur kunnen voortbrengen, schijnt het niet overbodig aan te geven, welke de kenmerken der eigenlijke melkzuurfermenten zijn.

De aktieve melkzuurfermenten van de zuivelbedrijven, de gistfabrieken, de branderijen, de looierijen en de bierbrouwerijen laten zich, hoewel door overgangen verbonden, op praktische wijze indeelen in de physiologische gedachten *Lactococcus*, *Lactobacillus* en *Lactosarcina*, waarvan in de zuivelprodukten alleen de beide eerstgenoemde voorkomen [1]).

[1]) In de hoofdflora's van melk en zuivelprodukten kemen, voor zoover mij bekend is, geene soorten van *Lactosarcina* voor. Wel zegt EMMERLING in Armenisch mazun een gele *Sarcina* gevonden te hebben (Centralbl. f. Bacteriologie, 2te Abt. Bd. 4, pag. 418, 1898) maar dat kan niet anders dan een gewone verontreiniging geweest zijn. Ook in boter kunnen accidenteel zeer wel sarcine-soorten voorkomen, maar zij behooren niet tot de hoofdflora, die uit melkzuurfermenten en lipofielen bestaat.

Het zijn steeds onbewegelijke, geen sporen vormende bacteriën, die goed tegen drogen bestand zijn en door verwarming tot temperaturen van 65 à 75° C., waarbij zij nog juist levend blijven, maar die voor de meeste andere niet sporen vormende soorten doodelijk zijn, van deze kunnen gescheiden worden (laktiseeren). Zij vereischen als stikstofvoedsel peptonen, zooals die in melk, moutextrakt of andere sappen van plantaardigen of dierlijken oorsprong voorkomen, en als koolstofbron zekere suikers, die voor verschillende soorten kunnen verschillen. Zij peptoniseeren eiwit niet en brengen dus ook niet gelatine tot versmelting; wel kan het afgescheiden melkzuur een zekere hoeveelheid caseine oplossen, maar dit lichaam blijft daarbij onveranderd. Deze omstandigheden regelen hun verspreiding in de natuur, waar zij niet zeer algemeen zijn, maar vooral onder den invloed van den mensch tot snelle vermenigvuldiging kunnen komen. Zij worden echter in den grond gevonden, en kunnen door de straks te noemen methoden daaruit in kultuur worden gebracht.

Zij zijn steeds meer of minder duidelijk mikroaerofiel; sommige soorten of varieteiten kunnen echter zeer goed aan de lucht groeien, andere vormen kunnen dit niet en gedragen zich dus als echte anaeroben. Toetreding of afwezigheid van lucht is voor de zuurvorming meestal onverschillig, maar in de gistindustrie wordt van een soort gebruik gemaakt, die bij vollen luchtdruk geen zuur voortbrengt, en er zijn ook in de zuivelindustrie vormen, die de zelfde eigenschap vertoonen.

Steeds blijft zelfs op goede kultuurgronden, waartoe vooral moutextraktagar en melk- of wei-agar behooren, de groei der koloniën beperkt, vooral indien de lucht en het gevormde zuur gelijktijdig kunnen inwerken. Wordt het zuur door krijt geneutraliseerd, dan kan ook aan de lucht de groei der koloniën belangrijk worden. Toch kan in de meeste gevallen de herkenning dezer fermenten juist op de kleinheid hunner koloniën, vergeleken met die van andere bacteriën, berusten.

Steeds ontbreekt katalase, waarop een voortreffelijke diagnose kan gegrond worden en waartoe het slechts noodig is b.v. een kultuurplaat, waarop allerlei soorten voorkomen, met sterk verdund waterstofsuperoxyd te overgieten, dat dan door alle soorten, uitgezonderd de melkzuurfermenten, onverschillig of deze behooren tot *Lactococcus*, *Lactobacillus* of *Lactosarcina*, in een schuim van zuurstofblaasjes veranderd wordt.

Zelfs de onlangs door mij beschreven [1]) grootcellige *Sarcina*, die

[1]) Deze Verslagen 25 Februari 1905. Archives Néerlandaises T. 1 en 2. T. 11, pg. 200, 1906.

ik op grond van voortgezet onderzoek als identiek met de maagsarcine (*Sarcina ventriculi*) beschouw, en waarvan het zuurvormend vermogen gering is, — n.l. 3 c.c. normaal zuur per 100 c.c. moutextrakt of glucosebouillon, — ontleedt waterstofsuperoxyd volstrekt niet.

Bedenkt men hoe algemeen de katalase overal in het dieren- en plantenrijk, even als in dat der mikroben wordt aangetroffen, dan verschijnt de afwezigheid daarvan juist bij de melkzuurfermenten in eigenaardig licht.

Alle aktieve melkzuurfermenten uit melk inverteeren suiker (invertasereaktie) en kunnen meer of minder gemakkelijk aesculine en indican ontleden (emulsinereaktie). De reaktie op aesculine geschiedt door bijv. 0.1% dezer stof en enkele druppels ferricitraatoplossing in wei-agar of wei-gelatine te brengen. Daarop getrokken strepen van soorten, die de aesculine ontleden, brengen intensief bruine of zwarte diffusievelden voort van aesculetineijzer, bruin bij meer alkalische, zwart bij meer zure reaktie, waardoor de melkzuurfermenten herkenbaar worden aan de zwarte velden te midden waarvan hun koloniën liggen [1]). Zoolang nog aesculine aanwezig is herkent men dit aan de prachtige blauwe fluorescentie van de geheele plaat bij zwak alkalische reaktie. Indican kan op overeenkomstige wijze gebruikt worden, maar hierbij is geen ijzerzout noodig omdat het bij de splitsing afgescheiden indoxyl aan de lucht vanzelf oxydeert tot indigoblauw. De melkzuurfermenten ontleden deze beide glukosiden weliswaar langzaam, maar toch zijn de reakties daarmede zeer karakteristiek en bruikbaar. Amygdaline wordt door de melkzuurfermenten niet ontleed. [2])

Tot de opmerkelijkste eigenschappen der melkzuurfermenten behoort hun vermogen van reduktie van laevulose tot manniet, [3]) welke laatste stof zelfs in geconcentreerde voedingsoplossingen te herkennen is aan de gemakkelijke kristallisatie bij indamping. Een enkele druppel op het objektglas verdroogd, geeft bij mikroskopisch onderzoek meestal volle zekerheid aangaande het bestaan dezer reaktie.

---

[1]) De kennis van deze buitengewoon gevoelige ijzerreaktie, die sinds jaren in mijn laboratorium wordt toegepast, heb ik aan mijn collega TER MEULEN te danken.

[2]) Amygdaline ontleedt onder den invloed van het mikrobenleven in het algemeen veel moeielijker dan de andere in den tekst genoemde glukosiden. Door de schimmels geschiedt dit meestal tot amandelzure ammoniak; door biergist tot amandelnitrilglucosid en glukose. Splitsing onder afscheiding van bittere amandelolie, blauwzuur en glukose ontdekte ik tot nu toe alleen bij *Saccharomyces apiculatus* en het anaerobe ferment der boterzuurgisting, *Granulobacter saccharobutyricum*.

[3]) Ferments lactiques de l'industrie. Archives Néerlandaises 1901. KAYSER, Fermentation lactique. Annales de l'Institut agronomique 1904.

De melkzuurfermenten vertoonen daardoor een scherp contrast tegenover de zoo na daarmede verwante azijnbacterieën, die juist het omgekeerde doen, dat is die door oxydatie van manniet laevulose voortbrengen.

Evenals zoovele andere bacterieënsoorten bezitten de aktieve melkzuurfermenten ook ten opzichte van allerlei kleurstoffen een sterk reduceerend vermogen, dat gemakkelijk is aan te toonen door de fermenten te enten in diepe reageerbuizen gevuld met gekookte en met lakmoes gekleurde melk. De rood geworden lakmoes wordt eerst in de diepte, later tot dicht bij de oppervlakte geheel ontkleurd om bij het inschudden van lucht weer rood te worden. De dikte van de roode laag in de gestremde melk is een nauwkeurige maat voor de intensiteit van den groei en het reduktieproces. Hoe dunner de roode laag des te intensiever die beide funkties natuurlijk moeten wezen.

2. *Faktoren van variabiliteit.*

Vele, wellicht alle melkzuurfermenten vertoonen een hoogen graad van veranderlijkheid bij langdurige kultuur, zoowel wat betreft physiologische als morphologische eigenschappen. Intusschen is deze veranderlijkheid bij verschillende stammen, afkomstig van verschillende isoleeringen der zelfde soort, lang niet altijd gelijk, wat bij de studie der soorten tot moeilijkheden aanleiding kan geven. De omstandigheden die de veranderlijkheid veroorzaken zijn slechts ten deele bekend; zeker behoort daartoe een zuurstofdruk, die te ver boven of te ver beneden den optimumdruk voor de levensverrichtingen is gelegen, hetgeen vooral bij de bacterie van de lange wei (*Lactococcus hollandiae*) met ongewone duidelijkheid kan worden aangetoond.

Deze merkwaardige soort is gekenmerkt door sterke slijmvorming bij kultuur in melk of wei, maar verliest bij temperaturen boven 20°C. dit vermogen zoowel bij den gewonen druk van de zuurstof der lucht als bij volledige afsluiting daarvan, indien de veranderde invloed op de groeiende mikroben kan inwerken. Men toont dit aan door de lange wei in een gesloten flesch te kultiveeren; het bovenlaagje, vlak onder den stop, waar nog een weinig lucht kan komen, wordt dun vloeibaar en bevat dan een erfelijk standvastige, gewone, weinig zuur en geen slijm vormende *Lactococcus*. Ook door te kultiveeren in gekookte melk in kolfjes bij luchttoetreding, verkrijgt men bij 24° C., reeds na één of twee overentingen, uit de lange wei-mikrobe een *Lactococcus*, die volstrekt geen slijm meer vormt. Neemt men het materiaal voor de overenting uit de diepte van in gesloten flesschen gemaakte

kulturen, ter plaatse waar onmogelijk lucht kan komen, dan verkrijgt men na één of meermalen op gelijke wijze de overenting der kultuur te hebben herhaald, eveneens een *Lactococcus*, die geen spoor van slijmvorming meer vertoont.

Op eenige diepte beneden de oppervlakte is echter een streek waarin men onveranderd, slijm vormend, erfelijk standvastig materiaal aantreft.

Wat nu in dit geval met de grootste gemakkelijkheid is vast te stellen, blijkt bij nauwkeurig onderzoek ook bij de andere soorten van melkzuurfermenten te bestaan, namelijk dat zij alleen dan standvastige soortkenmerken blijven vertoonen, indien zij voortdurend bij een bepaalde zuurstofspanning gekultiveerd worden, anders ziet men zekere kenmerken verdwijnen, of feitelijk of schijnbaar nieuwe ontstaan. Men kan derhalve in sommige gevallen bewijzen, in andere waarschijnlijk maken, dat iedere soort in drie (door tusschenvormen verbonden) varieteiten moet voorkomen, namelijk als normaalvorm, als hoogspanning- en als laagspanningvariant.

Daar bij geheel andere afdeelingen van de klasse der bacteriën overeenkomstige feiten kunnen worden waargenomen, is er grond om daaraan een principieele beteekenis toe te kennen.

Een beslissende faktor, die de veranderlijkheid der melkzuurfermenten kan veroorzaken is verder de temperatuur, want de ervaring leert, dat langdurige kultuur boven de optimumtemperatuur van den groei, aanleiding geeft tot het ontstaan van duidelijk onderscheidbare varianten.

In andere gevallen is de oorzaak der veranderlijkheid onbekend; niet zelden ziet men, bijv. bij het allereerst in kultuur brengen eener soort sterk varieerende koloniën, die alleen daardoor blijken tot een en dezelfde soort te behooren, omdat vele koloniën door sektorvariatie den genetischen samenhang der varianten vertoonen.

Maar ook dan bestaat er reden om aan te nemen, dat de nieuwe levenscondities, juist door de verandering in zuurstofdruk en temperatuur, waaraan de uit de natuur afkomstige mikroben onderworpen worden, de hoofdfaktoren waren van het variatieproces. dat men als het ware in gang ziet. De waarneming is van zoo algemeenen aard en in zoo nauw verband met de essentie van het leven, dat het als waarschijnlijk beschouwd moet worden, dat ook bij hoogere planten en dieren lokale verandering in toetreding of onttrekking van zuurstof, in verband met de temperatuur, een belangrijke rol speelt bij de morphogenese.

Daar het onderzoek van andere mikrobensoorten leert, dat de uitputting van den voedingsbodem aan bepaalde stoffen bij behoorlijke

zuurstoftoetreding en gedurende den groei, erfelijke variatie kan veroorzaken, bijv. bij *Schizosaccharomyces octosporus*, die daardoor verandert in den, van den hoofdvorm geheel en al verschillenden sporenvrijen variant, bestaat er reden om ook dezen faktor tehulp te roepen ter verklaring van de groote variabiliteit der melkzuurfermenten, maar de waarnemingen dienaangaande leenen zich nog niet voor duidelijke gevolgtrekkingen.

3. *Elektieve kultuur van de mikroben der slijmige melkzuurgisting.*

Er is reden om aan te nemen, dat de slijmvoortbrengende melkzuurfermenten de normaalvormen zijn en de niet-slijmvormers daarvan afgeleide soorten of varianten. Zij verdienen dus in de eerste plaats behandeld te worden.

Tot de typische slijmvormende soorten behoort de mikrobe der lange wei (*Lactococcus hollandiae*), die vooral vóór den invoer der reinkulturen in de zuivelbedrijven een belangrijke rol heeft gespeeld bij de bestrijding der kaasgebreken in Noord-Holland, en die ook nu nog hier en daar in de praktijk voor dat doel gebruikt wordt.

Verder is mij gebleken, dat het in Noorwegen als „tjaette molken" bekende volksvoedsel, waarvan ik een monster te danken heb aan de welwillendheid van den heer Penning te Rotterdam, uit melk bestaat, waarin door de lange-wei-mikrobe, of tenminste door een daarmee na verwanten vorm, zuur en slijm zijn afgescheiden.

Andere materialen, waarin deze of verwante mikroben voorkomen waren tot nu toe niet bekend, blijkbaar omdat de eigenlijke kultuurconditiën onduidelijk waren gebleven en een goede ophoopingsmethode daarvoor niet bestond. Bij een ruime opvatting van het soortbegrip is het naar mijn meening geoorloofd de op de hier te beschrijven wijze gevonden vormengroep met de genoemde tot een en de zelfde hoofdsoort te brengen.

Uitgaande van de volgende als meest kenmerkend voor de mikroben der slijmige melkzuurgisting aangenomen eigenschappen:

1° het temperatuuroptimum van den groei ligt bij 20° of lager,

2° bij 20° kunnen deze vormen alleen bij anaerobe kultuurcondities concurreeren met de overige mikrobenwereld, en

3° het voedsel moet uit materialen bestaan, die peptonen en koolhydraten bevatten,

gelukte het een zoodanige methode te vinden. Weliswaar onderzocht ik op die wijze slechts een enkel materiaal, namelijk persgist, maar het onderzoek van den grond, van gistende of uitgegiste materialen, in het kort van stoffen van den meest verschillenden aard, kan op overeenkomstige wijze worden uitgevoerd.

De inrichting der proef is de volgende.

In een fleschje van 30 c.c. inhoud, geheel gevuld met moutextract, waaraan nog bovendien $^1/_2$ % pepton siccum is toegevoegd en dat c.a. 10% extrakt bevat, wordt een weinig persgist gedaan bijv. een halve gram. Geplaatst bij een temperatuur van 18° à 20° C., begint daarin een rustige gisting, die men 24 á 72 uur laat doorgaan, waarbij wegens de luchtafsluiting de gist zoo goed als niet, de melkzuurfermenten van verschillende soort sterk groeien. Andere mikrobensoorten komen daarbij niet tot ontwikkeling. Niet zelden is reeds bij deze eerste kultuur de inhoud van het fleschje eenigszins slijmig geworden.

Onverschillig of dat het geval is of niet wordt daaruit overgeënt in een nu met gekookte, luchtvrije melk geheel gevuld fleschje, bijv. $^1/_2$ c.c. van het vergiste moutextrakt in 30 c.c. melk. Bij kamertemperatuur kan zich onder deze voorwaarden alleen een flora van melkzuurfermenten ontwikkelen, en bij de aanwezigheid van de slijmvormende soort is deze de sterkste. De ondervinding leert nu dat de melk werkelijk na 2 of 3 dagen slijmig is geworden en bij overenting in melkwei ontstaat een kultuur, die somtijds zoo weinig verschilt van de gewone lange wei, dat tot soortidentiteit kan besloten worden.

Natuurlijk kan ik niet voorspellen, dat in elk willekeurig gistmonster zulke mikroben voorkomen, en vermeld daarom nog, dat ik voor mijn proeven gebruik maakte van persgist, afkomstig uit de Nederl. Gist- en Spiritusfabriek te Delft, welke gist waarschijnlijk luchtgist bevat.

De op deze wijze verkregen kultuur in melk uitgezaaid, verschilt in zoover van wat bij uitzaaiing van lange wei uit Noord-Holland in melk ontstaat dat in het eerste geval korte staafjes of langgerekte kokken, in het laatste geval meer aan mikrokokken herinnerende maar toch ook eenigszins verlengde vormen worden waargenomen.

Ik verwacht, dat bij herhaling der proef allerlei afwijkende varieteiten zullen gevonden, en door toepassing der methode op andere infektiematerialen wellicht nieuwe soorten van slijmmelkzuurfermenten zullen verkregen worden.

4. *Elektieve kultuur van de laktokokken der roomzuring.*

Daar de laktokokken en de laktobacillen, welke beide in spontaan of op andere wijze verzuurde melk, in kaas en allerlei andere zuivelprodukten voorkomen, naar het schijnt in geen kultuurmateriaal

beter groeien dan juist in melk [1]) moeten de kultuurproeven ook met melk uitgevoerd worden.

Om uit de mikrobenwereld, die in ruwe melk voorkomt praktisch tot een reinkultuur van *Lactococcus* te komen, kan men op de volgende wijze te werk gaan.

Het optimum van den groei ligt bij omstreeks 30° C. of lager en daar alle soorten van *Lactococcus* (evenals die van *Lactobacillus*) sterk mikroaerofiel, somtijds zelfs anaeroob zijn (dat is bij vollen luchtdruk in het geheel niet kunnen groeien), doet men het beste bij luchtafsluiting te kultiveeren, zoodat de proef dan op het volgende neerkomt.

Men vulle een stopflesch geheel en al met marktmelk en plaatse die bij 30° C. Reeds na 24 uur of wat later begint eene *Lactococcus*-flora de overige mikroben te verdringen, waarbij niet zelden een zwakke gisting van *B. coli* of *B. aerogenes* vooraf is gegaan.

Nadat men één of twee keer onder overigens dezelfde omstandigheden maar in goed gekookte melk overgeënt heeft, hetgeen geschiedt door overbrenging van een spoor der in het eerste fleschje verkregen kultuur in een tweede fleschje geheel gevuld met door koken luchtvrij gemaakte melk, en zoo vervolgens, reinigt zich de laktokokkenkultuur zeer volkomen van alle vreemde mikroben en men verkrijgt een praktisch bruikbaar materiaal, dat een hoogen graad van zuiverheid vertoont. Is het zuurvormend vermogen daarvan lager dan het gewenschte, bijv. 5, terwijl men 8 à 10 c.c., normaal zuur op 100 c.c. melk verlangt, dan ligt dit aan den toevallig aanwezigen stam, en men begint òf op nieuw en volgt verder dezelfde handelwijze die beschreven is, òf men ent vooraf met een weinig goede karnemelk.

Daar karnemelk evenwel vaak laktosegist bevat, kan men, bij het gebruik daarvan aanvankelijk in de fleschjes sterke alkoholgisting verwachten. Maar deze verdwijnt spoedig bij het overenten in melk, die door koken zuurstofvrij is gemaakt.

Heeft men langs dezen weg, dus bij luchtafsluiting, de kultuur

[1]) Onmogelijk is het niet, dat er „peptonen" bestaan, die met glukose of laktose als koolstofbron nog beter voor de voeding der melkzuurfermenten geschikt zijn dan de melk zelve. Hoe uiterst verschillend peptonen van ongelijken oorsprong op mikroben werken is het gemakkelijkst bij gistsoorten waar te nemen, die zich in het algemeen veel beter met „planten peptonen" laten voeden dan met „dierlijke peptonen". Door de invoering van het woord „bios" ter aanduiding van die stikstofverbindingen, die het beste voor de gistvoeding geschikt zijn, heeft men getracht het pepton-raadsel te omschrijven. Het verband tusschen de peptonen en de melkzuurfermenten is nog nauwer dan dat tusschen deze lichamen en de verschillende gistsoorten, maar daarop kan ik h. t. p. niet verder ingaan.

langdurig voortgezet, dan krijgt men een vrij constant zuurgehalte bij iedere nieuwe overenting, dat intusschen niet hooger wordt dan 10 à 12 c.c. normaal per 100 c.c. melk. Op wei-ager of wei-gelatine platen aan de lucht is de groei van de onder deze omstandigheden verkregen laktokokken verschillend, somtijds ontstaan namelijk zeer vele aerobe koloniën, die de zelfde verzuring geven als de kulturen in de fleschjes, en in andere gevallen ziet men volstrekt niets opkomen.

De eerste groep stemt overeen met de gewone vormen, die men in den handel aantreft en die bestemd zijn voor de roomzuring. Het handelsmateriaal bestaat meestal uit een kultuur dezer mikroben gedroogd op melksuiker of op zetmeel. Bovendien vindt men in den handel aerobe reinkulturen in melk of in wei, welke in flesschen verkocht worden.

De tweede groep, dat is de aan de lucht niet groeiende kulturen zijn voor de roomzuring nog beter bruikbaar dan de aeroob groeiende stammen, omdat juist de anaerobe vormen van *Lactococcus* meer neiging tot de afscheiding van het in boter gewenschte aroma vertoonen dan de meer aerofielen. [1])

Zoowel om de laatste reden als om de groote zuiverheid der kulturen volgens deze „fleschjesmethode" verkregen, bestaat er aanleiding om daaraan in het praktische zuivelbedrijf de voorkeur te geven boven de zoogenaamde reinkulturen van den handel, die voor het meerendeel volstrekt niet zuiver zijn, maar meestal behalve laktokokken ook een groot aantal bederfkiemen van de melk bevatten. Op grond van veelvuldige onderzoekingen kan ik derhalve belanghebbenden aanraden de hier beschreven methode in hun bedrijf in te voeren. Het beste zou het zijn indien deze kulturen in de zuivelfabrieken zelve gemaakt werden, maar ook diegenen, die reinkulturen verkoopen, zullen door het volgen van het hier gegeven voorschrift een beter produkt voortbrengen dan langs den gebruikelijken weg van de selektie van aerobe koloniën. Bovendien is deze handelwijze eenvoudiger en meer wetenschappelijk.

Naar mijn meening bestaat er geen voldoende reden om de aerobe en de anaerobe vormen van *Lactococcus*, die langs de genoemde wegen verkregen kunnen worden, tot afzonderlijke soorten te brengen. Het zijn slechts varianten van een en dezelfde soort, wier zuurstofbehoefte verschillend is, hetgeen o.a. voortvloeit uit het feit, dat een en dezelfde stam in den loop van den tijd belangrijke verschillen vertoont, juist ten aanzien der genoemde betrekking, en bovendien bij ver-

[1]) In den laatsten tijd trof ik dergelijke anaerobe melkzuurbacteriën ook in handelspreparaten aan.

schillende isoleeringen alle overgangen tusschen de meer of minder aerobe stammen kunnen verkregen worden.

Ten slotte zij er nog op gewezen, dat men door de „fleschjesmethode" bij lage temperatuur te volgen, in zeldzame gevallen, in plaats van een kultuur van een echte *Lactococcus* een *Lactobacillus* verkrijgt, die overigens ook door koloniën-selektie uit kaas kan verkregen worden. Daarbij heb ik echter niets van het aangename aroma der anaerobe laktokokken opgemerkt, zoodat ik deze bacillen voor de roomzuring niet aanbeveel.

5. *Elektieve kultuur van de melkzuurbacillen.*

Plaatst men door *Lactococcus lactis* spontaan verzuurde melk, of, beter nog karnemelk, bij luchtafsluiting in een thermostaat van c.a. 40 C., dan stijgt na eenige dagen het oorspronkelijk zuurgehalte dat 8 à 12 c.c. bedroeg, in de meeste gevallen tot omstreeks 18 à 20 c.c. per 100 c.c. melk. Voor de proef gebruikt men het beste een stopflesch van 250 à 300 c.c. inhoud, die geheel met de melk gevuld en gesloten wordt. Neemt men voor de eerste proef een kleinere hoeveelheid dan de genoemde, dan wordt het resultaat onzeker, hetzij door den dan storend werkenden invloed van de lucht, of door de zeldzaamheid der bij het proces betrokken bacteriën.

De eerste verandering, die men in de zure melk daarbij waarneemt is een matig sterke alcoholgisting door de bijna nooit ontbrekende laktosegist, en tegelijk een volledige afscheiding van de caseine, die door het koolzuur naar de oppervlakte der vloeistof gevoerd wordt.

Mikroskopisch bevindt men, dat de aanvankelijk aanwezige laktokokken door meer verlengde, aan de uiteinden afgeknotte en tot snoeren vereenigde vormen vervangen worden, waarbij de zuurtiter aanvankelijk belangrijk verminderen kan bijv. in 12 uur van 8 c.c. tot 6 c.c. kan dalen, welke vermindering aan de laktosegist moet toegeschreven worden, waarvoor het vrije melkzuur als koolstofvoedsel kan dienen. Door overenting bij luchtafsluiting wordt de laktosegist, evenals bij de elektieve kultuur der laktokokken, spoedig door de dan sterkere melkzuurfermenten verdrongen.

Echte laktobacillen verschijnen meestal eerst na 2 of 3 dagen en dan stijgt, parallel met hun vermeerdering de zuurtiter snel tot 20 ja zelfs tot 25 c.c. normaal per 100 c.c. melk. Op dezen graad van verzuring gekomen wordt gewoonlijk geen verdere vermeerdering waargenomen, zelfs niet na verscheidene dagen, en in die gevallen waar dit wel geschiedt, moet aan aëratie gedacht worden, waardoor de groei van azijnbacteriën en azijnzuurvorming uit den alkohol mogelijk zijn geworden.

Het in reinkultuur brengen der laktobacillen is somtijds gemakkelijk, in andere gevallen, wanneer men met meer anaerobe stammen te maken heeft, moeilijker, steeds is het echter bezwaarlijk met deze reinkulturen belangrijke verzuring in melk te verkrijgen, en men slaagt daarin nog het beste (maar ook dan niet altijd) door de laktobacillen tegelijk met een laktokok uit te zaaien, die dan voor de eerste verzuring tot 5 à 8 c.c. dienst doet. Is dit zuurgehalte eenmaal bereikt, en tevens de zuurstofspanning voldoende verminderd, dat in een gesloten fleschje eveneens door de werking der laktokokken geschiedt, dan kunnen de laktobacillen zich ontwikken en verdere verzuring veroorzaken.

Reeds uit de opmerking, dat men bij de beschreven proefneming meer of minder volkomen anaerobe laktobacillen verkrijgt, volgt dat daarbij meerdere varieteiten kunnen verwacht worden. Bij voortgezet onderzoek blijkt, dat deze varieteitsverschillen zich ook over andere kenmerken kunnen uitstrekken en zoo groot kunnen worden, zoowel uit physiologisch als morphologisch oogpunt, dat het opstellen van soorten noodig schijnt.

Vooral de afmetingen der staven, het meer of minder vertakt zijn der koloniën op agarplaten, de slijmvorming, het al of niet ontstaan van koolzuur als gistingsgas naast het melkzuur, en de werking op verschillende suikersoorten, geven daartoe aanleiding. Hoe meer men zich evenwel in deze verschillen verdiept, des te moeilijker blijkt het te worden zoodanige beschrijvingen op te stellen als noodig zijn om andere onderzoekers een duidelijk beeld van het gevondene te geven [1]), zóó groot toch wordt het getal der vormen die in de natuur, of beter wellicht, in de kultuur blijken voor te komen en zóó gering worden de verschillen, waardoor die vormen zich van elkander onderscheiden, indien men niet alleen de uitersten der reeksen in aanmerking neemt.

Doet men dit laatste dan komt men er toe twee groepen van vormen te onderscheiden, die ik bij een vroegere gelegenheid *Lactobacillus caucasicus* en *L. longus* heb genoemd [2]). Zonder aan deze indeeling bijzondere waarde te hechten wensch ik mij toch daaraan ook thans te houden, omdat ik meen, dat de feiten welke ik te vermelden heb daardoor tamelijk goed omvat worden.

De longusgroep is gekenmerkt door het niet aantasten van maltose

[1]) Hiervan kan men zich nader overtuigen door het lezen van het onderzoek van W. Henneberg, Zur Kenntniss der Milchsäurebakterien. Sonderabdruck aus Zeitschrift für Spiritusindustrie. No. 22—31, 1903. Parey, Berlin.

[2]) Sur les ferments lactiques de l'industrie. Archives Néerlandaises. Sér. 2, T. 6, pag. 212, 1901.

en wel van melksuiker, zoodat daardoor in moutextrakt geen of slechts zeer weinig zuur wordt gevormd. In melk brengen de vormen dezer groep, indien zij gekweekt worden nadat een voorafgaande kultuur van *Lactococcus* daarin 5 à 8 c.c. melkzuur per 100 c.c. melk heeft voortgebracht, nog eens die zelfde hoeveelheid zuur voort, zoodat men dan 10 à 16 c.c. titreeren kan ; dit laatste cijfer is echter uitzondering. Meestal wordt er geen koolzuurontwikkeling waargenomen, maar somtijds is dit wel het geval, er kan zelfs zooveel ontstaan, dat men een melkdrank verkrijgt, die als champagne mousseert.

Door een reeks van overgangen zijn de longusvormen verkregen bij 40° C., verbonden met laktobacillen, welke bij lagere temperatuur hun optimale levensvoorwaarden vinden, maar die in melk zeldzamer zijn.

De caucasicus-groep omvat die laktobacillen, welke in staat zijn zelfstandig in melk tot een zeer hooge zuurvorming aanleiding te geven. Bij 37° à 40° C. kan men bijv. na drie dagen 20 à 23 c.c. normaalzuur per 100 c.c. melk titreeren. Is dat gehalte bereikt dan staat verdere zuurvorming stil. Ook in dit geval bestaat er een parallelvorm, die behalve veel melkzuur ook koolzuur ontwikkelt. Welk bijprodukt zich dan, naast het koolzuur uit het lactosemolekuul vormt, is nog niet vastgesteld. Door G. Bertrand is bewezen, dat deze fermenten barnsteenzuur kunnen voortbrengen. Het meest bekend zijn zij geworden door hun voorkomen in kefyr, waarover ik reeds vroeger geschreven heb [1]). Ik ben echter later tot de slotsom gekomen [2]) dat hun verspreiding volstrekt niet tot de kefyr alleen bepaald is, maar dat zij ook in ons klimaat somtijds in karnemelk, in kaas en zelfs in gewone bakkersgist kunnen voorkomen.

6. *Yoghurt en maya.*

Het gebruik van verzuurde melkpreparaten als drank of spijs is in zoovele landen in het Oosten inheemsch en dateert uit een zoo hooge oudheid, dat er geen twijfel kan zijn aangaande de gunstige hygiënische werking daarvan, en het ontstaan van verschillende maatschappijen, die nieuwe preparaten op dat gebied trachten te verspreiden, schijnt te bewijzen dat de aandacht ook van het Westersche publiek daarop begint te vallen.

Zoowel in de bereidingen van de Oostersche volken als in die van de industrie worden steeds melkzuurfermenten van het geslacht *Lactobacillus* meestal ook *Lactococcus* aangetroffen. Deze melkzuurfermenten alleen bepalen den aard van de „leben raïb" van Egypte[3])

[1]) Sur le Kefyr. Archives Néerlandaises. T. 23, pag. 428, 1891.

[2]) Ferments lactiques de l'industrie l. c.

[3]) Annales de l'Institut Pasteur. T. 16. pag. 65, 1902.

van de „yoghurt" van Bulgarije[1]) en waarschijnlijk eveneens dien van de „prostokwacha" en de „vérauetz" van Rusland, waarvan METCHNIKOFF spreekt. In de „kefyr" van den Caucasus de „koumys" van Midden-Azië,[2]) en de „mazun" van Armenië, [3]) komt bovendien lactose gist voor, die daarin echter onder zekere omstandigheden kan ontbreken, zonder dat het eigenlijke karakter dezer dranken dan verloren gaat. Alle andere mikroben, welke in de literatuur genoemd worden als voorkomende in de genoemde dranken of hun fermenten, zooals *Oidium*, *Mucor*, andere schimmelsoorten, torula, roode gist, azijnbacteriën, boterzuurferment, proteolytische bacteriën, zijn slechts aanwezig bij gebrekkige bereiding, zoodat men zeggen kan,dat in alle onderzochte gevallen een zuivere melkzuurgisting hoofdzaak blijkt te zijn en somtijds ook alkoholgisting verlangd of geduld wordt[4]).

In de industrieele praeparaten, waarbij van yoghurt wordt uitgegaan, worden dan ook alleen melkzuurfermenten aangekweekt. Ik heb mij met het onderzoek van een daarvan beziggehouden dat onder den naam „maya" [5]) of bulgaarsch melkferment verkocht wordt en waarop mijn aandacht was gevestigd door Doktor DE LINT, te Scheveningen.

Dit interessante „ferment" bestaat uit een geelachtig, sterk zuur reageerend poeder, dat volgens chemisch, mikroskopisch en bacteriologisch onderzoek uit caseine, melkzuur, vet en melkzuurbacteriën is samengesteld; het is blijkbaar niets anders dan bij lage temperatuur, wellicht in het vacuum, ingedampte yoghurt. Wat betreft het laatste preparaat zelve, de bereiding daarvan door middel van het ferment wordt als volgt voorgeschreven, en slaagt volgens mijn ondervinding goed.

[1]) MASSOL et GRIGOROFF, Revue médicale de la Suisse romande 1905 pag. 716. BERTRAND et WEISWEILLER, Action du ferment Bulgare sur le lait. Ann. de l'Institut Pasteur, T. 20, pg. 977, 1906.

[2]) Voor Kefyr en Koumys zie WEIGMANN in LAFAR Technische Mykologie. Bd.2. p. 128. 1905.

[3]) Centrallblatt für Bacteriologie, 2te Abt. Bd. 15, pg. 577, 1906.

[4]) De studie der literatuur voert den oningewijde tot een geheel ander resultaat, doordat vele der mikrobiologische beschrijvingen dezer produkten zijn opgesteld door beginnenden, die niet voldoende bekend waren met de eigenschappen der melkzuurfermenten en aan allerlei verontreinigingen overdreven beteekenis hebben toegekend.

[5]) Op het fleschje staat Maya bulgare, Société de la maya bulgare, GARNIER & Co., Paris, 16 Rue Popincourt. De Société de Pury, Montreux, brengt een overeenkomstig ferment in den handel onder den naam „maya bacilline" en de Société HENNEBERG, Génève, een vloeibaar preparaat als „lacticose". Bovendien zijn in Parijs verkrijgbaar: Lactobacilline de METCHNIKOFF in „Le Ferment", Fournisseur de l'Assistance publique, 77 Rue Denfert-Rochereau (de preparaten dezer firma maken een zeer gunstigen indruk). Het „Biolactyle de FOURNIER en de „Bouillon paralactique de TISSIER", zijn verkrijgbaar te Parijs bij verkoopers wier adres ik niet ken.

Melk wordt tot het halve volumen ingedampt, afgekoeld tot een (niet nader aangegeven) temperatuur, waarvoor ik 40° koos, omdat 45° te hoog en 37° te laag bleek te zijn, en op een volume van 250 c.c. zooveel ferment gestrooid als in een bijgevoegd lepeltje gaat. Reeds na een zestal uren begint de stremming van de melk merkbaar te worden, na 24 uren titreerde ik 12 c.c. en na 3 × 24 uren 20 à 23 c.c. normaal melkzuur per 100 c.c. van de ingedampte melk, die nu in yoghurt is veranderd.

Daar een titer van 10 c.c. overeenstemt met 0.9 % melkzuur beantwoordt de titer 20 aan iets minder dan twee percent verdwenen melksuiker. Onderstellende, dat de ingedampte melk omstreeks 9.6 % melksuiker bevat, dan volgt dat 7 % melksuiker nog onontleed is achtergebleven. Natuurlijk is de casein gestremd en het geheel is veranderd in een vaste maar zachte, sterk zoetsmakende massa.

Overigens is het indampen van de melk niet noodig, maar uit gewone melk bereid blijft de yoghurt meer vloeibaar, en omdat de zuurvorming daarin even sterk is als in ingedampt materiaal, blijft er van de oorspronkelijk aanwezige 4.8 % melksuiker omstreeks 2.5 % over zoodat de zoete smaak dan ook veel minder is.

Als men op de beschreven wijze de yoghurt bij luchttoetreding heeft gemaakt en men ent daarvan in een nieuwe hoeveelheid melk over, dan verkrijgt men aanvankelijk weder opnieuw yoghurt met het zelfde zuurgehalte als de eerste maal. Bij herhaald overenten bleek echter reeds na 3 of 4 maal, dat er dan moeilijkheden kwamen en alleen met groote hoeveelheden entmateriaal verdere verzuring was te verkrijgen. Veel beter slaagde de proef indien de yoghurt in een gesloten, geheel gevulde stopflesch gemaakt werd; het overenten kan dan langer worden voortgezet, maar ik weet niet of dit op den duur zal gaan. Blijkbaar bestaat de moeilijkheid ook hier in de juiste keus van de zuurstofspanning, waarbij de betrokken melkzuurbacteriën hun eigenschappen onveranderd behouden, welke moeilijkheid vermeerderd wordt door het aanwezig zijn van twee verschillende vormen, met ongelijke optima ten aanzien van temperatuur en zuurstofspanning.

Van deze beide vormen is de eene weder een soort van *Lactococcus* en de andere een *Lactobacillus*.

De eerste wijkt eenigszins af van de gewone *Lactococcus* doordat de leden meer gerekt zijn, dus aan korte staafjes herinneren, en verder door het bezit van een hooger optimum ten aanzien van de temperatuur, waarbij de groei het snelst is, welk optimum dichter bij 37° dan bij 30° C. blijkt te liggen. Deze vorm is derhalve in

zekeren zin een overgang tot een *Lactobacillus*. De isoleering op melkagarplaten was zeer gemakkelijk, zelfs bij 30° C.

Wat de tweede soort aangaat, de eigenlijke *Lactobacillus* van de yoghurt, deze liet zich op melkagarplaten moeilijk, op moutextractagar daarentegen gemakkelijker verkrijgen. In de literatuur is daaraan de naam gegeven van *Bacillus Massol* door Grigoroff, maar die naam komt mij onnoodig voor, omdat de kenmerken goed overeenstemmen met die van de kefyrbacillen, die overigens ook in onze omgeving, bijv. zooals vroeger reeds is opgemerkt, in gist en in karnemelk kunnen voorkomen. Uitgezaaid in melk, die eenigszins zuur is, kunnen zij daarin het hooge zuur, bovengenoemd, zonder hulp van andere bacteriën voortbrengen. Koolzuurontwikkeling heeft daarbij niet plaats en de smaak van het verkregen produkt is zeer zuiver, ofschoon zeker een begin van vetsplitsing bij zulk een hoog zuurgehalte onvermijdelijk schijnt.

Metchnikoff schrijft aan het gebruik van yoghurt een zeer gunstige werking toe door het verminderen van de verschijnselen van auto-intoxicatie uitgaande van het darmkanaal, en hij verklaart dit door aan te nemen, dat de *Lactobacillus* van de yoghurt, na de maag gepasseerd te zijn, ook in het darmkanaal werkzaam blijft en de vorming der produkten die auto-intoxicatie zouden veroorzaken, en die van andere bacteriënsoorten afkomstig zijn, tegengaat [1]). Ik betwijfel niet dat dit laatste door het melkzuur kan geschieden, maar als zeer onwaarschijnlijk beschouw ik het, dat daarvoor de aanwezigheid van de uit de yoghurt afkomstige melkzuurbacterien zelve in het darmkanaal noodzakelijk zou zijn, en wel, ten eerste, omdat daarin ook zonder het gebruik van yoghurt of andere verzuurde melkpreparaten reeds melkzuurfermenten van verschillende soorten voorkomen, en ten tweede, omdat de voorwaarden van melkzuurvorming door de aktieve melkzuurfermenten in het darmkanaal ontbreken, of ten minste zeer ongunstig moeten wezen.

Wat het eerste punt betreft kan ik op de volgende proeven wijzen.

Indien steriele melk met faeces van verschillende afkomst (mensch, rund) geïnfekteerd en behandeld wordt als vroeger is beschreven voor de elektieve kultuur van *Lactococcus*, dus bij luchtafsluiting en bij temperatuur tusschen 23° en 26° C. aan herhaald overenten wordt onderworpen, dan verkrijgt men inderdaad het genoemde mikroben

---

[1]) Quelques remarques sur le lait aigri. Rémy, Paris, 1907. Metchnikoff geeft in deze brochure wel allerlei beweringen maar geen afdoende proeven. Bovendien is zijn bacteriologische uiteenzetting op pag. 26 onduidelijk en zonderling. Ook het uitvoerige en interessante werk van Dr. A. Combe, L'autointoxication intestinale, Paris, 1907, is uit een mikrobiologisch oogpunt niet geheel overtuigend.

geslacht, waarmede juist even goede roomzuringen zijn op te wekken, als met de beste kulturen op de vroeger genoemde wijze toebereid.

Wordt verder steriele melk op overeenkomstige wijze geïnfekteerd en blootgesteld aan die levensvoorwaarden, die voor *Lactobacillus* beslissend zijn, dus bij luchtafsluiting gekultiveerd bij 40 à 45° C., dan ontwikkelt zich eerst een gisting van *coli*, en daarna of daarmede gelijktijdig meestal boterzuurferment en volstrekt geen melkzuurgisting, welke onvermijdelijk zou moeten ontstaan indien de melkzuurfermenten in eenigszins aanzienlijk getal voorhanden waren. Eerst bij overenting verkrijgt men direkt of na herhaling *Lactobacillus*, die in korten tijd een zuurtiter van 10 à 13 c.c. normaalzuur voortbrengt.

Er valt dus niet aan te twijfelen, dat in normale faeces zoowel *Lactobacillus* als *Lactococcus* reeds aanwezig zijn. Zij zijn daarin evenwel zeldzaam en behooren volstrekt niet zooals *coli* tot de eigenlijke darmflora, maar tot de accidenteele flora, die bestaat uit alles wat ingevoerd wordt en in staat is maag en darm levend te passeeren zonder zich te vermenigvuldigen. Daaraan eenigerlei werking van aanbelang toe te schrijven schijnt geheel en al uitgesloten.

Wat nu het tweede punt betreft, namelijk de vraag waarom in het darmkanaal de voorwaarden voor den groei der aktieve melkzuurfermenten ontbreken, daarop is het antwoord, dat in de contenta van dat deel van den darm, waar het voor deze beschouwing juist op aankomt, een alkalische reaktie heerscht, en de suikers die daar gevormd of gebracht worden, voorzoover niet door den darmwand geabsorbeerd, onvermijdelijk door *coli* zullen aangetast worden, die onder deze omstandigheden de sterkste is en alle concurrenten verdringt.

Waarom juist *coli* (en *aerogenes*) hier de melkzuurfermenten zoo volkomen overwinnen, moet, naar mijne meening, verklaard worden door het belangrijke, in de literatuur niet voldoende overwogen feit, dat de eerstgenoemde soorten zeer goed van pepton alleen kunnen leven en zich ten koste daarvan vermeerderen, terwijl de aktieve melkzuurfermenten dit vermogen volkomen missen en behalve pepton een koolhydraat voor hun voeding vereischen.

Bedenkt men daarbij dat *coli* bij aanwezigheid van een koolhydraat zich ook met andere stikstofbronnen voeden kan dan pepton, bijv. met aminen en ammoniakzouten, terwijl de aktieve melkzuurfermenten dit niet kunnen en bepaaldelijk peptonen voor stikstofvoeding vereischen, dan is het duidelijk, dat voor de verschillende vormen van *coli* praktisch overal in de darmcontenta geschikt voedsel aanwezig is, en dit op de weinige plaatsen waar het ook voldoende voor de melk-

zuurfermenten zou zijn, onvermijdelijk door *coli* in beslag zal worden genomen. Waar peptonen alleen voorkomen zal *coli* er nog bovendien toe bijdragen om de reeds alkalische reaktie der contenta te verhoogen, en ook daardoor, niet voor zich zelve maar wel voor de melkzuurfermenten de levensvoorwaarden ongunstiger doen worden.

Het is dus duidelijk, dat in het darmkanaal wel een coliflora maar geen melkzuurflora bestaanbaar is.

De dojerkleurige faeces van kinderen tijdens de laktatieperiode kunnen tot staving van de hier gegeven opvatting aangevoerd worden. Zij bestaan mikroskopisch bijna alleen uit bacteriën, verreweg voor het meerendeel gewone colibacteriën [1]), waartusschen ook echte melkzuurfermenten voorkomen, maar, evenals boven, in zeer ondergeschikt aantal. Een bijzondere beteekenis verkrijgt dit feit, wanneer men bedenkt, dat door Escherich, den ontdekker der colibacillen, is bewezen dat die toestand reeds onmiddellijk achter de maag van den zuigeling bestaat, waar *coli* en *aerogenes* overheerschend zijn, hetgeen, in verband met het voorafgaande, de gevolgtrekking noodzakelijk maakt, dat zelfs op die plaatsen van den darm, waar een melkzuurflora het eerst gezocht zou worden, deze zich blijkbaar niet handhaven kan.

Ongetwijfeld speelt ook de sterk desinfekteerende werking van het maagzoutzuur hierbij een rol, daar dit zuur reeds bij een veel lageren zuurtiter de ontwikkeling der melkzuurfermenten tegengaat dan het melkzuur, maar dan ook door veel minder alkali zal kunnen geneutraliseerd worden, wat voor *coli*, die alkali kan voortbrengen, niet onverschillig is.

Voor zoover de theorie van Metchnikoff en Combe juist is, volgens welke de yoghurt, of andere zure melkpraeparaten, de autointoxicatie van uit het darmkanaal tegengaan, schijnt het derhalve vast te staan, dat hierbij veeleer aan den invloed van het melkdieet en het met de melk opgenomen vrije zuur moet gedacht worden dan aan een specifieke bacteriënflora van het darmkanaal. Maar in hoever de naar het schijnt bewezen vermindering van indol en phenol, wier hoeveelheid als maat voor de autointoxicatie beschouwd wordt, bij voeding met zure melkpraeparaten in plaats van vleesch, afwijkt van die bij het gebruik van niet gezuurde melk, — naar mijne meening het eigenlijke hier in aanmerking komende vraagstuk, — is door de genoemde schrijvers niet overwogen.

Aannemende dat de gezuurde praeparaten werkelijk de voorkeur verdienen, dan geloof ik, dat men, vooral in Nederland, in staat moet

[1]) Bij verschillende kinderen niet altijd de zelfde varieteiten, somtijds bijv. niet gistende en schijnbaar op *Lactobacillus* gelijkende vormen, waarvoor ik zulke bacteriën vroeger ook werkelijk heb gehouden.

zijn met goede karnemelk op even eenvoudige wijze het doel te bereiken als met de verschillende exotische fermenten, waarvan de beschrijving den indruk maakt, dat de bereiders met de algemeene verschijnselen van de melkzuurgisting in melk onvolledig bekend zijn.

Ofschoon ik dus geen principieel verschil zie tusschen het gebruik van karnemelk en yoghurt, staat het vast, dat het laatste praeparaat zich op uiterst eenvoudige wijze onder medische controle laat bereiden, waarom het, naar mijne meening, ongetwijfeld aanbeveling verdient.

Het voorafgaande samenvattend kom ik tot het volgende besluit.

In melk zijn drie door de temperatuur bepaalde hoofdvormen van melkzuurgisting te onderscheiden, namelijk: bij zeer lage temperatuur, de slijmige melkzuurgisting; bij middelbare temperatuur, de gewone melkzuurgisting veroorzaakt door *Lactococcus*; en, bij hoogere temperatuur, de melkzuurgisting door *Lactobacillus*.

De elektieve kultuur der mikroben van de slijmige melkzuurgisting gelukt door bakkersgist bij luchtafsluiting tusschen 15° en 18° C. te kultiveeren in moutextrakt en over te enten in gekookte melk of wei bij 25° à 30° C.

De met deze gisting bereikte zuurtiter blijft laag en bedraagt 3 à 5 c.c. normaalzuur per 100 c.c. melk.

De elektieve kultuur van *Lactococcus lactis* geschiedt door melk in een gesloten fleschje bij 20° a 25° C. te laten verzuren en bij herhaling in gekookte melk bij die temperatuur over te enten. De daarbij verkregen stammen van *Lactococcus lactis* zijn meestal anaeroob maar specifiek niet te onderscheiden van de meer aerobe vormen, die bij de zelfde proef kunnen verkregen worden. De zuurtiter blijft meestal op omstreeks 8 c.c. normaal zuur per 100 c.c. melk, maar kan 10 à 12 c.c. worden.

De elektieve kultuur van *Lactobacillus* slaagt het beste door karnemelk bij luchtafsluiting op 37° à 40° te kultiveeren en over te enten in gekookte melk bij 30° C. en hooger. De zuurtiter kan 18 à 23 c.c. normaal zuur per 100 c.c. melk worden.

De aktieve melkzuurfermenten zijn zeer variabel; als faktoren van erfelijk standvastige variatie werden erkend: het kultiveeren bij te hoogen of te lagen zuurstofdruk, en het kultiveeren bij een temperatuur boven het groeioptimum.

In de darmflora ontbreken de melkzuurfermenten niet, maar spelen daarin een ondergeschikte rol.

Een belangrijk verschil tusschen Oostersche en Westersche melkzuurfermenten bestaat niet.

Yoghurt en andere daarmede vergelijkbare zure melkpreparaten verdienen de aandacht der hygiënisten.

Anatomie. — De Heer J. W. van Wijhe doet eene mededeeling: *„Over het voorkomen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den schedel der vogels"*.

Het is een bekend feit, dat zich de *chorda dorsalis* in zeker ontwikkelingsstadium bij alle gewervelde dieren naar voren uitstrekt tot bij de *hypophysis cerebri* en naar achteren tot in de punt van den staart.

Langs de geheele lengte van den romp en ook in de occipitaalstreek van het hoofd valt het dorsale deel van het mesoderm uiteen in segmenten of somieten.

Bij lagere gewervelde dieren: Selachiers en Petromyzonten, zijn de somieten niet tot de occipitaalstreek beperkt, maar reiken zij naar voren tot bij de *hypophysis* d. i. even ver als de chorda dorsalis.

Het grootste gedeelte van het willekeurig spierstelsel ontstaat uit de somieten en bij Amphioxus is de segmentatie van dit spierstelsel permanent en duidelijk van het vooreinde tot aan het achtereinde van het lichaam.

De oorspronkelijke functie van de somietenspieren der *Chordaten* bestond naar mijne meening [1]) in het heen en weer bewegen der *chorda dorsalis* en daarmede van het geheele lichaam bij de zwembeweging.

Bij de Cranioten is dit spierstelsel afgebroken in de streek van het gehoororgaan en naar mij voorkomt is de aanwezigheid der gehoorkapsel hiervan de oorzaak. Deze kapsel, die ook het evenwichtsorgaan omsluit, behoefde eene stevigere bevestiging dan door middel van bindweefsel kon geschieden en vond deze in het parachordale kraakbeen door welks stijfheid de spiervezels in deze streek niet meer konden fungeeren en dus te gronde gingen, ten deele zelfs niet meer werden aangelegd.

De uitwerking hiervan moest zich ook doen gevoelen in de streek vóór het gehoororgaan, maar hier bleef een deel der somietenspieren bestaan ten gevolge van verandering van functie. Zij kregen namelijk bevestiging aan den zich hier ontwikkelenden oogappel en dienden nu om dezen en niet meer om het geheele lichaam te bewegen. Dit ging gepaard met ingrijpende verschuivingen, die men in de individueele ontwikkeling nog kan vervolgen.

Het kraakbeenskelet vormt een systeem dat eerst laat in de ontwikkeling der werveldieren en lang na het verschijnen van het spier-

---

[1]) Vgl. van Wijhe „Ueber die Homologisirung des Mundes und die primitive Leibesgliederung der Wirbelthiere". Petrus Camper, deel IV, 1906.

stelsel optreedt. Zoodra men het eerste kraakbeen kan waarnemen, heeft de aanleg van het spierstelsel in het hoofd de zoo even aangegeven veranderingen ondergaan. In de gehoorstreek zijn de somietenspieren gedegenereerd, ten deele waren zij zelfs niet meer aangelegd; in de streek vóór het gehoororgaan zijn zij geheel van vorm en plaats veranderd en in dienst getreden van den oogappel. Enkel in de streek achter het gehoororgaan — de occipitaalstreek — staan de myotomen, die zich uit de somieten gevormd hebben — gewoonlijk ten getale van drie — nog in het oorspronkelijk gelid, evenals de rompmyotomen.

Kop en romp zijn in de ontogenie reeds gescheiden — al wordt de grens later ook wat caudaalwaarts verschoven — vóór de kraakbeenige wervelkolom optreedt en ik zie geen reden om aan te nemen, dat deze scheiding ook niet reeds in de phylogenie vóór het optreden der wervelkolom zoude hebben plaats gevonden.

De segmentatie der wervelkolom is afhankelijk van die van het spierstelsel. Het lichaam van een wervel ontstaat niet tegenover het midden van een myotoom, maar tegenover de grens van twee op elkaar volgende myotomen. Balfour heeft de verklaring gegeven van dit op het eerste gezicht vreemde verschijnsel: De eerste spiervezels nemen de geheele lengte van een myotoom in en liggen ter zijde van het weefsel, dat de chorda omgeeft. Het is nu niet meer dan natuurlijk, dat de vaste aangrijpingspunten die zich in dit weefsel voor de spiervezels vormen, n.l. de aanleg der wervellichamen, ontstaan tegenover de grenzen van twee op elkaar volgende myotomen.

Vraagt men nu, waar men het optreden van wervellichamen in het hoofd kan verwachten, dan kan dit niet het geval zijn in de gehoorstreek, want hier zijn de myotomen verdwenen ten tijde van het optreden van het kraakbeen. Evenmin kan dit het geval zijn in de streek vóór het gehoororgaan, want hier zijn de myotomen geheel van plaats veranderd en in dienst getreden van den oogappel.

Alleen in de occipitaalstreek zoude men het optreden van twee of drie wervels kunnen verwachten. Toch heeft tot voor korten tijd niemand hen hier waargenomen, hoewel deze streek niet alleen onderzocht is volgens de gewone methode der serieën doorsneden maar ook volgens de methyleenblauwmethode, waarmede het onderzoek zooveel gemakkelijker is. Met deze methode heeft Dr. Noordenbos hen niet gevonden in den schedel van zoogdieren en ik zelf evenmin in den schedel van Selachiers.

In plaats van wervels vonden wij het welbekende parachordale kraakbeen, dat de chorda in de achterhoofds- en gehoorstreek begeleidt.

Weliswaar hebben sommige schrijvers gesproken van den aanleg

van wervels in het achterhoofd, maar de door hen waargenomen deelen waren niet kraakbeenig, het waren slecht begrensde celhoopen, die den naam van wervels niet verdienen.

Ik was derhalve zeer verrast, toen mijn toenmalige assistent, de Heer F. Sonies, met de methyleenblauwmethode twee kraakbeenige wervellichamen ontdekte in het achterhoofd van kippenembryo's van den zesden broeddag en van eendenembryo's in een overeenkomstig stadium.

Men zal vragen hoe het mogelijk is, dat deze wervels niet reeds lang bekend zijn, daar toch kippenembryo's het klassieke onderzoekingsmateriaal vormen in alle laboratoria voor embryologie. Het antwoord hierop is dat zij niet ontdekt werden, omdat het stadium waarin zij voorkomen zoo bizonder kort van duur is. Men moet het oogenblik treffen waarop het kraakbeen in de twee eerste halswervels optreedt. Voordat het kraakbeen in de overige wervels verschijnt, zijn de twee occipitaalwervels reeds met het parachordale kraakbeen versmolten.

Men kan het uur van den broeddag niet aangeven, daar de ontwikkeling der verschillende eieren te veel uiteenloopt. Door eene groote hoeveelheid materiaal kan men zich echter altijd het gewenschte stadium verschaffen. Het zoude eene ontzaglijke hoeveelheid tijd kosten dit materiaal te bewerken volgens de methode der serieën doorsneden. Met de methyleenblauwmethode is men echter in weinige dagen gereed.

Het parachordale kraakbeen der vogels vormt derhalve oorspronkelijk geen morphologische eenheid. Men kan er met Sonies twee gedeelten aan onderscheiden: een voorste *praevertebraal* gedeelte, gelegen in eene streek waar de myotomen gedegenereerd of geaborteerd zijn en een achterste of *vertebraal* gedeelte, dat in den vorm van twee wervellichamen optreedt, die weldra met het voorste gedeelte vergroeien.

In overeenstemming met deze twee wervellichamen treden later ook aan elken kant twee wervelbogen op, die weldra met elkaar versmelten, maar hunne plaats blijft dan nog aangeduid door twee openingen voor de beide wortels van den nervus hypoglossus.

Voor verdere bijzonderheden en verscheiden nieuwe vondsten omtrent de ontwikkeling van den kraakbeenigen schedel en de wervelkolom der vogels verwijs ik naar de dissertatie van den Heer Sonies, die in druk gereed is en binnenkort — ook in „Petrus Camper" — zal verschijnen. Ik wil alleen nog vermelden, dat het door Noordenbos bij zoogdieren ontdekte poolkraakbeentje, dat ook bij Selachiers voorkomt, door Sonies eveneens bij vogels gevonden werd.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. L. J. J. MUSKENS: „*Bijdrage tot de kennis van zenuwinvloed op de hartswerking.* 1ste Mededeeling. *Genese van den pulsus alternans.*"

(Mede aangeboden door den Heer T. PLACE).

Terwijl reeds in 1897 [1]) door schrijver aan de hand van experimenteele gegevens er op gewezen was, dat wij in den door hem genoemden „pulsus regulariter intermittens" niets anders hebben te zien dan een effect van verlangzaamde geleiding tusschen voorkamer en kamer, of ook tusschen sinus en voorkamer [2]), hetgeen naderhand door WENCKEBACH [3]) en eerst onlangs door MACKENZIE [4]) ook voor den mensch bevestigd werd, heeft de kennis omtrent het mechanisme van den pulsus alternans, sedert met het toepassen der nieuwere hartsphysiologie op het zieke hart aangevangen werd, weinig vorderingen gemaakt. De oorzaak daarvan is volgens schr.'s meening daarin gelegen, dat weliswaar reeds vroegere klinische onderzoekers (TRAUBE) de aandacht hebben gevestigd ook op vormen van p. a. waarbij de periode tusschen den zwakken hartslag en den volgenden krachtigen kleiner is dan tusschen den grooten en den kleinen, waarbij dus de groote contractie te vroeg komt; dat echter nog te weinig (slechts door OEHRWALL [5]), W. STRAUB [6]) en TRENDELENBURG [7])) de weg, die voor den intermitteerenden pols tot het doel gevoerd had, was ingeslagen geworden, nl. het analyseeren van overeenkomstige hartcurven, van den kikvorsch, een dier, waarvan de hartswerking voornamelijk, dank zij ENGELMANN, voldoende doorvorscht kan geacht worden, om dieper gaande curven-analyse vruchtdragend te maken.

Dat men zich daarbij niet moet scharen bij de onderzoekers, die van meening zijn, dat het verklaren van den p. a. uit inotropen invloed iets meer is dan een bloote omschrijving van het feit, ligt voor de hand, want genoemde misvatting brengt nog het additioneele nadeel met zich, dat zij voor alle verdere analyse den pas afsnijdt. In de alterneerende kamercontractie toch hebben wij te doen, niet

---

[1]) Geneesk. Bladen. 1897. 4e Reeks. Bo. 4. Blz. 77.
[2]) American Journal of Physiology. Vol. I. 1898 Blz. 509.
[3]) WENCKEBACH. Nederl. Tijdschr. v. Geneesk. 1899. I. Blz. 666.
[4]) MACKENZIE. Britisch. Medical Journal. 24 October 1906.
[5]) OEHRWALL. Skandinavisches Arch. f. Physiologie. Bd. 8. 1898.
[6]) STRAUB. Arch. f. experimentelle Pathologie u. Pharmakologie. B. 45.
[7]) TRENDELENBURG. Arch. f. Physiologie. (Anat. u. Physiol.) 1903. Blz. 284.

met een eenvoudig pathologisch, doch eerder met een, bij tal van omstandigheden optredend physiologisch verschijnsel, niet met een enkelvoudige afwijking van doorzichtige genese, doch eerder met eene universeele in alle gewervelde dieren (volgens in het physiologisch laboratorium te Utrecht onlangs opgedane ervaringen ook in weekdieren) onder ongewone verhoudingen optredende abnorme functie van de hartspier, welke het wellicht *mogelijk* maakt, dat, niettegenstaande die verhoudingen, toch nog een rhythmisch contraheeren van de ventrikelspier *mogelijk* blijft. Dat deze functie zeer in het bijzonder, ja, misschien uitsluitend, in den voor de circulatie zoo onvergelijkelijk meer beteekenenden ventrikel tot ontwikkeling kwam, treedt van dit gezichtspunt uit in een ander licht.

In den loop van een onderzoek naar den invloed van verschillende chemica ten aanzien van de zenuwwerking op den hartslag, bleek het, dat er een digitalis-preparaat bestaat (digitalis dyalisata), dat — in afwijking van andere — in de bloedbaan gebracht, de eigenschap bezit, binnen korten tijd sterke en blijvende veranderingen te brengen in het normale beloop van de peristaltische contractie-golf. In zulk een vergiftigingsproef kan men 2 tijdperken onderscheiden, nl. 1o. het tijdperk van normale hartswerking, welke zich nog voortzet geruimen tijd (10—15 minuten) na de injectie (— tenzij toevallig de injectie intra-veneus geschiedde —), 2o. een, bij sterke intoxicatie slechts kortdurend, tijdperk van verlangzaamden hartslag, welke vrij spoedig, na steeds grooter wordende onderbrekingen tot blijvenden stilstand van het bloeddoorstroomde hart in diastole voert.

Gedurende het overgangsstadium tusschen de 2 zooeven genoemde tijdperken worden vrij regelmatig hartcurven gevonden (vooral, gelijk is gebleken, indien op gezette tijden directe vagusprikkeling wordt aangewend [1]), welke licht kunnen werpen, te zamen en in verband met vergelijkbare curven van het, tengevolge van bloedverlies, afstervend hart, op de wijze van ontstaan van ééne der minstens vier varianten van pulsus alternans, welke naar mijne meening, althans in de physio-pathologie van het kikkerhart, moeten worden onderscheiden.[2]) Wat de andere 3 vormen van p.a. betreft, zoo meen ik,

---

[1]) Vergel. Böhm. Pflüger's Arch. 1872; Mackenzie. British medical Journal 1905. Blz. 703 en Rihl. Pflücher's Arch. Bd. 114. 1906. Blz. 545.

[2]) Wat betreft de vergelijkbaarheid van door anderen beschreven curven met de hier afgedrukte, zoo wil ik erop drukken, dat — volgens de in de hartphysiologie gevolgde gewoonte — de periodenduur gemeten wordt door den afstand te bepalen tusschen de voetpunten der opgaande curven-lijnen, nimmer tusschen de toppen der verheffingen.

dat ook tot de verklaring dezer afwijkingen de weg gebaand is, zoodra voor de te geven verklaring voldoende curvenmateriaal ter argumenteering is aangevoerd.

Eerste vorm van p.a. met gelijke intervallen.

Vooreerst onderscheiden wij bij Rana dien vorm van pulsus alternans, waarbij de ventrikel in gelijkmatigen rhythmus, dan krachtiger, dan zwakker klopt, terwijl daarbij het begin van de zwakke contractie even ver van het begin der voorafgaande en volgende contractie is verwijderd (fig. 1). Bij de genese van deze varieteit, welke in de experimenten van ENGELMANN[1]) bespreking vond en door dezen onderzoeker op momentaan verminderd geleidingsvermogen werd teruggebracht, zullen wij voor het oogenblik niet langer stilstaan. Zoowel door ENGELMANN als door F. B. HOFMANN[2]) werd er op gewezen, dat het voorbijgaand of blijvend bestaan van dezen vorm van p.a. vaak gebonden is aan geringe wijzigingen in de frequentie van den hartslag. STRAUB bewees, dat deze p. a. onder invloed van geringe dosis antiarine geleidelijk kan overgaan in polshalveering (loc. cit. blz. 354), gelijk ik dit vaak waarnam onder invloed van digitalis dyalisata.

Tweede vorm van p. a. met vervroegde groote contractie.

Vervolgens is door mij in een vroegere publicatie [3]) een voorbeeld van p.a. afkomstig van het afstervende kikvorsch-hart beschreven, waarbij het interval tusschen de groote en de kleine V_a grooter was dan dat tusschen de kleine en de groote, m.a.w., waarbij de groote contractie vervroegd is. Daarbij bleek, dat de voorkamer in volkomen regelmatigen rhythmus blijft kloppen, onafhankelijk van de kamercontracties. Uit de vergelijking van den verschillenden duur van het interval A—V vóór de groote en vóór de kleine contractie meenden wij destijds te mogen concludeeren, dat om den anderen hartslag de contractiegolf in de A—V bundel, alsook in den ventrikel zelve, ongemeen verlangzaamd was, hetgeen zich dan telkens in de te laat verschijnende kamercontractie door het gering blijven der hefhoogte in de curve verried.

Het vermoeden, dat deze p.a. gevolg van geleidingsstoornissen binnen den ventrikel zou zijn, scheen dus voldoende recht van bestaan te hebben, al kon destijds het strikte bewijs daarvan niet geleverd worden, gelijk door WENCKEBACH is opgemerkt geworden.

[1]) ENGELMANN, Arch. f. d. ges. Physiologie. Bd. 62. 1896. Blz. 556 en vlgd.

[2]) HOFMANN. Arch. f. d. ges. Physiologie. Bd. 84. 1900. Blz. 165.

[3]) L. J. J. MUSKENS. Nederl. Tijdschr. v. Geneeskunde. 1902. No. II. Blz. 591. In curve 7 en 9 zijn de stemvorktrillingen onjuist weergegeven, waardoor herpublicatie dezer curven noodzakelijk is.

Immers, nooit is men gerechtigd met zekerheid te besluiten tot veranderde geleiding binnen een hartafdeeling (b.v. binnen V), wanneer het interval tusschen de contractie van 2 hartafdeelingen (b.v. A—V) gelijk is gebleven. [1]) Doch even stellig dwaalt deze verdienstelijke hartonderzoeker, als hij uit de weinige, door hem aan ENGELMANN ontleende, *curven* (10*a* en 10*b*) [2]) tot het tegendeel generaliseert, d.i. tot het uitsluiten van zulk een verband in andere gevallen; curven, nog wel, die reeds daarom geen aanspraak kunnen maken op bewijskracht in dezen, omdat dààr niet, als in mijne gevallen, de voorkamer regelmatig klopt, en dus nog geheel andere factoren aanwezig moeten zijn, die door den schrijver zijn over het hoofd gezien. Hij verliest hier toch uit het oog, dat aan verschillende lagere diervormen door schrijver het bewijs geleverd werd, dat door vagusinvloed tegelijkertijd de geleiding in de ééne hartafdeeling versneld, in de andere verlangzaamd kan zijn [3]) hetgeen naderhand door niemand minder dan door ENGELMANN is bevestigd geworden, waar hij erop wijst [4]), hoe op de drie overgangen venen-sinus, sinus-atrium, atrium-ventrikel, onafhankelijk van elkaar, de geleidingssnelheid kan gewijzigd worden. Genoeg om te doen zien, dat alleen zeer rechtstreeksche feitelijke gegevens ons zouden kunnen dwingen, aan te nemen, dat onder pathologische omstandigheden deze onafhankelijkheid van den toestand van het geleidingsvermogen in verschillende deelen zou verloren gaan. Zoowel in dit opzicht alsook daar, waar W. het vervroegd komen van de kleine verheffing door het sneller verloop in het vaatstelsel van den zwakken polsgolf wil verklaren, schijnt schrijver WENCKEBACH's bewijsvoering in hooge mate voor kritiek toegankelijk, terwijl zijne conclusie, dat er geen principieel verschil zoude bestaan, tusschen p.a. met vervroegde en verlate kleine polsgolf, door niets, zeker niet door W.'s bijgebrachte feiten, is gewaarborgd. Voldoende gronden kunnen thans worden bijgebracht, die erop wijzen, dat hier langs verschillende wegen hetzelfde resultaat bereikt kan worden.

Hoe op de bovengenoemde wijze, dus vermoedelijk door nog verdere bemoeilijking van de geleiding in het prikkelgeleidingssysteem (Tawara) en in de ventrikelspier zelve, in korten tijd na een stadium van pulsus alternans, halveering der ventrikelfrequentie kan worden teweeggebracht, daarvoor kunnen mijne curven 8, 2 en 10 (Nederl. Tijdschr. v. Geneesk. loc. cit) als bewijs dienen.

Aan deze curven, door het uitgeputte hart opgeschreven, ben ik

[1]) Vergelijk ook MACKENSIE, British medical Journal, 1905. III. Fig. 12.
[2]) K. F. WENCKEBACH. Herzarythmie. Leipzig 1903.
[3]) American Journal of Physiol, loc. cit.
[4]) Arch. f. Anat. u. Physiol. Abth. 1900. Blz. 326.

evenwel thans in staat, een geheel vergelijkbare curve toe te voegen van het bloed-doorstroomde hart, nu echter onder invloed van digitalis dyalisatum. Het is thans het interval $Si_s — V$, dat zich nauwkeurig laat bepalen. Het bedraagt 20.6; 22.3; 20.9, enz. Wij kunnen dus hier vaststellen, dat telkens dit interval, dat voorafgaat aan een zwakke V_s, verlengd is; d. i. de contractie-golf, die eindigde in een zwakke kamercontractie, had regelmatig meer weerstand ontmoet op haren weg van den sinus naar den ventrikel, en er was duidelijke verlangzaming. Er is hier echter nog een belangrijk detail vast te stellen, d. i. dat de sinus niet in regelmatige perioden samentrekt, doch alterneerend vroeger en later, bijv. 22.3—24.6—23. enz. Het is telkens de vervroegde Si_s, die tot de zwakke kamer-contractie voert, en wel na een verlengd interval $Si_s — V_s$ (zie curve 20.6; 22.3; 20.9, enz.). Bovendien draagt deze curve er toe bij, de overtuiging te versterken, dat inderdaad de contractiegolf in den hartwortel de sterkste verlangzaming ondervindt, omdat telkens de aan de zwakke V_s voorafgaande sinuscontractie een gerekte afgeplatte contractie-curve vertoont. De aan de groote V_s voorafgaande Si_s vertoont een ander karakter; daarbij schijnt reeds dadelijk de hoofdmassa der sinusvezelen tegelijk samen te trekken en ontstaat in deze Si_s curve feitelijk een dubbel getopte figuur. Het schijnt, dat ook de telkens aan de zwakke V_s voorafgaande voorkamercontractie iets verzwakt is.

3*e Vorm van p. a., eveneens met vervroegde contractie,*

Ten derde onderscheiden wij den p. a., waarbij eveneens de groote contractie spoediger dan verwacht werd op de kleine volgt, en waarvan fig. 3 een kortdurend geval, met terugkeer van normalen rhythmus, weergeeft. Terwijl men reeds bij het beschouwen van het pulseerende hart den indruk krijgt, dat de contractie-golf van de voorkamer, de kamer bereikende, van deze laatste weer onmiddellijk terugloopt naar de voorkamer, zoo levert ons het nauwkeurig uitmeten van verschillende dergelijke alterneerende polsen argumenten, die er voor pleiten, dat men inderdaad hier met een anti-peristaltische contractiegolf te doen heeft. Dat trouwens vergiften uit de digitalisgroep het optreden van antiperistalsis begunstigen, werd onlangs door K. Brandenburg [1]) bewezen. Wat de rol der antiperistaltische bewegingen in het normale en zieke hart betreft, zoo mag erop worden gewezen, dat reeds voor geruimen tijd door schrijver, wanneer onder overigens gewone omstandigheden het geleidingsvermogen belangrijk is verminderd, anti-peristaltische samentrekkingen

[1]) K. Brandenburg. Arch. f. Anat. u. Physiol. Abt. 1904. Supp. Rlz. 216.

binnen het sinus-gebied van het schildpadhart werden waargenomen. [1]) Onder invloed van afkoeling van den sinus zag TRENDELENBURG [2]) antiperistalsis, terwijl O. PAN [3]) er op wees, dat een extra prikkel, aangewend op de voorkamer, niet slechts een extra-contractie van V doch ook een antiperistaltische beweging der contractiegolf naar den sinus veroorzaakt. Ook HERING [4]) zag antiperistaltische bewegingen in het venengebied bij warmbloeders, onder invloed van injectie van magnesium-sulphaat bij het konijn, terwijl T. VOLHARD [5]) als een geval van doorloopende bigeminie beschreef eenen lijder, bij wien, naar het schijnt, de contractiegolf van de zeer frequente extra of liever spontane contracties van den ventrikel uitging. Volhard, evenals in den allerlaatsten tijd SCHMOLL [6]) sluit zich aan bij de m. i. onjuist te achten veronderstelling van WENCKEBACH, dat het te laat komen van de kleine contractie toe te schrijven zou zijn aan extra-verlating van de kleine polsgolf. Nu in deze verhandeling het bestaan van 2 vormen van zulk eene p. a., een werkelijk te laat zijn van de zwakkere ventrikelcontractie, langs physiologischen weg, bewezen is, behoeft dit vermoeden wel geen verdere weerlegging. Bij de curven van SCHMOLL valt nog op te merken, dat enkele zijner curven zeer waarschijnlijk op anti-peristaltische contractie-golven berusten, eene mogelijkheid, welke naar het schijnt, door den schrijver is over het hoofd gezien (vergel. curve 13).

Het komt mij dan voor, dat, wil men de wijze van ontstaan van de zéér zwakke V_s interpreteeren, hier twee verklaringen mogelijk zijn. Of wel hebben wij hier te doen met een echte extrasystole van voorkamer en kamer, welke, wegens het invallen gedurende het begin der diastole, en den ventrikel nog gedeeltelijk in de refractaire phase bereikende, na een nagenoeg normale A_s slechts een zeer zwakke V_s-contractie kan uitlokken; òf wel hebben wij te doen met een antiperistaltische contractiegolf, welke wegens het onvolkomen hersteld zijn van de geleiding in den overgangsbundel en de kamer-muskulatuur alleen tot een zwakke kamercontractie het aanzijn kan geven.

Terwijl de eerste onderstelling inderdaad niet terzijde zou kunnen worden geschoven, indien men kon aannemen, dat plotseling, zonder duidelijke reden, zulk een extra A_s, gevolgd door een uiterst zwakke

[1]) Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1898. Deel II. Blz. 568 en Americ. Jnl. of Physiology; Vol. I. 1898. Blz. 504.

[2]) W. TRENDELENBURG. Arch. f. Physiol. 1903. Blz. 284 en vlgd.

[3]) O. PAN. Deutsche Zeitschr. f. klin. Medizin. Bd. 78. 1903. Blz. 128.

[4]) HERING. PFLÜGER's Arch. Bd. 82. Blz. 1.

[5]) VOLHARD. Zeitschr. f. klin. Medizin. 1904. Bd. 53. Blz. 574.

[6]) SCHMOLL. Arch. f. klin. Medizin. 1907. S. 507.

V_s zou optreden, welke gevolgd werd door een niet geheel compensatorische pauze, zoo wordt deze opvatting nauwelijks aanneembaar, indien wij letten op de stelselmatige wijze, waarop deze p. a. als het ware wordt voorbereid door de 2 abnormale, aan de zeer zwakke A_s voorafgaande kamercontracties. Daar nu dit veranderd zijn der 2 voorafgaande contracties geregeld plaats grijpt, althans voor zoover in mijn curvenmateriaal dergelijke gevallen zijn aan te treffen, meen ik, dat de andere interpretatie buitengemeen aan waarschijnlijkheid wint. Deze opvatting is derhalve de volgende; onder invloed van het digitalis-preparaat is het geleidingsvermogen binnen den ventrikel niet onbelangrijk gereduceerd. In de eerste, slechts weinig verzwakte, V_s kon tengevolge dezer geleidingsstoornis slechts een deel van de kamermuskulatuur tot samentrekken komen. In de daaropvolgende kamercontractie echter verbreidt de contractie-golf zich ook, zij het ook langzamer dan normaliter (vandaar de gerekte vorm) over de geheele kamer-muskulatuur. Daar echter de geleiding door de hartspier naar alle zijden, volgens de moderne, door GASKELL en ENGELMANN uitvoerig toegelichte leer, kan plaats grijpen, vindt de contractiegolf gedurende deze gerekte V_s gelegenheid langs een te voren uitgesloten deel der kamer de voorkamer antiperistaltisch wederom te bereiken. Daarna is een gedeelte der kamermusculatuur voldoende geleidbaar geworden en kan zich een zwakke V_s aan de antiperistaltische voorkamer contractie aansluiten.

Het is duidelijk, dat bij het terugkeeren van de contractiegolf, van A naar V, weer naar A; van A terug naar een ander beperkt deel van V; dan weer A, enz., een in dit geval voorbijgaande, pulsus alternans ontstaat, waarbij de afstand tusschen begin der groote contractie en dat der kleine grooter is dan tusschen het begin der kleine en dat der groote contractie. Men kan onder de dialysata-experimenten deze gevallen daaruit herkennen, dat na een maximale, toxische dosis eerst de frequentie buitengemeen verlangzaamd werd, doch ten slotte weer een snellere frequentie optrad. Terwijl de vooraf regelmatig pulseerende sinus goed in de vena cava-curve te zien was, pleegt deze, nadat de premortale polsversnelling heeft ingezet, niet meer duidelijk merkbaar te zijn.

Wij treffen derhalve hier een vorm van hartswerking, die ten opzichte van het tijdsverloop dezelfde eigenaardigheid vertoont als de p. a., die reeds vroeger door schr. aan het slecht gevoede kikvorschhart werd beschreven (loc. cit. 1902), doch waarvan de wijze van ontstaan zeker een andere is.

Het eenige bezwaar, dat tegen deze interpretatie kan worden in het veld gevoerd, is van theoretischen aard.

Het gold namelijk tot nu toe als vaststaande, dat de ongerepte ventrikelmusculatuur onder geene omstandigheden het verschijnsel vertoonde van dissociatie, tusschen de verschillende hartafdeelingen en in ieder afzonderlijk, dat door schr. in verschillende verhandelingen[1]), voornamelijk wat betreft den sinus, uitvoerig werd beschreven en waarvan de beteekenis voor onze kennis der zenuwwerking op het hart met nadruk werd toegelicht. Hoewel uit de genoemde experimenten en die van ENGELMANN het voorkomen van dergelijke dissociaties ook aan den ongerepten ventrikel als een mogelijkheid moest worden erkend, het directe bewijs daarvan is, zoover ondergeteekende bekend werd, nooit geleverd. Daar, waar onder dyalisaat-invloed de neiging van de hartspier tot dissociatie, gelijk wij boven zagen, op den voorgrond komt, daar liet zich verwachten, dat — indien deze invloed gecombineerd werd met den eveneens dissocieerenden vagusinvloed — het bewijs niet zoude uitblijven. Inderdaad werd door mij op het einde der vaguswerking op een met dialysaat vergiftigd hart eene desbetreffende curve gevonden. Het betreft hier juist den overgang van een alterneerenden pols in den normalen (fig. 4) na een directe vagusprikkeling en kort na het opdruppelen van physiologische zoutsolutie (in de ventrikelcurve waarneembaar).

Het lijdt mijns inziens geen twijfel, dat het interpreteeren der 2e verheffing van de ventrikelcontractie noch als voorkamer-contractie (want nergens in deze of andere curven kwam een voorkamercontractie van deze belangrijke hefhoogte tot stand), noch als een gewone extra systole van den ventrikel kan worden toegelaten (immers in het laatste geval zoude onverklaard blijven, zoowel waarom hier een extra systole optrad, als waarom de op normalen tijd intredende kamer-contractie zoo buitengewoon zwak was). Wij hebben hier mijns inziens ongetwijfeld te doen met eene dissociatie in tijd van twee afdeelingen van de ventrikelspier (eventueel ook van het prikkelgeleidings-systeem) en eerst wanneer, nà den pulsus alternans, eenmaal een niet geheel synchrone contractie dier deelen heeft plaats gehad en dan de geheele spier wederom tegelijk in de refractaire phase komt, kunnen normale contracties volgen. Ingevolge deze interpretatie is het verschil tusschen de groote en de kleine contractie van den voorafgaanden p.a. daaraan toe te schrijven, dat slechts bij de groote contracties een bepaald gedeelte van de spiermassa mede door de contractiegolf bereikt wordt, dat gedurende de zwakke contracties daarvan buitengesloten blijft.

[1]) Geneesk. bladen 1897. pg. 75. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences 1898. Vol. XXXIII. No. 71. pg. 188. Americ. Jnl. of Physiol. 1898. pg. 503 en vlgd. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1898. Deel II. Blz. 572 en 1902 Deel II. Blz. 583 en vlgd.

4o. *Vorm van p.a. met verlate groote contractie.*

Noch bij den mensch, noch bij Rana, werden door mijzelf alterneerende contracties van deze variëteit van de hartekamer waargenomen. Alleen de door WENCKEBACH (loc. cit. blz. 107), gepubliceerde hartcurven, die van MACKENSIE [1]) (fig. 12, misschien ook fig. 5) alsmede die, waarvan mij door Dr. N. VAN SPANJE welwillend inzage werd gegeven, schijnen erop te wijzen, dat althans bij den mensch zulk een p,a. voorkomt. Voor verdere analyse zijn deze curven echter niet wel toegankelijk, aangezien in geen van beide gevallen tegelijkertijd de contracties der jugulaarvenen werden geregistreerd.

Alles te zamen genomen, zoo komt mij voor, dat in de gegeven curven en de analyse daarvan belangrijke argumenten gelegen zijn, die er toe kunnen leiden, dat van physiologische zijde meer dan tot nu opzettelijk onderzoek wordt ingesteld omtrent de geleiding binnen de afzonderlijke hartafdeelingen. Immers voor de eerste van de 4 beschreven vormen van p.a. wezen wij erop, dat hier van physiologische zijde de oorzaak gezocht werd in veranderd geleidingsvermogen, waardoor in de zwakke contracties de contractiegolf op een deel van V beperkt bleef; voor den tweeden vorm van p.a. meenden wij directe bewijsgronden te kunnen bijbrengen en voor den derden vorm van p.a. het waarschijnlijk maken, dat zij tot stand komen door geleiding verlangzaming tusschen sinus en kamer, resp. op het optreden van anti-peristaltische contractiegolven, en daardoor ook op afwijkingen in het geleidingsvermogen berusten. Wat betreft, hetgeen TRENDELENBURG kon vaststellen, n.l. dat bij geleidelijke overgangen veel grootere frequentie van de hartkamercontractie kan worden bereikt, vóórdat halveering van den hartslag optreedt, dan indien in korten tijd een groote frequentie bereikt wordt, is op grond van het vorenstaande aldus te interpreteeren, dat bij langzaam toenemende frequentie aan het geleidingsvermogen geen al te hooge eischen gesteld worden, dus het oogenblik uitgesteld wordt, waarop noodzakelijk alleen partieele contracties van den ventrikel kunnen optreden.

Wat betreft de pathologie, zoo schijnt mij voor den pulsus bigeminus, door WENCKEBACH [2]) gediscuteerd, het thans physiologisch vastgesteld zijn van het belang der dissociatie van den ventrikel onder bepaalde omstandigheden [3]), evenals de beteekenis der antiperistaltische

[1]) MACKENSIE, British medical Journal, 1905, III.

[2]) WENCKEBACH, Arhythmie. 1903. Rlz. 166 en vlgd.

[3]) Met de vaststelling van partieele contracties van de kamerspier, meen ik, is de noodwendigheid bewezen, deze beperking aan de wet van BOWDITCH aan te brengen, dat weliswaar iedere kamerspiervezel, die zich samentrekt, dit met maximale kracht doet; doch dat geenszins daaronder verstaan moet worden, dat noodzakelijk bij iedere verkorting van de kamerspier alle spierbundels gelijkelijk samentrekken.

contractiegolf, van groot gewicht. Met name zal men bij de interpretatie van curven als van TSCHIRJEW [1]) (aangehaald door WENCKEBACH), van O. PAN [2]), R. FINKELENBURG [3]) en van HAY and MOORE [4]) daarmede rekening moeten houden. Immers het ontbreken der compensatorische pause (WENCKEBACH) vindt in de boven gegeven interpretatie zijn volledige verklaring, terwijl tevens HERING's opvatting, als zoude alle p. bigemini op extrasystolen berusten, definitief weerlegd schijnt.

Met FUNKE [5]) ben ik ten slotte van meening, dat eene verdere discussie omtrent de vraag, of naast den pulsus alternans ook het bestaan van een pulsus bigeminus moet worden erkend, geheel overbodig is, al zoude het toch zijn nut hebben, indien de experimenteele gegevens van KNOLL en die van HERING, aan warmbloeders verkregen, omtrent hemisystolie en hartbigeminie thans wederom opgenomeu werden, ook met het oog op de nieuwere anatomische gegevens.

Ten opzichte van deze nieuwe vraagstelling zijn 3 nieuwe onderzoekingen van belang te achten. Vooreest het onderzoek van W. EINTHOVEN [6]), wiens resultaten en nauwkeurige registratie, ook van partieele contracties, voor een verdere analyse veel schijnen te beloven. Vervolgens het belangrijke onderzoek van TAWARA [7]) in ASCHHOF's laboratorium, dat ons deed zien, hoe ver de arbeidsverdeeling in den ventrikel der warm-, waarschijnlijk ook der koudbloedige dieren gegaan is. Eindelijk de onderzoekingen van MACKENZIE[8]) die het mogelijk maakte, ook bij den mensch ingelicht te worden omtrent het gedrag van de voorkamer onder pathologische omstandigheden, waardoor derhalve deze waarnemingsgroep voor verdere wetenschappelijke analyse bruikbaar wordt. Het ligt voor de hand, dat men in die richting voortgaande, zal trachten verder te gaan, teneinde ook den hartwortel van den mensch binnen het bereik van de graphische methode te brengen.

Immers WENCKEBACH[9]) heeft het vermoeden uitgesproken dat de

---

[1]) TSCHIRJEW. Archiv für Physiologie. 1877.

[2]) O. PAN. Deutsche Zeitschrift. f. klin. Medizin. Bd. 78. 1905. Blz. 128.

[3]) R. FINKELENBURG. Aangehaald door WENCKEBACH. 1905. Heft 1 en 2. Blz. 586.

[4]) HAY and MOORE. Lancet 1906. Blz. 1274.

[5]) FUNKE. Ook de eigenaardige curven, door W. STRAUB (loc. cit) verkregen aan met RINGER's vloeistof doorspoelde kikkerharten zijn wellicht tot analoge dissociaties, als hier voor curve 4 beschreven werd, terug te brengen.

[6]) EINTHOVEN. Tijdschr. v. Geneesk. II. No. 22.

[7]) TAWARA. Das Herzleitungssystem. 1906.

[8]) MACKENZIE. Britisch medical Jnl. 1902. Nov. Blz. 1411.

[9]) WENCKEBACH. Arch. f. Physiologie. 1906. Blz. 361.

contractiegolf, van groot gewicht. Met name zal men bij de interpretatie van curven als van TSCHIRJEW [1]) (aangehaald door WENCKEBACH), van O. PAN [2]), R. FINKELENBURG [3]) en van HAY and MOORE [4]) daarmede rekening moeten houden. Immers het ontbreken der compensatorische pause (WENCKEBACH) vindt in de boven gegeven interpretatie zijn volledige verklaring, terwijl tevens HERING's opvatting, als zoude alle p. bigemini op extrasystolen berusten, definitief weerlegd schijnt.

Met FUNKE [5]) ben ik ten slotte van meening, dat eene verdere discussie omtrent de vraag, of naast den pulsus alternans ook het bestaan van een pulsus bigeminus moet worden erkend, geheel overbodig is, al zoude het toch zijn nut hebben, indien de experimenteele gegevens van KNOLL en die van HERING, aan warmbloeders verkregen, omtrent hemisystolie en hartbigeminie thans wederom opgenomen werden, ook met het oog op de nieuwere anatomische gegevens.

Ten opzichte van deze nieuwe vraagstelling zijn 3 nieuwe onderzoekingen van belang te achten. Vooreest het onderzoek van W. EINTHOVEN [6]), wiens resultaten en nauwkeurige registratie, ook van partieele contracties, voor een verdere analyse veel schijnen te beloven. Vervolgens het belangrijke onderzoek van TAWARA [7]) in ASCHHOF's laboratorium, dat ons deed zien, hoe ver de arbeidsverdeeling in den ventrikel der warm-, waarschijnlijk ook der koudbloedige dieren gegaan is. Eindelijk de onderzoekingen van MACKENZIE[8]) die het mogelijk maakte, ook bij den mensch ingelicht te worden omtrent het gedrag van de voorkamer onder pathologische omstandigheden, waardoor derhalve deze waarnemingsgroep voor verdere wetenschappelijke analyse bruikbaar wordt. Het ligt voor de hand, dat men in die richting voortgaande, zal trachten verder te gaan, teneinde ook den hartwortel van den mensch binnen het bereik van de graphische methode te brengen.

Immers WENCKEBACH[9]) heeft het vermoeden uitgesproken dat de

---

[1]) TSCHIRJEW. Archiv für Physiologie. 1877.

[2]) O. PAN. Deutsche Zeitschrift. f. klin. Medizin. Bd. 78. 1905. Blz. 128.

[3]) R. FINKELENBURG. Aangehaald door WENCKEBACH. 1905. Heft 1 en 2. Blz. 586.

[4]) HAY and MOORE. Lancet 1906. Blz. 1274.

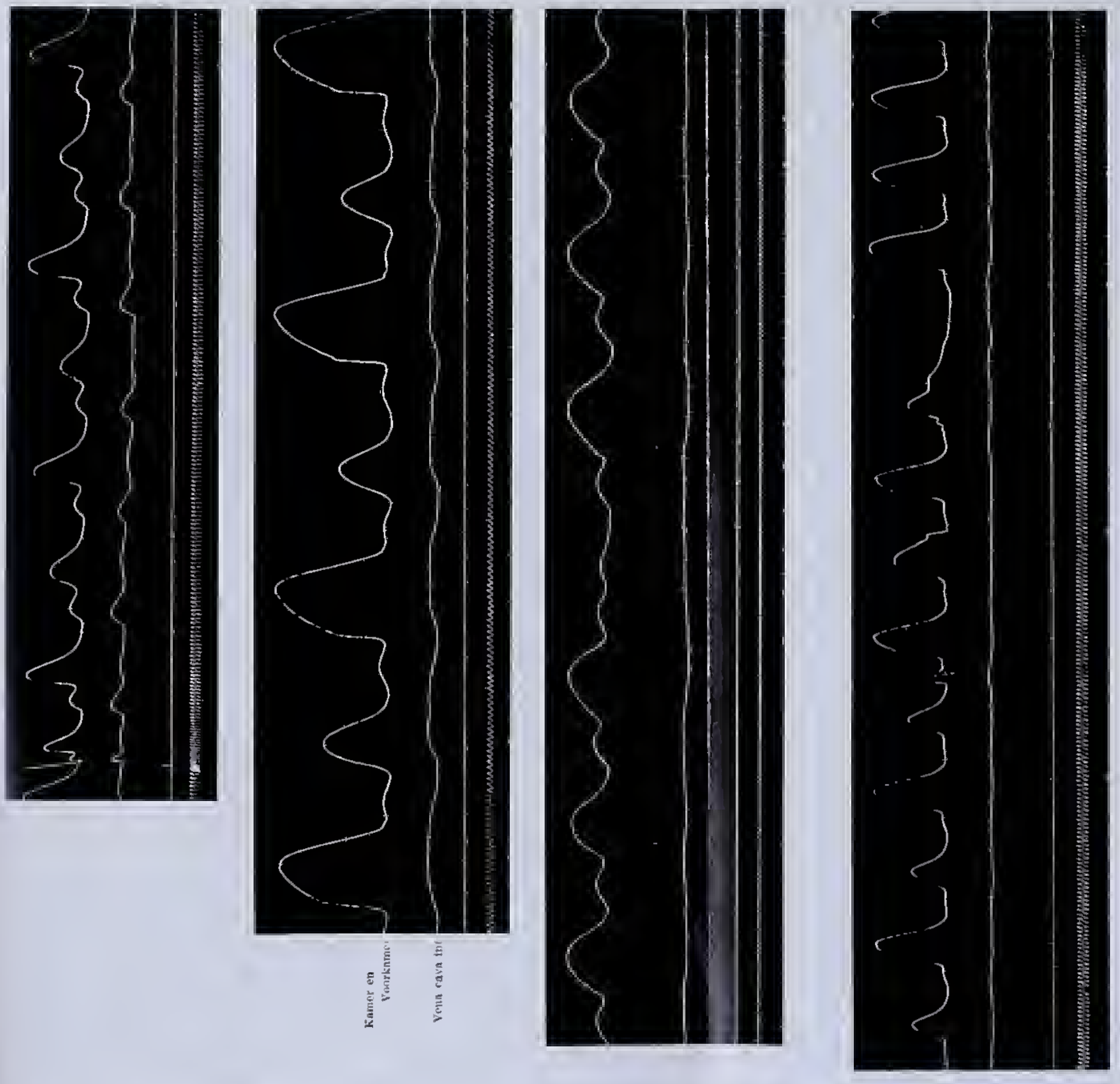
[5]) FUNKE. Ook de eigenaardige curven, door W. STRAUB (loc. cit) verkregen aan met RINGER's vloeistof doorspoelde kikkerharten zijn wellicht tot analoge dissociaties, als hier voor curve 4 beschreven werd, terug te brengen.

[6]) EINTHOVEN. Tijdschr. v. Geneesk. II. No. 22.

[7]) TAWARA. Das Herzleitungssystem. 1906.

[8]) MACKENZIE. Britisch medical Jnl. 1902. Nov. Blz. 1411.

[9]) WENCKEBACH. Arch. f. Physiologie. 1906. Blz. 361.



door mij bij lagere dieren beschreven dissociatie van den sinus [1]) ook bij den mensch ter waarneming zou komen.

Het is nu aan de physiologie vast te stellen, welke invloeden in staat zijn de 2 hoofdbundels van het prikkelgeleidingssysteem te dissocieeren en verdere bijzonderheden vast te stellen omtrent den zenuwinvloed, zoowel ten opzichte van het geleidingssysteem zelve, als op den eigenlijken spierwand van den ventrikel.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels" III.*

(Vervolg van bladzijde 847).

Wij zullen er nu toe overgaan den loop der spinodale lijn en de plaats der plooipunten te beschrijven, als wij meer rechts gelegen strooken van fig. 1 kiezen. Maar uit het voorgaande is gebleken dat wij, om te beslissen welke verschillende gevallen kunnen voorkomen, kennen moeten den stand ten opzichte van elkander van de krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, waarbij zich nu voegt de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$; dus den relatieven stand bij de verschillende temperaturen van de drie krommen, welke in de vergelijking der spinodale lijn voorkomen.

De krommen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ kunnen geacht worden voldoende bekend te zijn, en de kennis van den relatieven stand dezer twee krommen ten opzichte van elkander had reeds vroeger voldoende kunnen ophelderen de kritische verschijnselen van mengsels met minimum-kritische temperatuur — en ofschoon ten opzichte van den relatieven stand dezer lijnen nog wel enkele bijzonderheden voorkomen, welke niet uitdrukkelijk in het licht zijn gesteld, zal ik de eigenschappen dezer lijnen als bekend onderstellen. Maar de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ is minder bekend — en uit het voorgaande is gebleken dat, wil men het voorkomen van samengestelde plooien begrijpen, de relatieve stand dezer kromme ten opzichte van de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, bekend moet zijn. Ligt deze lijn geheel binnen het gebied waar $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is, dan heeft zij geen noemenswaardigen invloed op den

[10]) American Journal of Physiology. Vol. I. 1898. No. IV. Blz. 503.

loop der spinodale lijn, maar ligt zij of gedeeltelijk of geheel buiten dit gebied dan is de invloed op den loop der spinodale lijn groot, en geeft het bestaan van deze kromme rekenschap van de samengesteldheid der plooi en is zij oorzaak van de verschijnselen van niet-mengbaarheid. Ik heb het daarom wenschelijk geacht om alvorens tot de beschrijving van den loop der spinodale lijn ook in andere strooken van fig. 1 over te gaan, de eigenschappen der kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ te onderzoeken. Een volkomen exact onderzoek dezer lijn zou natuurlijk een volkomen exacte kennis van de toestandsvergelijking eischen. Maar de reeds vroeger als benaderde vergelijking dezer lijn aangenomen waarde:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = MRT \left\{ \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} \right\} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v} = 0$$

zal in staat blijken ons een inzicht te geven omtrent de verschillende mogelijke standen dezer lijn ten opzichte van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$.

De kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$.

De differentiaalvergelijking dezer kromme:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}dx + \frac{d^3\psi}{dx^2dv}dv + \frac{d^3\psi}{dx^2dT}dT = 0$$

kan geschreven worden onder de volgende vormen:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}dx + \frac{d^3\psi}{dx^2dv}dv - \frac{d^2T\eta}{dx^2{}_{vT}}\frac{dT}{T} = 0$$

of

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}dx + \frac{d^3\psi}{dx^2dv}dv - \frac{d^2(\varepsilon-\psi)}{dx^2{}_{vT}}\frac{dT}{T} = 0$$

of

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}dx + \frac{d^3\psi}{dx^2dv}dv - \frac{d^2\varepsilon}{dx^2{}_{vT}}\frac{dT}{T} = 0$$

of

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}dx + \frac{d^3\psi}{dx^2dv}dv + \frac{1}{v}\frac{d^2a}{dx^2}\frac{dT}{T} = 0.$$

De kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ kan alleen aanwezig zijn bij positieve waarde

van T als $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief is. Uit den laatsten vorm leiden wij dus af, dat $\left(\frac{dx}{dT}\right)_v$ positief is voor de punten, waarvoor $\frac{d^3\psi}{dx^3}$ negatief is, en omgekeerd.

Evenzoo dat $\left(\frac{dv}{dT}\right)_x$ positief is voor de punten waarvoor $\frac{d^3\psi}{dvdx^2}$ negatief is en omgekeerd. De overgang van de punten, waarvoor $\frac{d^3\psi}{dx^3}$ negatief of positief is, heeft plaats in de punten van de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ met maximum- of minimumvolume, of waarvoor $\frac{d^3\psi}{dx^3}=0$ is; en de overgang van de punten waarvoor $\frac{d^3\psi}{dvdx^2}=-\frac{d^2p}{dx^2{}_{v,T}}$ negatief of positief is, heeft plaats in de punten met maximum- of minimumwaarde van x. Uit dit alles volgt dat de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ zich met het stijgen van T samentrekt, en zich bij zekere waarde van $T=T_g$ tot een enkel punt heeft samengetrokken. Het is nu voor ons doel noodig de waarde van T_g te bepalen, evenzoo de waarde x_g en v_g van het punt waarin deze meetkundige plaats verdwijnt. Dit beteekent analytisch dat wij de waarden van T, x en v hebben te bepalen welke voldoen aan :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=0, \qquad \frac{d^3\psi}{dx^3}=0 \quad \text{en} \quad \frac{d^3\psi}{dvdx^2}=-\frac{d^2p}{dx^2}=0$$

of aan de vergelijkingen :

$$MRT\left\{\frac{1}{x(1-x)}+\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2}\right\}=\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{(1-2x)}{2x^2(1-x)^2}=\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^3}{(v-b)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$MRT\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^3}=\frac{1}{2}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Deelt men (1) door (3), dan verkrijgt men een betrekking tusschen x en v, welke in verband met (2) tot de kennis van x_g en v_g kan leiden.

Men verkrijgt dan :

$$\frac{(v-b)^3}{x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2} = v + b = (v-b) + 2b$$

en daar $(v-b)^3 = \left(\frac{db}{dx}\right)^3 \frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}$ vindt men :

$$\frac{b}{\frac{db}{dx}} = \frac{x(1-x)}{1-2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}\right\}^{1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en $b = b_1 + x\frac{db}{dx}$ stellende

$$\frac{b_1}{\frac{db}{dx}} = \frac{x^2}{1-2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}\right\}^{1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Daar het 1ste lid dezer laatste vergelijking de verhouding voorstelt van de molekuulgrootte van den 1sten component en het verschil der beide molekuulgrootten, ziet men dat x_g alleen van de verhouding tusschen de molekuulgrootten der beide componenten afhangt.

Nemen wij de beide uiterste gevallen 1° dat b_1 gelijk 0 zou mogen gesteld worden 2° dat b_2 gelijk b_1 is, dan vinden wij de beide uiterste waarden van x_g.

Voor $b_1 = 0$ is $\left(\frac{2x^2}{1-2x}\right)^3 = \frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}$ of $4x^4 = (1-x)^2(1-2x)^2$ of $2x^2 = (1-x)(1-2x)$ of $x = {}^1/_3$. Voor het andere uiterste geval $\frac{db}{dx} = 0$ vinden wij $x = {}^1/_2$.

Voor eenige willekeurig gekozen waarden van x_g heb ik de daarbij behoorende waarden van $\frac{b_1}{b_2-b_1}$ berekend

x_g	$\frac{b_1}{b_2-b_1}$	$\frac{v-b}{b}$	y_g (zie pag. 922)
${}^1/_3$	0	2	0,5
0,4	0,3704	1,115	0,358
0,45	1,5	0,505	0,216
0,46	2,08	0,457	0,186
0,47	3,06	0,363	0,154
0,48	5,04	0,265	0,117
0,49	10,91	0,191	0,0874
0,5	∞	0	0.

Heeft men omgekeerd met behulp der gegeven waarde van $\frac{b_1}{\frac{db}{dx}}$ de waarde van x_g berekend, dan bepaalt men v_g met behulp der vergelijking :

$$v - b = \frac{db}{dx} \sqrt[3]{\frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}}.$$

Deze vergelijking geeft ingeval $\frac{db}{dx} = 0$, waarbij $x_g = {}^1/_2$, een onbepaalde waarde voor $v - b$. Het is dus beter $v - b$ uit te drukken in een waarde waarin $\frac{db}{dx}$ niet voorkomt. Met behulp van form. (4) schrijven wij :

$$(v - b) = b \frac{\sqrt[3]{\frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}}}{\frac{x(1-x)}{1-2x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2x^2(1-x)^2}{1-2x}}}$$

of

$$\frac{v-b}{b} = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{4x(1-x)}{(1-2x)^2}} - 1}.$$

In bovenstaande tabel vinden wij de, voor willekeurig gekozen waarden van x_g berekende waarden van $\frac{v-b}{b}$. Bij waarden van x_g die zeer weinig van ${}^1/_2$ verschillen nadert de waarde van $\frac{v-b}{b}$ tot $2\sqrt[3]{(1-2x_g)^2}$.

De waarde van MRT_g kan onder den volgenden vorm gebracht worden :

$$MRT_g = \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{b} x(1-x) \frac{1 - \left[\frac{(1-2x)^2}{4x(1-x)}\right]^{\frac{1}{3}}}{\left\{1 + \left[\frac{(1-2x)^2}{4x(1-x)}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2}$$

De temperatuur waarbij de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt hangt dus af in de eerste plaats van de waarde van x waar zij verdwijnt en in de tweede plaats van de grootheid $\frac{d^2a}{dx^2}$. Daar vol-

gens form. 5 x kan liggen tusschen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$, zal de factor van $\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{b}$ kunnen afwisselen tusschen $\frac{4}{81}$ en $\frac{1}{4}$. De waarde van dien factor wordt dus alleen bepaald door de verhouding tusschen b_1 en b_2. Voor $b_1 = 0$ is de waarde $\frac{4}{81}$, voor $b_1 = b_2$ is deze waarde $\frac{1}{4}$. Hoe meer ongelijkheid er dus bestaat in de molekuulgrootte, hoe lager deze factor is, en bij hoe lager temperatuur $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ verdwenen is. En daar het bestaan van $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ in hooge mate oorzaak van de nietmengbaarheid in den vloeistoftoestand is, zullen dus even groote molekulen $\left(\frac{d^2a}{dx^2}\right.$ steeds gelijk gedacht$\left.\right)$ zich moeielijker met elkander mengen, dan zulke waarbij de grootte van de eene soort sterk de grootte van de andere soort overtreft. Een eigenschap waartoe men wel zonder berekeningen had kunnen besluiten. Maar in de tweede plaats heeft de waarde van de grootheid $\frac{d^2a}{dx^2} = 2(a_1 + a_2 - 2a_{12})$ grooten invloed op de hoogte van deze temperatuur, en wel in zoo hooge mate dat als $\frac{d^2a}{dx^2} = 0$ mocht zijn, de meetkundige plaats $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ reeds bij het absolute nulpunt verdwenen zou zijn. Wij hebben trouwens reeds van den beginne af aan kunnen opmerken, dat bij $\frac{d^2a}{dx^2}$ negatief deze meetkundige plaats nimmer zou kunnen bestaan. Alles daarentegen wat a_{12} nederdrukt doet T_g stijgen en bevordert dus niet-menging. Wij kunnen in enkele limietgevallen de waarde van T_g vergelijken met die van T_k. 1° in het geval dat wij in een stof als 2^{den} component zouden persen een gas, dat de wetten van Boyle en Gay-Lussac volkomen zou volgen. Voor een dusdanig gas zouden wij b_1 en a_1 gelijk 0 moeten stellen, en dan ook zeker wel a_{12}. De waarde van x van de formule voor T_g is dan gelijk aan $\frac{1}{3}$. Daar de a voor het mengsel dan slechts één term bevat en gelijk is aan a_2x^2, is $\frac{d^2a}{dx^2} = 2a_2$. De waarde van b_x voor het mengsel is dan gelijk aan b_2x. Men vindt in die onderstellingen $MRT_g = \frac{8}{27}\frac{a_2}{b_2}$, en dus

T_g gelijk aan de kritische temperatuur van den 2^{den} component. De waarde van T_k voor elk mengsel, als onsplitsbare stof gedacht, is dan gelijk aan $x(T_k)_2$. Bijgevolg is dan $T_g = 3(T_k)_x$. Bij een waarde van T iets beneden $(T_k)_2$ is de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ beperkt tot een zeer smalle strook aan den kant van den 2^{den} component, terwijl $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ nog aanwezig is en vergeleken kan worden met een kleine kringvormige figuur, welke tot middelpunt heeft een punt met de coördinaten $x = {}^1/_3$ en $v = b_2$. De spinodale lijn heeft dan een vergelijking, welke aldus kan geschreven worden :

$$\frac{MRT}{\left(\frac{v}{x} - b_2\right)^2} = \frac{2a_2}{\left(\frac{v}{x}\right)^3},$$

welke vergelijking aantoont, dat zij uit 2 rechte lijnen bestaat, die het punt $x = 0$ en $v = 0$ verbinden met de punten, bij welke voor den tweeden component $-\frac{dp}{dv} = 0$ is. De meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ ligt dus, bij temperaturen welke niet al te ver beneden $(T_k)_2$ liggen, geheel buiten de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, en is dan beperkt tot de linkerhelft der figuur. 2°. Als tweede limietgeval denken wij $b_1 = b_2$ maar a_1 en a_2 van elkander verschillend. Dan is $MRT_g = \frac{d^2a}{dx^2}\frac{x(1-x)}{b}$, en daar dan $x = \frac{1}{2}$ is, $MRT_g = \frac{2(a_1 + a_2 - 2a_{12})}{4b}$, terwijl MRT_k voor $x = {}^1/_2$ gelijk is aan $\frac{8}{27}\frac{a_1 + a_2 + 2a_{12}}{4b}$. Ook dan kan T_g grooter zijn dan T_k, nl. als $\frac{27}{4}(a_1 + a_2 - 2a_{12}) > (a_1 + a_2 + 2a_{12})$ of als $2a_{12} < \frac{23}{31}(a_1 + a_2)$. Maar zelfs al mocht $T_g < T_k$ zijn, dan beteekent dat nog volstrekt niet, dat de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ kort voor haar verdwijnen in het gebied ligt waarin $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is. De vroeger berekende waarden van $\frac{v-b}{b}$ toonen dat dit verdwijnen geschiedt bij een zeer klein volume, dat kleiner zijn kan, en in het

limietgeval zeker kleiner zal zijn, dan de vloeistofvolumes der kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Ter beoordeeling of het verdwijnen van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ plaats heeft in het gebied waarin $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is kan men de waarde van T_g, x_g en v_g in den vorm voor $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ substitueeren, en de voorwaarden nagaan waaronder die waarde van $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief wordt. Schrijven wij voor $\frac{(1-2x_g)^2}{4x_g(1-x_g)} = y_g{}^3$, dan is

$$MRT_g = \frac{d^2a}{dx^2}\frac{x_g(1-x_g)}{b_g}\frac{1-y_g}{(1+y_g)^2}, \quad \frac{v_g-b_g}{b_g} = \frac{2y_g}{1-y_g}, \quad \frac{v_g}{b_g} = \frac{1+y_g}{1-y_g}$$

en

$$\left(\frac{d^2\psi}{dv^2}\right)_g = \frac{MRT_g}{(v_g-b_g)^2} - \frac{2a}{v_g{}^2}$$

Het teeken van $\left(\frac{d^2\psi}{dv^2}\right)_g$ hangt dus af van $MRT_g - \frac{2a}{b_g}\frac{(v_g-b_g)^2}{v_g{}^2}\frac{b_g}{v_g}$ of van

$$\frac{d^2a}{dx^2}\frac{x_g(1-x_g)}{b_g}\frac{1-y_g}{(1+y_g)^2} - \frac{2a}{b_g}\frac{4y_g{}^2}{(1+y_g)^2}\frac{1-y_g}{1+y_g}$$

of van $l(a_1 + a_2 - 2a_{12})\, x_g\,(1 - x_g) - a\,\frac{4y_g{}^2}{1+y_g}$.

Voor de discussie dezer laatste grootheid stellen wij eerst het eerstgenoemde limietgeval, waarin a_1 en a_{12} verwaarloosd kunnen worden ten opzichte van a_2 en $a = a_2x^2$ kan gesteld worden; terwijl volgens de tabel van pag. 918 de waarde van $y_g = \frac{1}{2}$ is. Met deze waarde wordt deze grootheid

$$a_2x\left\{1 - x - \frac{2}{3}x\right\}$$

en dus positief.

Voor het andere limietgeval waarvoor $y_g = 0$ is, is zij eveneens positief. Maar voor tusschengevallen, speciaal die waarbij $a_1 + a_2 - a_{12}$ klein ten opzichte van a is, en b_1 en b_2 niet gelijk zijn, zal zij negatief zijn, en zal de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, kort voor haar verdwijnen in het gebied liggen, waarin $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is, en zal het

bestaan van deze meetkundige plaats weinig invloed hebben op den loop der spinodale lijn en dus ook geen aanleiding geven tot een samengestelde plooi, [1]) of liever tot een spinodale lijn, welke zeer ver afwijkt van de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$.

Gaan wij nu ook nog na hoe het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt, ligt ten opzichte van de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ of van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Substitueeren wij de waarde van MRT_g, x_g en v_g in de uitdrukking voor $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$. Wordt deze uitdrukking positief, dan ligt het punt buiten deze kromme, of liever bij kleiner volumes dan die van de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$, en omgekeerd. Wij vinden dan voor:

$$MRT_g \frac{\frac{db}{dx}}{(v_g - b)^2} - \frac{\frac{da}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d^2a}{dx^2}\frac{x_g(1-x_g)}{b}\frac{1-y_g}{(1+y_g)^2}\frac{db}{dx}\frac{1}{(v_g-b)^2} - \frac{\frac{da}{dx}}{v_g^2}$$

en na de substitutie van $\frac{b}{\frac{db}{dx}} = \frac{x_g(1-x_g)}{1-2x_g}(1-y_g)$ en van $\left(\frac{v_g-b}{v_g}\right)^2 = \frac{4y_g^2}{(1+y_g)^2}$, blijkt het teeken af te hangen van de uitdrukking:

$$\frac{d^2a}{dx^2}(1-2x_g) - \frac{da}{dx}4y_g^2$$

In het eerste limietgeval, waarin $\frac{d^2a}{dx^2} = 2a_2$, $\frac{da}{dx} = 2a_2x_g$, $y_g = \frac{1}{2}$ en $x_g = \frac{1}{3}$ is, is deze uitdrukking $= 0$. Evenzoo in het tweede limietgeval, waarin $x_g = \frac{1}{2}$ en $y_g = 0$ is. In de limietgevallen snijdt dus de

[1]) Ik behoef het nauwelijks nog uitdrukkelijk uit te spreken, dat ik in deze mededeeling de oorzaak van de samengesteldheid van plooien niet meer uitsluitend zoek in het abnormale gedrag van de componenten, waaraan ik vroeger, op het voetspoor van Lehfeld, ze meende te mogen toeschrijven. Aan den anderen kant zou men te ver gaan den invloed van de abnormaliteit der componenten geheel te willen ontkennen.

kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ tot op het laatste oogenblik waarin deze verdwijnt. Nog in een tusschengeval kan deze grootheid gelijk nul zijn, maar de waarde van x_g, waarbij dit geschiedt, hangt af van $\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}$ of van $\frac{(a_2-a_{12})-(a_{12}-a_1)}{(a_{12}-a_1)(1-x_g)+x_g(a_2-a_{12})}$.

Schrijven wij $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_2} = 1+\Delta$, dan wordt $\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}} = \frac{\Delta}{1-x_g+x_g(1+\Delta)}$

$= \frac{\Delta}{1+x_g\Delta}$. Men bepaalt de waarde van x_g voor dit tusschengeval dan uit de vergelijking:

$$\frac{\Delta}{1+\Delta x_g}(1-2x_g) = 4\,\frac{(1-2x_g)^{4/3}}{[4x_g(1-x_g)]^{2/3}}$$

of

$$\frac{\Delta}{1+\Delta x_g} = 4\left[\frac{1-2x_g}{16x_g^2(1-x_g)^2}\right]^{1/3}.$$

Voor waarden van x_g die weinig van $\frac{1}{2}$ verschillen vindt men approximatief:

$$\frac{1}{2} - x_g = \frac{1}{128}\left(\frac{\Delta}{1+\frac{1}{2}\Delta}\right)^3$$

Neemt men voor Δ de waarde 4, welke voor bijna evengroote molekulen groot moet geacht worden, dan zou $\frac{1}{2} - x_g = \frac{1}{54}$ zijn. Het besluit dat wij uit dit alles trekken omtrent de ligging van het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt, ten opzichte van de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$, is het volgende. In de meeste gevallen verdwijnt het punt binnen de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$, en dus in het gebied waar $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$ negatief is, maar dit kan ook aan de andere zijde van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ plaats grijpen, dus bij een volume dat kleiner is, dan dat dezer lijn.

Dat de vergelijking: $\frac{\Delta}{1+x\Delta} = 4^{1/3}\,\frac{(1-2x)^{1/3}}{x^{2/3}(1-x)^{2/3}}$ bij positieve waarde

van Δ, dus bij positieve waarde van $\frac{a_1+a_2-2a_{12}}{a_{12}-a_1}$, steeds een wortel heeft blijkt onmiddellijk als wij beide leden dezer vergelijking grafisch voorstellen. Het eerste lid n.l. stelt dan een tak van een hyperbool voor, welke bij $x=0$ een hoogte heeft gelijk aan Δ en bij $x=1$ een hoogte gelijk aan $\frac{\Delta}{1+\Delta}$, en die dus op zekere positieve, zij het dan ook afnemende, hoogte boven de x-as continue verloopt. Het tweede lid stelt een lijn voor, welke voor $x=0$ een positief oneindig hoog gelegen punt heeft, en voor $x=1$ een punt heeft oneindig ver beneden de x-as gelegen. Deze lijn gaat door het punt $x=\frac{1}{2}$, en links en rechts van dat punt zijn de ordinaten gelijk maar met omgekeerd teeken. Er zal dus zeker snijding zijn, en wel voor positieve Δ bij een waarde van $x<\frac{1}{2}$. Voor het geval dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnt bij kleiner volume dan dat der lijn $\frac{dp}{dx}=0$ moet het eerste lid grooter zijn dan het tweede. Naarmate Δ grooter is zal het snijpunt verder van $x=\frac{1}{2}$ verwijderd zijn, en is dus de reeks der waarden van x, waarvoor de voorwaarde dat het eerste lid grooter dan het tweede lid is, toegenomen. Daaruit besluiten wij dat ook voor zeer ongelijke molekuulgrootte $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnen kan in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ positief is, als Δ een aanmerkelijke grootte heeft, Maar voor volkomen ongelijke molekuulgrootte $\left(x=\frac{1}{3}\right)$ zou $\frac{\Delta}{1+\frac{\Delta}{3}}>3$ of $\frac{\Delta}{3+\Delta}>1$, wat nog zelfs bij $\Delta=\infty$ niet vervuld is.

De teekening van fig. 6, waarin de snijding van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ in beide punten links geteekend is van het punt, waarin $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$ het minimumvolume heeft, geldt voor dit laatste geval. Het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnt moet n.l. liggen op de lijn

$\frac{d^2p}{dx^2} = 0$. Deze lijn gaat, zooals reeds vroeger is opgemerkt, door het punt, waar $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ haar kleinste volume heeft, en heeft, zooals gemakkelijk te berekenen is, $\frac{dv}{dx}$ steeds positief. Krimpt nu in fig. 6 de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ samen, en moet zij verdwijnen op $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$, dan ligt het punt, waarin zij verdwijnt bij kleiner volume dan dat van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Voor het omgekeerde geval, moeten de beide snijpunten dus rechts geteekend worden van het punt met minimumvolume. Ook het tusschengeval is nu duidelijk geworden. In de teekening van fig. 5 is in dit opzicht een onnauwkeurigheid. De reeds bijna samengekrompen lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ moet daar rechts gewacht worden van het punt, waarin $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ het kleinste volume heeft. De lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ zou dus in fig. 5 haar minimumvolume meer links moeten bezitten. Trouwens met de stijging der temperatuur ondergaan al deze lijnen verplaatsingen — dit gaat echter niet zoovèr dat de relatieve stand veel verandert.

Al deze opmerkingen schijnen mij noodzakelijk toe om de volgende reden: wij zullen er n.l. spoedig toe moeten overgaan ook in meer rechts gelegen strooken der fig. 1 den relatieven stand te teekenen der krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, ten einde bij de verschillende temperaturen te kunnen besluiten tot de meer of mindere samengesteldheid der plooien. Daarbij zullen wij omtrent dien relatieven stand onderstellingen moeten maken, welke anders geheel ongerechtvaardigd zouden kunnen schijnen. Zelfs zouden er nog veel meer van dergelijke vragen gesteld en opgelost moeten zijn, alvorens alle twijfel omtrent de rechtmatigheid der onderstellingen geheel zou zijn weggenomen. En het blijft zeer de vraag of de niet volkomen kennis der toestandsvergelijking voor kleine volumes voorshands niet een beletsel is om in alle gevallen met zekerheid uit te maken of een verschijnsel van menging of niet menging ook misschien normaal of abnormaal is. Ik zal dan ook alvorens tot de toepassingen over te gaan nog slechts één punt aan nader onderzoek onderwerpen, n.l. de vraag of in het kritisch punt van een mengsel, als onsplitsbare

stof gedacht, de grootheid $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief of negatief is, dus het teeken der grootheid :

$$\frac{8}{27}\frac{a}{b}\left\{\frac{1}{x\,(1-x)}+\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{4b^2}\right\}-\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{3b}$$

of van

$$\frac{1}{x\,(1-x)}+\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{4b^2}-\frac{9}{8}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{a}$$

Daar $2a\frac{d^2a}{dx^2}=\left(\frac{da}{dx}\right)^2+4\,(a_1\,a_2-a_{12}{}^2)$ kunnen wij voor den laatsten vorm ook schrijven :

$$\frac{1}{x\,(1-x)}+\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{4b^2}-\frac{9}{16}\frac{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a^2}-\frac{9}{4}\frac{a_1\,a_2-a_{12}{}^2}{a^2}$$

Als eerste bijzonder geval denken wij een stof gemengd met een volkomen gas; dan is $b_1=0$, $a_1=0$ en $a_{12}=0$. En bijgevolg $a=a_2\,x^2$, $b=b_2\,x$. Met deze waarden wordt bovenstaande vorm :

$$\frac{1}{x\,(1-x)}-\frac{2}{x^2}=\frac{3x-2}{x^2\,(1-x)}$$

voor waarden van $x<{}^2/_3$, is dus $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ in het kritisch punt negatief; voor $x={}^2/_3$ zal de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ door het kritisch punt gaan.

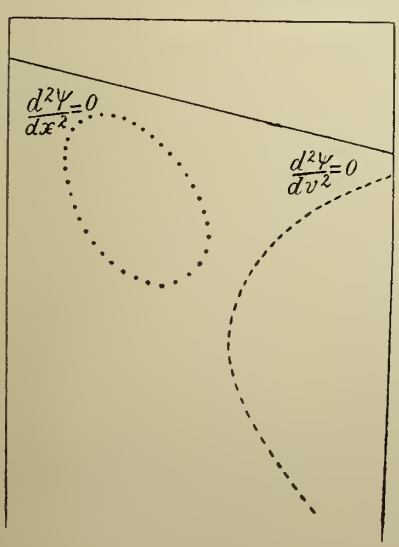


Fig. 10.

Maar voor $x>{}^2/_3$ zullen de beide krommen buiten elkander liggen, zooals in fig. 10 geteekend is, en reeds hierboven werd opgemerkt. Voor alle andere gevallen, waarin a en b niet gelijk nul kunnen zijn, zal de waarde der uitdrukking voor $x=0$ en $x=1$ positief oneindig zijn. Zoo zij negatief kan worden, zal dit dus voor twee waarden van x het geval moeten zijn. Nu kunnen tusschen $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}$ en $\frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ zeer verschillende verhoudingen bestaan. Zoo is bij de

plooipuntsomstandigheden van een mengsel, dat zich daarbij als een onsplitsbare stof gedraagt, $\frac{1}{a}\frac{da}{dx} = {}^2/_3 \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ [1]). Met deze waarden herleidt zich de vorm tot een grootheid welke zeker positief zal zijn, daar, zelfs al is $a_1 a_2 > a_{12}^2$, de waarde van $\frac{a_1 a_2 - a_{12}^2}{a^2}$ wel nimmer grooter zal kunnen zijn dan $\frac{4}{9}\frac{1}{x(1-x)}$, waarvan de minimum waarde $\frac{16}{9}$ is.

Is $\frac{1}{b}\frac{db}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx}$, dan hangt het teeken van den vorm, welke in discussie is, af van de waarde van $\frac{da}{dx}$ of $\frac{1}{b}\frac{db}{dx}$. Is $\frac{1}{b}\frac{db}{dx} > \sqrt{\frac{16}{5}\frac{1}{x(1-x)}\frac{1}{a}}$ dan is een negatieve waarde van den vorm mogelijk. Dus bij mengsels waarbij de componenten sterk in molekuulgrootte verschillen, is bij minimum T_k het geval van fig. 11 aanwezig, en zou deze minimumwaarde van T_k niet verwezenlijkt kunnen worden. Voor mengsels, waarvoor $\frac{1}{a}\frac{da}{dx} > \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ is, zal $\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2$ kunnen verwaarloosd worden tegenover $\frac{9}{4}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx}\right)^4$, wat zelfs geheel juist zou zijn in het limietgeval waarbij $b_1 = b_2$ is, en zal $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief zijn, als wij stellen:

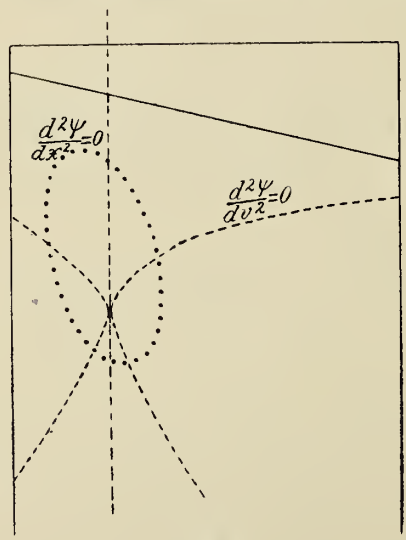


Fig. 11.

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx}\right) > \sqrt{\frac{1}{x(1-x)}}$$

Als minimumwaarde, waarvoor dit het geval is, zouden wij dan hebben

[1]) Bij al de bovenstaande berekeningen is de toestandsvergelijking toegepast, met niet von v afhangende waarde van b. Vandaar dat wij in deze vergelijking den factor ${}^2/_3$ verkrijgen, die, zooals wij reeds meermalen hebben opgemerkt, eigenlijk door $\frac{5}{6}$ moet vervangen worden.

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dx} > \frac{8}{3}$$

In al zulke gevallen, waarin de kritische omstandigheden van een mengsel, als onsplitsbare stof gedacht, vallen in het gebied waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} < 0$ is, zijn die omstandigheden niet te verwezenlijken. Ook als $\frac{d^2\psi}{dx^2} > 0$ zijn zij niet te verwezenlijken, maar dan loopt de spinodale lijn ten minste op geringen afstand om dit punt heen, en zijn de plooipuntsomstandigheden niet zeer verschillend van die, welke bij een onsplitsbare stof de kritische omstandigheden zouden zijn. Is $\frac{d^2\psi}{dx^2} < 0$ dan is er een opmerkelijk groot verschil te wachten.

DE SPINODALE LIJN EN DE PLOOIPUNTEN ALS $\frac{dT_k}{dx}$ POSITIEF IS.

Gaan wij nu weder over tot de bespreking van den loop der spinodale lijn en de plaats der plooipunten maar nu in het geval dat met toenemende waarde van b de grootheid T_k stijgt. Laat T_{k_2} veel hooger zijn dan T_{k_1} en dus $\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1}$. Nu zijn er twee gevallen mogelijk. De waarde van $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ kan in de kritische punten van elk willekeurig mengsel positief zijn of negatief. Voor $x = 0$ en in het algemeen voor zeer kleine waarde van x, waar $\frac{1}{x(1-x)}$ zeer groot is, is $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ zeker positief hoe groot ook de waarde van $\frac{d^2a}{dx^2} : a$ moge zijn; evenzoo voor waarden van x weinig verschillend van 1. Is $\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{a}$ klein, dan is $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief in de kritische punten van alle mengsels. Maar bij groote waarden van $\frac{d^2a}{dx^2} : a$, zijn er twee waarden van x, tusschen welke $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ in de kritische punten negatief is. Teekenen wij in dat geval de lijn $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, met een top, hetzij bij $x = 0$, of bij een kleine waarde van x, dan ligt de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, welke hoofd-

zakelijk beperkt is tot de linkerhelft der v,x-figuur voor een gedeelte buiten de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, en wel aan den kant der kleine volumes. Passen wij nu ook in dit geval toe de redeneeringen van blz. 834 enz., toen wij wat $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ betreft den omgekeerden stand hadden, dan besluiten wij dat de spinodale lijn, zich bij groote waarden van x niet ver verwijdert van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, maar dat zij bij die waarden van x, waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is, naar kleinere volumes teruggedrongen wordt, en bij de zeer kleine waarden van x weder dicht tot $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ nadert. De loop der q lijnen in verband met den loop der p-lijnen moet dit natuurlijk weder aanwijzen.

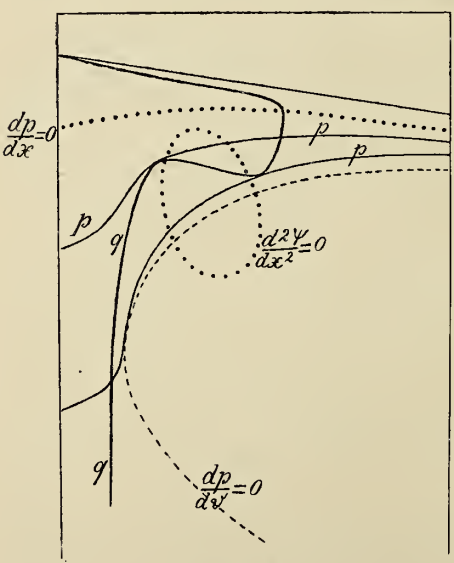


Fig. 12.

De loop der p-lijnen voor dit geval moet aan de rechter helft van fig. 1 worden ontleend, waaruit tegelijk blijkt dat de lijn $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ aanwezig is, maar bij merkbaar kleiner volumes dan die van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. En de loop der q-lijnen is dan door fig. 5 of misschien ook somtijds door fig. 6 gegeven. In fig. 12 zijn een paar p-lijnen en een q-lijn geteekend, welke deze p-lijnen aanraakt en dus punten voor de spinodale lijn leveren. Er zal hier weder een drietal plooipunten te wachten zijn, 1° een realiseerbaar plooipunt P_1 boven de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, 2° een verborgen plooipunt P_2 links van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en 3° het gewone gas-vloeistof plooipunt P_3 links van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, maar verschoven naar den kant der kleine volumes. Nu laat het zich verwachten dat de waarde van p in het eerstgenoemde plooipunt kleiner is dan in het laatstgenoemde. Immers daar T_k sterk

stijgt, neemt de druk als wij langs de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ naar rechts bewegen, sterk af — en alleen als $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ vèr boven $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ zou uitsteken zouden wij in het gebied van hooge drukkingen komen. Het verborgen plooipunt heeft natuurlijk veel minderen druk dan de beide anderen. De waarde van x voor het eerstgenoemde plooipunt is grooter dan voor het verborgen plooipunt. Het gas-vloeistof plooipunt heeft de kleinste waarde van x. Langs de spinodale lijn voortgaande hebben wij dan een gang van p zooals reeds vroeger door mij geteekend is. (Zie Verslag K. A. v. W. Maart 1905, pag. 638). Laten wij T toenemen, dan krimpt $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ in. De top beweegt naar rechts en komt dan in een stand, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ voor de kritische omstandigheden negatief is. Maar dat beteekent, dat het gas-vloeistof plooipunt en het verborgen plooipunt reeds vroeger zijn samengevallen. Bij het samenvallen is dan weder, zooals wij pag. 841 opmerkten: $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p=\left(\frac{dv}{dx}\right)_q$, $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p=\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ en $\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_p=\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_q$. Na dat samenvallen hebben wij weder een eenvoudige plooi met een enkel plooipunt. Maar het plooipunt ligt veel meer links dan het geval zou zijn, als de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ niet meer bestond, en heeft ook veel grooteren druk. Bij verder stijgen van T is niets bijzonders meer te wachten. Want noch het feit dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ geheel buiten $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ ligt, of dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnt geeft aanleiding tot nieuwe verschijnselen. Dit geschiedt toch geheel in het labiele gebied. Teekent men nu, hetzij de waarde van plooipuntstemperatuur of van plooipuntsdruk als functie van x, en beperkt men zich tot de realiseerbare grootheden, dus met uitsluiting van de verborgene, dan vervalt deze lijn in twee afzonderlijke stukken. Het rechtsgelegen stuk begint bij die waarde van x, waarbij het plooipunt P_1 een druk bezit groot genoeg om zich te vertoonen op de binodale lijn van de plooi waarvan P_3 het plooipunt is, en loopt dan tot $x=1$. Het linker stuk begint bij $x=0$ en verdwijnt vóór P_3 en P_2 samenvallen, en wel als P_3 ligt op de binodale lijn, waarvan dan P_1 het plooipunt is.

Dat, wat wij verborgen plooipunten genoemd hebben, zich nimmer kunnen vertoonen behoeft geen toelichting. Maar dat, wat wij in het

algemeen realiseerbare plooipunten hebben genoemd, zich nog niet altijd vertoonen kunnen mag wel bekend worden ondersteld uit de vroegere thermodynamische beschouwingen omtrent de eigenschappen van het ψ-vlak — maar heeft, nu wij de eigenschappen van stabiliteit en van realiseerbaarheid nagaan door den betrekkelijken stand der p- en q-lijnen te beschouwen, weder nadere toelichting noodig. Wij zullen die echter eerst dan kunnen geven, als wij door den regel te behandelen, waarop ik in het begin dezer mededeeling doelde, ook de constructie der binodale lijn hebben aangegeven.

Om de kritische verschijnselen geheel te kunnen overzien voor het geval dat voor mengsels tusschen 2 bepaalde waarden van x het kritisch punt valt in het gebied, waarin $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is, moeten wij weder twee gevallen onderscheiden nl. 1°. het geval dat reeds bij $T = T_{k_1}$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ voor een gedeelte boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ uitsteekt, in welk geval reeds bij $T = T_{k_1}$ de twee plooipunten P_1 en P_2 aanwezig zijn en 2°. het geval dat bij $T = T_{k_1}$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ geheel binnen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ besloten ligt. In fig. 13 is het tweede geval voorgesteld. Komt nu toch bij waarden van $T > T_{k_1}$ de top van $\frac{dp}{dv} = 0$ binnen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$,

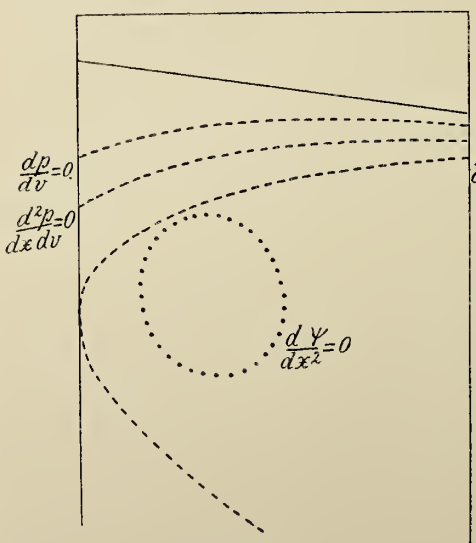


Fig. 13.

dan moet er bij een lagere T aanraking van de beide krommen geweest zijn, en bij hoogere T snijding zijn. Zoolang de krommen elkander nog niet aanraken, is de spinodale lijn niet of slechts weinig vervormd, en is er nog geen ander plooipunt te wachten dan het gewone gas-vloeistof-plooipunt, dat bij kleinere waarde van x ligt dan de top van $\frac{dp}{dv} = 0$. Zijn de beide krommen tot snijding gekomen, dan zijn de plooipunten P_1 en P_2 te voorschijn gekomen, eerst als samenvallende heterogene plooipunten, later als twee afzonderlijke. De waarde van x voor de twee samenvallende

heterogene plooipunten is natuurlijk grooter dan de waarde van x voor het plooipunt P_3. Bij verdere verhooging der temperatuur, als wanneer $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verder boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ te voorschijn komt, gaan de plooipunten P_1 en P_2 verder uiteen. P_1 beweegt zich naar grootere waarde van x, en P_2 (het verborgen plooipunt) naar kleinere waarde van x. En daar bij nog hoogere waarde van T het paar heterogene plooipunten P_3 en P_2 samenvallen, is er een continue reeks van waarden van x, van af $x = 0$ tot $x = 1$ toe, waarvoor plooipunten aanwezig zijn. Voor elke waarde van x slechts één enkel. Ik heb, Verslag K. A. v. W. Maart 1905 pag. 628, de transformatie van wat ik daar een hoofdplooi en een zijplooi noemde geteekend. Maar deze transformatie betreft eigenlijk meer de binodale lijn van zulk een samengestelde plooi dan wel de spinodale lijn. Teekent men dan T_{pl} als functie van x, dan heeft zulk een lijn een maximum- en een minimumwaarde, beide echter liggende boven T_{k_1}. De minimumwaarde bij het ontstaan van het dubbelplooipunt P_1 en P_2 en de maximumwaarde bij het verdwijnen van P_2 en P_3 doordat deze samenvallen. Ook als men P_{pl} als functie van x teekent, verkrijgt men een dergelijke kromme. Daar in het algemeen $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx_T} + \left(\frac{dp}{dT}\right)_x \frac{dT}{dx}$ zal als $\frac{dT_{pl}}{dx} = 0$ ook $\frac{dP_{pl}}{dx} = 0$ zijn, omdat in een plooipunt $\left(\frac{dp}{dx}\right)_T$ gelijk 0 is. Maar de waarde van P_{pl} als functie van T_{pl} vertoont een ingewikkelder vorm.

Daar $T\frac{dP_{pl}}{dT} = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_{v,x} + \frac{(-)}{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{pT}}$, is $\frac{dP_{pl}}{dT}$ bepaald door de eigenschappen der stof in het plooipunt, bijv. door $\frac{d^2v}{dx^2}_{pT}$. Deze grootheid is voor samenvallende plooipunten gelijk, en $\frac{dP_{pl}}{dT}$ heeft dus in zulk een samenvallend plooipunt twee gelijke waarden. De plooipuntslijn in het behandelde geval heeft dus twee keerpunten. De linkertak strekt zich uit van T_{k_1} tot de temperatuur waarbij P_3 en P_2 samenvallen. De rechtertak begint bij T_{k_2}, loopt dan terug tot de temperatuur waarbij het dubbelplooipunt P_1 en P_2 ontstond. De tusschentak geeft de verborgen plooipunten. Maar ook hier moet weder opgemerkt worden dat niet de geheele buitentakken inderdaad verwezenlijkt kunnen worden, doordat de splitsing in 3 phasen, als wij de keerpunten naderen, een grootere stabiliteit heeft dan de homogene

plooipuntsphase. Dit zijn de verschijnselen door KUENEN waargenomen bij de mengsels van ethaan en alcoholen met grootere waarde van b dan die van ethaan. Misschien kunnen wij reeds alleen door de verandering van $\left(\frac{db}{dx}\right)$ er rekenschap van geven dat het eigenaardige van dit verschijnsel steeds meer en meer verdwijnt, als wij, ethaan behoudende, een alcohol kiezen met grootere waarde van b; zoodat de verschijnselen er op wijzen, dat, als wij in de reeks der alcoholen voortgaan een normale plooipuntslijn te wachten zou zijn. Als voorwaarde, dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is in de kritische omstandigheden, hadden wij:

$$\frac{1}{x(1-x)} + \frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{4b^2} - \frac{9}{8}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{a} < 0 \quad \text{(zie bladz. 927)}$$

In het algemeen is het immers te wachten dat deze voorwaarde bij groote waarde van $\frac{db}{dx}$ minder licht zal kunnen verwezenlijkt worden, dan bijv. bij bijna gelijke waarde van b_1 en b_2. Dat het mengsel van ethaan met methylalcohol geheel andere verschijnselen vertoonde was reeds daarom te wachten, omdat wij dan een geval hebben waarbij met toenemende waarde van b de waarde van T_k afneemt. Het is n.l. bijna zeker dat b voor methylalcohol kleiner is dan voor ethaan.

Mocht by $T = T_{k_1}$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ reeds gedeeltelijk boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ uitsteken, dan zal dit in het verschijnsel slechts weinig verandering brengen. Alleen zal dan in de (T_{pl}, x)-figuur de minimumwaarde van T_{pl} beneden T_{k_1} dalen. Evenzoo zal in de plooipuntslijn het links geplaatste keerpunt bij lager waarde van T dan T_{k_1} geteekend moeten worden.

Voor dezen gang der plooipuntsverschijnselen is dus noodig, dat $T_g > T_{k_1}$ is, en dus volgens de waarde van T_g (blz, 5)

$$\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{b}\, x(1-x)\frac{(1-y_g)}{(1+y_g)^2} > \frac{8}{27}\frac{a_1}{b_1}.$$

In deze ongelijkheid ligt x, afhankelijk van de waarde van $\frac{1}{b_2 - b_1}$, tusschen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$, en y_g tusschen $\frac{1}{2}$ en 0. Schrijven wij:

$$\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{a_1} x(1-x)\frac{(1-y_g)}{(1+y_g)^2} > \frac{4}{27}\left\{1 + \frac{x}{\frac{b_1}{b_2-b_1}}\right\}.$$

Wij kunnen nu, door achtereenvolgens x te laten toenemen van $\frac{1}{3}$ tot $\frac{1}{2}$, en uit de tabel van bladz. 922, de daarbij behoorende waarden y_g en $\frac{b_1}{b_2-b_1}$ te ontleenen, berekenen de waarde, welke $\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{a_1}$ minstens moet hebben om aan deze ongelijkheid te voldoen. Stellen wij $x = \frac{1}{3}$, waarbij $\frac{b_1}{b_2-b_1} = 0$ behoort, dan ziet men dat alleen $a_1 = 0$ zou mogen gesteld worden. Laat men x toenemen, wat beteekent dat de verhouding der grootte der molekulen tot 1 nadert, dan daalt de waarde van $\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{a_1}$ noodig om aan de ongelijkheid te voldoen. Voor het limietgeval $x = \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2$ en $y_g = 0$, moet $\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{a_1} > \frac{16}{27}$ zijn om $T_g > T_{k_1}$ te kunnen stellen.

Maar bij b_1 kleiner dan b_2 moet deze waarde grooter zijn en des te grooter naarmate het verschil tusschen b_2 en b_1 toeneemt. Is aan de ongelijkheid niet voldaan, is dus $T_g < T_{k_1}$, dan hebben wij een geheel normaal verloopende plooipuntslijn. Dit is o.a. het geval als bij geringe verhouding tusschen b_1 en b_2 ook een niet zeer groote verhouding tusschen de kritische temperaturen aanwezig is. Eerst echter zou men moeten weten hoe a_{12} van a_1 en a_2 afhangt, eer men bij gegeven verhouding van b_1 en b_2 zou kunnen aangeven hoe groot de verhouding van $\frac{a_1}{b_1}$ en $\frac{a_2}{b_2}$ zou moeten zijn om òf de gecompliceerde òf de eenvoudige verloopende plooipuntslijn te kunnen verwachten. Daarenboven, ik herhaal dit, zou moeten overwogen worden in hoever getallenwaarden, die in de gegeven vergelijkingen voorkomen, wegens de slechts benaderde juistheid der toestandvergelijking door anderen zouden moeten vervangen worden.

Uit dit alles blijkt in hoe hooge mate de eigenschappen van de functie $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ invloed hebben op de gedaante der plooi en dus ook op de al of niet mengbaarheid in den vloeistofvorm, en dat de invloed van de eigenschappen dezer functie op een lijn kan gelijk gesteld worden

met dien van de functie $\frac{d^2\psi}{dv^2}$. Wij zullen dit nog nader aantoonen door ook het geval na te gaan, dat de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanwezig is en zij de kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ snijdt.

Neemt men een strook van fig. 1 zoodanig dat de lijn $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ daarop aanwezig is en dat deze den stand heeft als in fig. 6 is geteekend. De vloeistoftak van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ is dan aan de rechterzijde van de strook bij grootere volumes gelegen dan die van $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$. Aan de linkerzijde zou snijding kunnen zijn van deze beide krommen. Is nu ook de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanwezig, wat als de temperatuur maar laag genoeg is, het geval zal zijn, en snijdt deze kromme zoowel $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ als $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, dan hebben wij een loop van de q lijnen, zooals in fig. 6 is geteekend, en zal er weder een samengestelde plooi ontstaan, waarvan wij de gedaante en de eigenschappen zullen hebben na te gaan. Dat de snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ met $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ kan plaatsgrijpen hebben wij op bladz. 924 en 925 aangetoond.

Tot hiertoe hebben wij gezien dat eenzelfde q lijn of 2 of 4 raakpunten met p lijnen kon bezitten, wij hebben nu een geval waarin het aantal raakpunten tot 6 kan stijgen. In fig. 14 is geteekend 1°. de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ en $\frac{dp}{dv} = 0$, 2°. de strik-p-lijn, 3°. een q-lijn waaraan in 4 punten horizontale raaklijnen kunnen getrokken worden en in 1 punt een vertikale raaklijn en 4°. gedeelten van 6 p lijnen, welke aan de q lijn raken. De druk in punt 1 is veel grooter dan in 2, stijgt dan tot in 3 om tot in 4 te dalen en daar de laagste waarde te bereiken. In het punt 5 is de grootste druk aanwezig en in 6 is de druk lager dan in 5 geteekend, maar kan zij hooger zijn dan in punt 1. Voor de richting der p lijnen in de aanrakingspunten moet fig. 1 geraadpleegd worden. Deze 6 aanrakingspunten zijn weder punten van de spinodale lijn. Er is dus weder rechts een stuk van de spinodale lijn zich nauw aansluitend aan de lijn $\frac{dp}{dv} = 0$, evenzoo links een stuk dat zich niet ver verwijdert van deze lijn. Maar

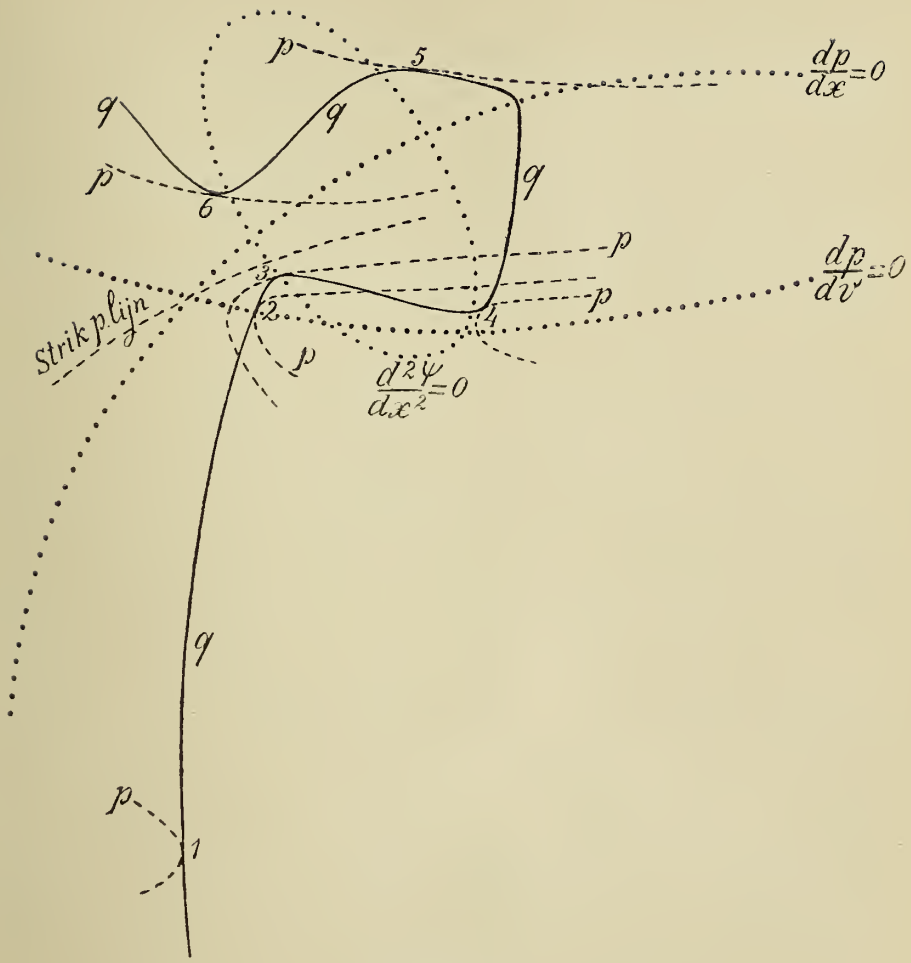


Fig. 14.

tusschen die twee gedeelten in, moet de spinodale lijn in sterke mate naar kleinere volumes teruggedrongen zijn om de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ te vermijden.

In de punten waar $\frac{dp}{dx}=0$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ snijdt, raakt de spinodale lijn deze kromme, daar voor de punten der spinodale lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{\left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2}{\frac{d^2\psi}{dv^2}}$ moet zijn, en zij dus in het gebied moet blijven waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief is, behalve als $\frac{d^2\psi}{dxdv}=0$ is. Het kan dan zelfs betwijfeld worden of voor alle punten der spinodale lijn $v > b$ gevonden wordt.

Waarden van $v < b$ zouden toch beteekenen dat het linker- en rechtergedeelte van den vloeistoftak der spinodale lijn van elkander gescheiden blijven; en voor de al of niet mengbaarheid der componenten zou dit beteekenen dat bij de temperaturen waarbij dat het geval is, zelfs oneindige groote druk onvoldoende zou zijn om menging tot stand te brengen. Reeds in mijn Théorie Moléculaire heb ik dit vraagpunt gesteld, en aangetoond dat als b een lineaire functie van x is, er gevallen denkbaar zijn, waarin de spinodale lijn de lijn $v = b$ tweemaal zou kunnen snijden, maar dat als, zooals inderdaad te wachten is $\frac{d^2b}{dx^2}$ positieve waarde heeft, er nimmer snijding zijn zal. Maar, erkennen wij weder dat voor die zeer kleine volumes de kennis der toestandsvergelijking onvoldoende is, dan volgt daaruit dat wij beter doen geen beslissende uitspraak te doen over deze vraag.

Is de spinodale lijn boven gesloten, dan zal daar een realiseerbaar plooipunt te vinden zijn, terwijl er een verborgen plooipunt moet zijn in de nabijheid van de punten 2 en 3. Verhoogt men de temperatuur dan zal, daar $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ nu ook de lijn $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ snijdt, zich alvorens te verdwijnen, kunnen samentrekken tot boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Heeft ze zich genoegzaam boven $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ verheven, dan zal de spinodale lijn een splitsingspunt [1]) verkrijgen, waarbij 2 nieuwe plooipunten (homogene) worden gevormd. In dat splitsingspunt is dus $\frac{d^2v}{dx^2}_p$ en $\frac{d^2v}{dx^2}_q = 0$. Dit geeft ons een aanwijzing over de plaats, waar dit splitsingspunt zal gelegen zijn. Dat de q-lijn beneden $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ een buigpunt hebben moet, hebben wij vroeger aangetoond (pag. 833) waar wij besloten tot een reeks van buigpunten der q-lijnen, die door het punt gaat, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ het grootste volume heeft. Wij hebben ook vroeger (pag. 693) besloten tot een reeks van buigpunten van de p-lijnen, uitgaande van het punt, waar $\frac{dp}{dx} = 0$ en $\frac{dp}{dv} = 0$ elkander snijden, en gaande door het punt, waarin $\frac{dp}{dx} = 0$ het minimum-

[1]) Dat splitsingspunt had ik reeds op het oog in mijn Théorie Moléculaire (Cont. II pag. 42 en 43) waar ik de temperatuur aangeef waarbij de afgesnoerde plooi (lengteplooi) het v,x-diagram verlaat, als zij zich niet vooraf tot een enkel punt zou hebben samengetrokken.

volume heeft. Daaruit besluiten wij dat het dubbelplooipunt alleen kan voorkomen als de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ door $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gesneden wordt tamelijk ver links van het punt met minimumvolume, en dus niet ver rechts van de asymptoot der lijn $\frac{dp}{dx} = 0$. Laat ik in het voorbijgaan hierbij opmerken dat de waarnemingen van VAN DER LEE bij water en phenol een voorbeeld geven van het hier besproken geval, en dat de eigenschappen der damp-vloeistof binodale lijn daar door het vertoonen van een maximumdruk bewijs gaven dat de asymptoot der lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ of in het v, x diagram aanwezig is, of niet ver links gelegen kon zijn. Na het verschijnen van dit dubbelplooipunt zijn er dus 4 plooipunten. Twee dienen dus als plooipunten van de zich afsnoerende plooi, en zijn beide in onze terminologie realiseerbaar, en wanneer de afsnoering voorbij is, zullen ze ook beiden gerealiseerd kunnen worden. Deze dienen dan als plooipunten van wat inderdaad een *lengteplooi* moet genoemd worden. De andere twee plooipunten, nl. het verborgen plooipunt, dat wij hierboven in de nabijheid der punten 2 en 3 plaatsten, en het benedenste van de nieuw gevormde plooipunten vormen dan een paar *heterogene* plooipunten, die zich niet vertoonen op de binodale lijn der dampvloeistofplooi, en spoedig zullen samenvallen en daarbij verdwijnen. Van dan af zijn de binodale lijnen der beide plooien geheel van elkander gescheiden en gedragen zij zich onafhankelijk van elkander. De dampvloeistofplooi is dan eenvoudig en volkomen normaal. Maar ook de lengteplooi kan dan als een normale beschouwd worden.

(Wordt vervolgd.)

Scheikunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: *„Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is."*

(Mede aangeboden door den Heer SCHREINEMAKERS.)

1. In de laatst verschenen Verslagen der K. A. v. W. [1]) deelde de Heer KEESOM (ook met Prof. KAMERLINGH ONNES) eenige belang-

[1]) KAMERLINGH ONNES en KEESOM, Deze Verslagen van 11 Jan. 1907, p. 507—513 [Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase enz. (Med. 96*b*]; KEESOM, Ibid. p. 514—517 [Over de voorwaarden voor het zinken enz. (Med. 96*c*)]; KEESOM, Ibid. van 6 Februari 1907, p. 655—658 (Vervolg van 96*c*); KAMERLINGH ONNES en KEESOM, Ibid. van 6 Maart 1907, p. 754—763 [Geval dat de eene component eene aantrekkingloos gas is enz. (Suppl. N°. 15)].

rijke uitkomsten mede o. a. aangaande zijn onderzoek naar het bijzondere geval, dat van de beide grootheden a_1 en a_2 de eene, b.v. a_1, zeer gering is, wat o. a. bij mengsels van He (a_1) en H_2 (a_2) verwezenlijkt is. In die stukken, vooral in het laatste, komt bij herhaling het geval ter sprake van een bijzonder soort van plooipuntslijn, n.l. gaande van de door mij aldus genoemde „derde" kritische temperatuur T_0 (T_{km} bij KEESOM) naar de *hoogste* der twee kritische temperaturen T_2 (T_{k_1} bij KEESOM).

Nu is de theoretische mogelijkheid van een dergelijk verloop der plooipuntslijn, d. w. z. *van een harer beide takken*, het eerst door mij aan het licht gebracht in een reeks Verhandelingen over dit onderwerp. [1]) Niet alleen voor het bijzondere geval $b_1 = b_2$, waarvoor o. a. fig. 1 van 7 Juni 1905 geldt, maar voor alle mogelijke gevallen. (Zie vooral TEYLER I en II). Wij vonden, dat een dusdanig verloop zich altijd zal voordoen, wanneer de verhouding der beide kritische temperaturen $\theta = \frac{T_2}{T_1}$ *grooter* is dan de waarde dezer verhouding, waarvoor de plooipuntslijn een *dubbelpunt* bezit. Dit type werd door mij Type I genoemd. (Zie ook fig. 1 van 10 Oct. 1906).

Het geval, dat een plooi *uitgaat* van C_0 naar C_2, of ook tevens van C_2 naar C_0 (wanneer er een minimumtemperatuur in de plooipuntslijn is), is niet nieuw (zie K. O. en KEESOM, p. 757 boven), maar reeds vroeger door mij in alle bijzonderheden beschreven en berekend.

Het door mij in 1905 ontdekte *dubbelpunt* in de plooipuntslijn (7 Juni) gaf niet alleen den sleutel voor de mogelijkheid van een dusdanig verloop, dat reeds was geconstateerd bij mengsels van water en aether, van aethaan en methylalkohol [2]); maar ook den *samenhang*

---

[1]) Deze Verslagen van 5 April 1905, p. 685—695; Ibid. van 7 Juni 1905, p. 14—29; Ibid. van 14 Juli 1905, p. 108—116 (Ook Arch. Néerl. 1905, p. 373—413); Ibid. van 10 Jan. 1906, p. 582—594 (Ook Arch. Néerl. 1906, p. 224—238); Ibid. van 10 Oct. 1906, p. 227—236. Verder Arch. TEYLER (2) X, Première partie, p. 1—26 (1905); Ibid. Deuxième partie, p. 1—54 (1906). In het vervolg zullen door mij alle Akademie-stukken door den *datum*, de Teyler-stukken door Teyler I of II worden aangeduid.

[2]) Het is mij niet duidelijk geworden waarom in gevallen als bij $He + H_2$ de bedoelde plooi speciaal een „*gasplooi*" wordt genoemd. Met geheel het zelfde recht kunnen de beide coëxisteerende phasen twee *vloeistof*phasen worden genoemd, vooral bij de hoogere drukken in de nabijheid van het punt C_0. Men spreekt bij water-aether, enz. vóór het bereiken van het driephasenevenwicht, d.w.z. bij hoogere temperaturen, van een gasphase èn een vloeistofphase, en wanneer zich bij lagere temperaturen het genoemde evenwicht heeft ingesteld, van twee vloeistofphasen. De „gasphase" wordt dan door de gevormde nevenplooi der oorspronkelijke dwars-

der verschillende reeksen van *verborgen* plooipunten enz. enz., zooals o. a. in 10 Jan. 1906 is aangegeven (zie ook TEYLER II). De Heer KEESOM spreekt er niet van, dat er in zijn fig. 1 (l.c. p. 763), behalve de daar gedachte plooipuntslijn van K_m naar K_1, *altijd* nog een *tweede* tak bestaat, die langs den rand der v-as in de nabijheid van $x = 1$ loopt van het punt, waar $v = b$, naar K_2 — en die bij lagere temperatuur tot een *driephasenevenwicht* aanleiding geeft, zooals dit door mij (eveneens in 10 Jan. 1906 en TEYLER II) is ontwikkeld.

Het feit, dat een plooi zich op de genoemde wijze uitstrekt, wordt dus, zooals wij reeds zeiden, *in de eerste plaats* daardoor beheerscht of de waarden van $\frac{b_2}{b_1}$ en $\frac{a_2}{a_1}$ $\left(\text{dus van } \theta = \frac{T_2}{T_1} \text{ en } \pi = \frac{p_2}{p_1}\right)$ zoodanig zijn, dat θ *grooter* is dan die waarde van θ, waarvoor bij de gegeven waarde van π de plooipuntslijn een *dubbelpunt* bezit. Omdat derhalve de kennis van dit dubbelpunt van zoo groot belang is voor de onderscheiding der verschillende typen, heb ik de daartoe vereischte omslachtige berekeningen in TEYLER I uitgevoerd en de gevonden uitkomsten in tabellen vereenigd. [Zie ook TEYLER II, waar fig. 22 (blz. 30) de resultaten *grafisch* voorstelt].

Niet derhalve het feit, dat $T_{km} > T_{k_1}$ is (KEESOM zegt dan ook zeer terecht in een Noot (l.c. p. 761), dat T_{km} ook $< T_{k_1}$ kan zijn), maar alleen het feit, dat θ zich *boven* de *dubbelpuntswaarde* bevindt, beslist over het bedoelde verloop der plooipuntslijn. (Zie ook 10 Oct. 1906, waar ik de meeste der door mij verkregen resultaten resumeerde). [1])

Nu vermeldt KEESOM wel in een Noot (l.c. p. 754), dat ik voor het geval $a_1 = 0$ de plooipuntslijn heb nagegaan, maar deze mededeeling is niet geheel volledig, want niet alleen voor dit bijzondere

---

plooi (welke laatste thans de eigenaardige naar C_0 gerichte gedaante heeft) in de nabijheid der as $x = 0$ bepaald. Maar ik erken, dat dit geheel willekeurig is, daar men op een dergelijke plooi moeilijk kan aangeven waar de druk hoog genoeg is om doeltreffender van vloeistofphasen te spreken. Zoude het niet beter zijn ons hier aan de terminologie van VAN DER WAALS te houden en van *fluïde* phasen te spreken, en de beide phasen *vloeistof*phasen te noemen bij temperaturen, waar het driephasenevenwicht aanwezig is? Men zou anders in dit laatste geval — vasthoudende aan de terminologie van K. O. en KEESOM — van *drie* coëxisteerende *gasphasen* moeten spreken, één verdunde en twee zeer dichte, welke laatste men in het *geheel identieke* geval van water + aether toch wel nimmer met den naam van gasphasen zal aanduiden.

[1]) Prof. VAN DER WAALS zegt (Deze Verslagen van 6 Maart, p. 686) „dat het „tot hiertoe nog niet zou gelukt zijn de oorzaak voor die verschillende vormen „(van plooien) aan te geven." Ik meen dit in mijne stukken van 1905—1906 tot op zekere hoogte gedaan te hebben.

geval $a_1 = 0$, hetwelk ik terloops in een Noot (7 Juni 1905, p. 20) noemde, maar voor alle gevallen werd het verloop eener dergelijke plooipuntslijn door mij nagegaan. De plooipuntslijn $C_0\,C_2$ voor het geval $a_1 = 0$ onderscheidt zich qualitatief in niets van die voor het geval $a_1 > 0$ (mits blijvende in het geval van type I), zoodat ik dar ook geen reden had bovendien nog eens den vorm der spinodale lijn en der plooi voor $a_1 = 0$ te onderzoeken, aangezien dat reeds voor het algemeene geval was geschied. Trouwens KEESOM zelf beschouwt later het geval a_1 *klein*, en niet meer $a_1 = 0$, hetgeen natuurlijk in de praktijk niet voorkomt.

Ook de door KEESOM opgeschreven vergelijking der spinodale lijn (voor moleculaire hoeveelheden), nl.

$$RTv^3 = 2\,(1-x)\,(v\sqrt{a_1} - b_1\sqrt{a})^2 + 2x\,(v\sqrt{a_2} - b_2\sqrt{a})^2,$$

is reeds vroeger door mij (5 April 1905, p. 690) in den daaraan identieken vorm

$$RTv^3 = 2\left[x\,(1-x)\,(av - \beta\sqrt{a})^2 + a\,(v-b)^2\right],$$

waarin $\alpha = \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}$ en $\beta = b_2 - b_1$, opgesteld.

2. De beantwoording der vraag of de plooi zich van uit C_0 naar C_2 ontwikkelt *met* of *zonder* dubbelpunt in de *spinodale* lijn, d. w. z. met of zonder *minimum*-plooipuntstemperatuur — m. a. w. de beantwoording der vraag of de plooi onverdeeld van C_0 naar C_2 gaat, dan wel of twee plooien zich op het ψ-vlak uitbreiden, de eene van uit C_0, de tweede van uit C_2, om zich bij de minimum-temperatuur te ontmoeten — hangt bij gegeven waarde van $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ af van de waarde van $\theta = \frac{T_2}{T_1}$ (waarvan ook $\frac{T_2}{T_0}$ afhangt). De voorwaarde hiervoor leidde ik af in 14 Juli 1905, p. 114, en 10 Jan. 1906, p. 585. In den zomer van 1906 berekende ik de plaats van het minimum zelf (zie 10 Oct. 1906, p. 235, regel 14—12 v. o.), maar aangezien de reeds toen geheel voltooide en naar de Redactie gezonden Verhandeling voor de Arch. Teyler nog altijd niet is afgedrukt (dit kan nog wel eenigen tijd duren), zoo acht ik het gewenscht reeds nu de bedoelde berekening te publiceeren.

Deze gaat, evenals de berekeningen van KEESOM, VERSCHAFFELT e.a., uit van de onderstelling, dat a en b niet van v of T afhangen, en dat deze grootheden kunnen worden voorgesteld door

$$a_x = [(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_1}]^2 \quad ; \quad b_x = (1-x)\,b_1 + x\,b_2.$$

Er wordt dus met D. BERTHELOT e. a. ondersteld, dat $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$.

Prof. VAN DER WAALS is onlangs tegen deze onderstelling opgekomen [1]), en het komt mij voor, dat er inderdaad veel voor te zeggen is, dat a_{12} *in het algemeen niet* $= \sqrt{a_1 a_2}$ is. Maar als eerste benadering zal men de gestelde betrekking toch wel kunnen aannemen, te meer daar toch ook de veranderlijkheid van b met v en T wordt verwaarloosd. Dat de door VAN DER WAALS genoemde linkerstrook door de aanname $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ tot een uiterst smalle strook zou worden ineengedrongen, kan echter moeilijk als argument tegen die onderstelling gelden; wel het feit, dat de aantrekkingen *specifieke* grootheden zijn, en dat dus ε_{12} niet $= \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ behoeft te wezen.

Voor de berekening van het minimum gaan wij uit van de door ons afgeleide vergelijking der spinodale (l. c.):

$$RT = \frac{2}{v^3}\left[x(1-x)(av - \beta\sqrt{a})^2 + a(v-b)^2\right], \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of

$$RT = \frac{2a^2}{v}\left[x(1-x)\left(1 - \frac{\beta}{v}\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^2 + \frac{a}{a^2}\left(1 - \frac{b}{v}\right)^2\right],$$

hetgeen met $\frac{b_1}{v} = \omega$, $\frac{\beta}{v} = n\omega$, $\frac{\sqrt{a_1}}{a} = \varphi$ overgaat in

$$RT = \frac{2a^2}{\beta} n\omega\left[x(1-x)\left(1-n\omega(\varphi+x)\right)^2 + (\varphi+x)^2\left(1-(1+nx)\omega\right)^2\right]. \quad (1a)$$

Immers $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a_1}+x a}{a} = \varphi + x$ en $\frac{b}{v} = \frac{b_1 + x\beta}{v} = \omega + xn\omega = (1+nx)\omega$.

Nu moet de spinodale een dubbelpunt vertoonen, m. a. w.:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0,$$

wanneer f het tweede lid van $(1a)$ voorstelt. De eerste vergelijking geeft:

$$(1-2x)(1-z)^2 - 2x(1-x)(1-z)n\omega + 2(\varphi+x)(1-y)^2 - 2(\varphi+x)^2(1-y)n\omega = 0,$$

wanneer ter bekorting $n\omega(\varphi+x) = z$ en $(1+nx)\omega = y$ wordt gesteld. Bedenkt men, dat $n\omega = \frac{z}{\varphi+x}$ is, dan wordt het laatste:

$$(1-2x)(1-z)^2 - \frac{2x(1-x)}{\varphi+x} z(1-z) + 2(\varphi+x)(1-y)^2 - 2(\varphi+x)(1-y)z = 0. \quad (a)$$

De tweede vergelijking geeft, wanneer in $(1a)$ de factor ω binnen [ ] wordt gebracht:

[1]) Deze Verslagen van 6 Maart 1907, p. 695—696.

$$x\,(1-x)\left[(1-z)^2-2\omega\,(1-z)\,n\,(\varphi+x\right]+$$

$$+(\varphi+x)^2\left[(1-y)^2-2\omega\,(1-y)\,(1+nx)\right]=0,$$

of

$$x\,(1-x)\left[(1-z)^2-2z\,(1-z)\right]+(\varphi+x)^2\left[(1-y)^2-2y\,(1-y)\right]=0,$$

d. w. z.

$$x\,(1-x)\,(1-z)\,(1-3z)+(\varphi+x)^2\,(1-y)\,(1-3y)=0. \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Uit (b) lossen wij op:

$$x\,(1-x)=-(\varphi+x)^2\,\frac{(1-y)\,(1-3y)}{(1-z)\,(1-3z)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Uit (a) eveneens:

$$1-2x=\left[-2\,(\varphi+x)\,(1-y)^2+2\,(\varphi+x)\,(1-y)z+\frac{2x(1-x}{\varphi+x}z\,(1-z)\right]:(1-z)^2,$$

of

$$1-2x=\left[-2(\varphi+x)(1-y)^2+2(\varphi+x(1-y)z-\frac{2(\varphi+x)(1-y)(1-3y)z}{1-3z)}\right]:(1-z)^2,$$

wanneer voor $x\,(1-x)$ de waarde uit β wordt gesubstitueerd. Verdere herleiding geeft:

$$1-2x=\left[-2\,(\varphi+x)\,(1-y)^2+2\,(\varphi+x)\,(1-y)\,z\left\{1-\frac{1-3y}{1-3z}\right\}\right]:(1-z)^2,$$

of

$$1-2x=-\frac{2\,(\varphi+x)\,(1-y)}{(1-z)^2}\left[(1-y-3z\,\frac{y-z}{1-3z}\right],$$

of

$$1-2x=-\frac{2\,(\varphi+x)\,(1-y)}{(1-z)^2}.\frac{(1-y)-3z\,(1-z)}{1-3z}. \quad . \quad . \quad (a)$$

Uit (α) en (β) volgt nu, daar $(1-2x)^2=1-4x\,(1-x)$ is:

$$1+4\,(\varphi+x)^2\,\frac{(1-y)\,(1-3y)}{(1-z)\,(1-3z)}=\frac{4(\varphi+x)^2(1-y)^2}{(1-z)^4}\,.\,\frac{\left[(1-y)-3z(1-z\right]^2}{(1-3z)^2},$$

d. w. z.

$$1=\frac{4(\varphi+x)^2(1-y)}{(1-z)^4(1-3z)^2}\left[(1-y)\left\{(1-y)-3z(1-z)\right\}^2-(1-3y)(1-z)^3(1-3z)\right].$$

Rangschikking naar de machten van z geeft voor [ ]:

$$(3y^2-y^3)-6z\,(y+y^2)+3z^2\,(1+5y+2y^2)+z^3(-8-12y)+6z^4,$$

of

$$y^2(3-y)-6yz\,(1+y)+3z^2(1+5y+2y^2)-4z^3\,(2+3y)+6z^4,$$

hetgeen kan worden herleid tot

$$(y-z)^2(6z^2-8z+3-y),$$

zoodat wij vinden:

$$1 = \frac{4(\varphi+x)^2(1-y)(y-z)^2(6z^2-8z+3-y)}{(1-z)^4(1-3z)^2},$$

waaruit kan worden opgelost:

$$(\varphi+x)_m^2 = \frac{(1-z)^4(1-3z)^2}{4(1-y)(y-z)^2(6z^2-8z+3-y)}, \quad \ldots \quad (2)$$

waardoor $\varphi + x$ in de beide parameters y en z is uitgedrukt. Hierdoor gaat (β) over in

$$x_m(1-x_m) = -\frac{(1-z)^3(1-3z)(1-3y)}{4(y-z)^2(6z^2-8z+3-y)}, \quad \ldots \quad (3)$$

waaruit x_m kan worden berekend bij gegeven waarden van y en z. Dan is door (2) ook φ_m bekend, d.w.z. uitgedrukt in y en z.

Voor RT_m vindt men nu verder volgens $(1a)$:

$$RT_m = \frac{2a^2}{\beta} n\omega \left[-\frac{(1-z)^5(1-3z)(1-3y)}{4(y-z)^2(6z^2-8z+3-y)} + \frac{(1-z)^4(1-3z)^2(1-y)}{4(y-z)^2(6z^2-8z+3-y} \right],$$

daar $n\omega(\varphi + x) = z$ en $(1 + nx)\omega = y$ is. Herleiding geeft:

$$RT_m = \frac{2a^2}{\beta} n\omega \frac{(1-z)^4(1-3z)}{4(y-z)^2(6z^2-8z+3-y)} \left[1-3z)(1-y)-(1-z)(1-3y) \right].$$

De uitdrukking tusschen [ ] is $= 2(y-z)$, derhalve wordt, daar $\frac{n}{\beta} = \frac{1}{b_1}$ is:

$$RT_m = \frac{a^2\omega}{b_1} \frac{(1-z)^4(1-3z)}{(y-z)(6z^2-8z+3-y)}.$$

Drukken wij dit uit in T_1, de kritische temperatuur van den eenen komponent. $(T_1 < T_2)$. Wij vinden:

$$T_1 = \frac{8}{27}\frac{a_1}{b_1} = \frac{8}{27}\frac{a^2\varphi^2}{b_1},$$

daar $\frac{\sqrt{a_1}}{a} = \varphi$ werd gesteld. Daardoor wordt eindelijk:

$$\frac{T_m}{T_1} = \frac{27}{8}\frac{\omega}{\varphi^2}\frac{(1-z)^4(1-3z)}{(y-z)(6z^2-8z+3-y)} \quad \ldots \quad (4)$$

Nu is

$$z = n\omega(\varphi + x) \quad ; \quad y = (1 + nx)\omega,$$

waaruit men oplost:

$$n\omega = \frac{z}{\varphi+x} \quad ; \quad y = \omega + \frac{xz}{\varphi+x},$$

derhalve

$$\omega = y - \frac{xz}{\varphi + x} \quad ; \quad \frac{1}{n} = \frac{y}{z}(\varphi + x) - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierdoor zijn ω en n uitgedrukt in y en z, daar $(\varphi + x)_m$ en x_m reeds door (2) en (3) in y en z waren uitgedrukt.

Daar verder

$$1 + n = 1 + \frac{\beta}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\theta}{\pi},$$

en

$$1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}$$

is, wanneer $\theta = T_2 : T_1 = \frac{a_2}{b_2} : \frac{a_1}{b_1}$ en $\pi = p_2 : p_1 = \frac{a_2}{b_2^2} : \frac{a_1}{b_1^2}$, zoo is ook :

$$\theta = \frac{\left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)^2}{1 + n} \quad ; \quad \pi = \frac{\left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)^2}{(1 + n)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zoodat ook θ en π in y en z kunnen worden uitgedrukt.

Omgekeerd kan men nu ook *bij elk gegeven waardepaar van* π en θ de bijbehoorende waarden van ω, x en T_m opgelost denken, al is dit *expliciet* onmogelijk, zoodat wij ons met het vergelijkingenstel (2) tot (6) zullen moeten behelpen.

De nadere bespreking dezer vergelijkingen, speciaal ten opzichte van den tak C_0A der plooipuntslijn, in verband met de *lengteplooi*, zal men in de Verhandeling vinden, welke spoedig in de Arch. Teyler verschijnt. Ook wordt daar het verloop van den *druk* nagegaan, waarop wij hier niet verder zullen ingaan. Alleen is het wenschelijk nog even de gegevens voor de „derde" kritische temperatuur C_0 te berekenen, nl. x_0 en T_0 — niet omdat die gegevens voor de volgende beschouwingen noodzakelijk zijn, maar omdat KEESOM ze in zijn beschouwingen betrekt, en het in elk geval nuttig is iets aangaande de verhouding $\frac{T_0}{T_1}$ of $\frac{T_0}{T_2}$ te weten.

Daar voor het punt C_0 $v = b$ is, zoo is $y = \frac{b}{v} = 1$, en reduceert zich de vergelijking der v,x-projectie van de plooipuntslijn (14 Juli 1905, p. 110; Teyler I en II), n.l.

$$(1-z)^3(1-2x-3x(1-x)n\omega)+3(\varphi+x)(1-y)^2(1-z)(1-2z)+$$
$$+\frac{(\varphi+x)^3(1-y)^3(1-3y)}{x(1-x)} = 0\,,$$

tot

$$1-2x_0-3x_0(1-x_0)n\omega_0 = 0,$$

of daar $y = (1 + nx)\omega$ is, en derhalve $\omega_0 = \frac{1}{1+nx_0}$, tot

$$(1-2x_0)(1+nx_0)-3x_0(1-x_0)n = 0,$$

waaruit volgt:

$$x_0 = \frac{(n+1)-\sqrt{n^2+n+1}}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hieruit ziet men, dat de ligging van C_0 slechts afhankelijk is van de waarde van n of $1 + n = \frac{b_2}{b_1}$.

De bijbehoorende waarde van T_0 wordt gevonden uit (1a). Voor $y = 1$ vindt men:

$$RT_0 = \frac{2a^2\omega_0}{b_1} x_0 (1-x_0)(1-z_0)^2,$$

waarin $\omega_0 = \frac{1}{1+nx_0}$ en $z_0 = nx_0 (\varphi + x_0)$ is.

Daar $T_1 = \frac{8}{27} \frac{a^2\varphi^2}{b_1}$ is (zie boven), zoo wordt:

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{27}{4} \frac{\omega_0}{\varphi^2} x_0 (1-x_0)(1-z_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Voor elk gegeven stel waarden van θ en π of φ en n kan men derhalve x_0 en T_0 onmiddellijk berekenen uit (7) en (8).

3. Het is nu voor ons geval (a_1 klein) belangrijk te weten wanneer er al of niet een minimum in de plooipuntslijn C_0C_2 aanwezig is. Wij zullen daartoe de voorwaarde afleiden, dat het minimum *juist* in het punt C_2 verschijnt. Deze voorwaarde zal dan klaarblijkelijk de grens aangeven tusschen de beide gevallen, dat er al of niet een minimum in de nabijheid van C_2 aanwezig is — m. a. w. of de lijn der plooipuntstemperaturen in C_2 eerst daalt om later te stijgen tot T_0 in C_0; of wel, dat er onmiddellijk stijging is van T_2 tot T_0. (Wij herinneren er aan dat bij ons T_2 altijd de *hoogste* is der beide kritische temperaturen T_1 en T_2).

Nu is in het punt C_2 $y = \frac{b}{v} = \frac{1}{3}$, terwijl $x = 1$ is. De vergelijking (2) gaat derhalve over in

$$(\varphi + 1)^2 = \frac{(1-z)^4 (1-3z)^2}{4 \times {}^2/_3 ({}^1/_3 - z)^2 (6z^2 - 8z + 2{}^2/_3)} = \frac{81}{16} \frac{(1-z)^4}{(2-3z)^2},$$

waaruit volgt:

$$\varphi + 1 = \frac{9}{4} \frac{(1-z)^2}{2-3z},$$

derhalve

$$\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 9\,\frac{(1-z)^2}{(1-3z)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Uit

$$z = n\omega\,(\varphi + x)$$

volgt dan verder, daar $\omega = \frac{b_1}{v} = \frac{b_2}{v} \times \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+n}$ is, en $x = 1$:

$$z = \frac{1}{3}\,\frac{n}{1+n}\,(\varphi + 1) = \frac{3}{4}\,\frac{n}{1+n}\,\frac{(1-z)^2}{2-3z}.$$

Dit geeft:

$$\frac{1+n}{n} = \frac{3}{4}\,\frac{(1-z)^2}{z(2-3z)},$$

of

$$\frac{b_2}{b_1} = 1 + n = \frac{3\,(1-z)^2}{(1-3z)\,(3-5z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Uit (a) en (b) volgt na eenige herleiding, wanneer wij stellen:

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \varkappa \quad ; \quad \frac{b_2}{b_1} = \lambda,$$

de eenvoudige betrekking

$$\underline{\lambda \geqq \frac{\varkappa}{3 + 2\sqrt{\varkappa}}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

waar het teeken $\geqq$ betrekking heeft op het aanwezig zijn van een minimum in de nabijheid van C_2.

De door ons gevonden voorwaarde (c) is geheel identiek met die, welke wij vroeger uit de door ons gevonden formule voor $\frac{1}{T_1}\left(\frac{dT_x}{dx}\right)_0$ hebben afgeleid (14 Juli 1905, p. 114 en 10 Januari 1906, p. 585). Die voorwaarde luidde nl.:

$$\theta < \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi}-1)^2}.$$

Met dit onderscheid evenwel, dat wij toen $\frac{1}{T_1}\left(\frac{dT_x}{dx}\right)_0$ bij C_1 beschouwden, terwijl wij thans den tak der plooipuntslijn hebben nagegaan, die van C_2 uitgaat, zoodat wij $\frac{1}{T_2}\left(\frac{dT_x}{dx}\right)_1$ moeten berekenen, en daaruit de voorwaarde van het minimum moeten afleiden. Maar men ziet dadelijk in, dat men deze verkrijgt, door in de bovenstaande voorwaarde θ te vervangen door $\frac{1}{\theta}$ en π door $\frac{1}{\pi}$.

Men vindt dus:

$$\frac{1}{\theta} < \frac{4\sqrt{\pi}}{\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}} - 1\right)^2},$$

of

$$\theta > \frac{\sqrt{\pi}(3-\sqrt{\pi})^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c').$$

En dat (c) identiek is met (c'), blijkt terstond, wanneer wij in (c) $\varkappa^2$ vervangen door $\frac{\theta^2}{\pi}$ en λ door $\frac{\theta}{\pi}$.

Wij hebben hierin een goede contrôle èn op de juistheid onzer boven afgeleide formule (c), èn op de vroeger door ons afgeleide voorwaarde (c').

Gaan wij thans na welke waarden van λ en $\varkappa$ volgens de voorwaarde (c) met elkaar correspondeeren, opdat het minimum nog juist in C_2 verschijne. De bijbehoorende waarden van z, die voor de berekening van T_0 noodig zijn, kan men vinden uit (a), gevende:

$$z = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{\varkappa}-3}{\sqrt{\varkappa}-1}.$$

De onderstaande tabel vereenigt de berekende waarden. Wij vestigen er nog de aandacht op, dat het minimum in de nabijheid van C_2 alleen kan behooren tot den tak C_2C_0 by type I ($\theta >$ de dubbelpuntswaarde), en nooit tot den tak C_2C_1 by type II of III ($\theta <$ de dubbelpuntswaarde). Want daar $T_2 > T_1$ wordt ondersteld, zoo kan een minimum op C_2C_1 onmogelijk bij C_2 liggen, wel in nabijheid van C_1.

	$\varkappa=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$	$\lambda=\frac{b_2}{b_1}$	$\theta=\frac{\varkappa^2}{\lambda}$	$\pi=\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}$	x_0	$\frac{T_0}{T_1}$	$\frac{T_0}{T_2}=\frac{T_0}{T_1}\times\frac{1}{\theta}$
$z=1/3$	∞	∞	∞	∞	0	∞	1 (Geval $a_1=0$)
$1/6$	25	$1^{12}/_{13}$	325	169	0,279	364	1,12
$1/9$	16	$1^5/_{11}$	176	121	0,365	209	1,19
0	9	1	81	81	0,500	108	$1^1/_3$
$-1/3$	4	$4/7$	28	49	0,694	—	—
-1	$2^1/_4$	$3/8$	$13^1/_2$	36	0,800	$30^3/_8$	$2^1/_4$
$\mp\infty$	1	$1/5$	5	25	0,896	—	—
$5/3$	$1/4$	$1/16$	1	16	0,968	9,30	9,30

Dat wil dus zeggen: bij een „*aantrekkingloos*" gas als een der componenten van het mengsel ($a_1 = 0, \varkappa = \infty$) zou λ grooter dan de grenswaarde ∞ moeten zijn, opdat zich een minimum in de lijn $C_2\,C_0$ in de nabijheid van C_2 vertoone. (Dan zou ook tevens $T_0\,T_2 < 1$ zijn). Bij eindige waarden van λ kan hieraan niet worden voldaan, en de lijn $C_0\,C_2$ verloopt met $T_0 > T_2$ zonder minimum.

Bij een *aantrekkingszwak* gas, waar b.v. $\varkappa = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = 16$ is, moet $\lambda = \frac{b_2}{b_1} > 1^5/_{11}$ zijn, opdat er een minimum optreedt. T_0/T_2 is dan $< 1{,}19$.

Bij $He - H_2$ is $\frac{a_2}{a_1}$ volgens een schatting van KEESOM (Deze Verslagen van 6 Febr. 1907, p. 657; Ibid. van 6 Maart, p. 762) ongeveer 175, $\varkappa$ derhalve $= 13{,}2$. Daarbij behoort volgens formule (*c*) de grenswaarde $\lambda = 1{,}29$. Nu schatte KEESOM (l. c.) deze waarde bij $He - H_2$ op ongeveer 2, en daar $2 > 1{,}29$ is, zoo is er in het geval van $He - H_2$ een minimum in de plooipuntslijn. Dit minimum kan met behulp der formules (2) tot (8) volledig worden berekend. De waarde van T_0/T_2 is dan kleiner dan ongeveer 1,25.

Bij $\varkappa = 2^1/_4$ moet $\lambda > {}^3/_8$ zijn, waarbij $T_0/T_2 < 2^1/_4$ is. Enz., enz.

Hoe grooter dus de waarde van a_1 — hoe geringer m. a. w. de waarde van $\varkappa$ — hoe kleiner ook de grenswaarde van λ uitvalt, waarboven een minimum te verwachten is, hoe eerder dit dus zal optreden, en wel bij betrekkelijk groote correspondeerende waarden van T_0/T_2.

Maar zooals wij reeds in § 1 opmerkten, dit alles betreft slechts het al of niet aanwezig zijn van een *minimum* in de lijn $C_0\,C_2$. *Dat* die lijn het bedoelde verloop heeft, hangt van geheel andere omstandigheden af — en wel, zooals ik reeds in 7 Juni 1905, p. 14—29 voor $b_1 = b_2$ aantoonde, en in latere stukken (speciaal TEYLER I) voor het algemeene geval nader uitwerkte, alleen daarvan, of bij de gegeven waarde van π de waarde van θ zich al of niet bevindt boven die, waarbij de *plooipuntslijn* een *dubbelpunt* bezit. En daarvoor is fig. 1 van 10 Oct. 1906 (zie ook TEYLER II) de maatstaf. Bevindt men zich *boven* de grenslijn $DBPAC'$, dan bevindt men zich in het gebied van Type I, waar een der takken der plooipuntslijn van C_0 naar C_2 loopt (de andere van A naar C_1 — zie b.v. fig. 1 van 7 Juni 1905 en fig. 1 van 10 Januari 1906). En *beneden* de grenslijn is men in het gebied van Type II (of III), waar de takken der plooipuntslijn $C_1\,C_2$ en AC_0 zijn. Maar men leze voor dit alles de geciteerde stukken na.

April 1907.

NASCHRIFT. Na het schrijven van bovenstaande beschouwingen verscheen in Deze Verslagen van 11 April 1907 het Vervolg van het laatst geciteerde stuk van K. ONNES en KEESOM (blz. 851—854). Daarin wordt een voorwaarde afgeleid voor het optreden van een minimum-plooipunts-temparatuur, welke identiek is met die, welke ik 10 Januari 1906 (formule (3), blz. 585) publiceerde, en tot welke uitkomst ook VERSCHAFFELT 7 Febr. 1906, blz. 693, een maand later kwam.

Immers op blz. 852 wordt thans door K. O. en KEESOM gegeven de voorwaarde (zie formule (2)):

$$\sqrt[4]{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{1}{3}\left[-1+\sqrt{1+3\,{}^{b_2}/_{b_1}}\right].$$

Nu is ${}^{a_2}/_{a_1}$ in mijne notatie $= {}^1/_{\varkappa_2}$ (zie boven; bij mij wordt nl. de component met de kleinste waarde van a door den index 1 aangeduid; bij KEESOM juist andersom). Verder is ${}^{b_2}/_{b_1} = {}^1/_{\lambda}$, zoodat de bovenstaande formule overgaat in

$$\sqrt{\frac{1}{\varkappa}} = \frac{1}{3}\left[-1+\sqrt{1+{}^3/_{\lambda}}\right],$$

waaruit volgt:

$$\lambda = \frac{\varkappa}{3+2\sqrt{\varkappa}},$$

zijnde mijne bovenstaande formule (c). En van deze hebben wij zooeven bewezen, dat ze identiek is met de betrekking van mij en VERSCHAFFELT (Jan. en Febr. 1906), nl.

$$\theta = \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi}-1)^2},$$

welke algemeen geldt, onafhankelijk daarvan of de tak der plooipuntslijn van C_2 uitgaat naar C_1 of naar C_0. [Zooals wij reeds opmerkten, geldt deze uitdrukking aan de zijde van den component I, wanneer $\theta = {}^{T_2}/_{T_1}$ en $\pi = {}^{p_2}/_{p_1}$ is, dus voor den tak, uitgaande van wat bij mij het punt C_1 is. Voor C_2 (bij KEESOM K_1) moeten dus θ en π eenvoudig door ${}^1/_{\theta}$ en ${}^1/_{\pi}$ worden vervangen. (Zie boven in § 3)].

De noot op blz. 851 in het stuk van K. O. en K. van 11 April 1907 is dus m.i. niet juist, want volgens het bovenstaande is er geen enkele aanvulling in de conclusie van VERSCHAFFELT (en van mij) noodig, omdat de door ons gegeven formule[1]) geldt voor elk

[1]) In de noot op blz. 851 staat maximum-temperatuur; dit moet natuurlijk zijn minimum-temperatuur.

beloop der plooipuntslijn, onafhankelijk daarvan of de bedoelde tak van C_2 naar C_1 dan wel naar C_0 verloopt. Immers de overgang van beide typen heeft geheel geleidelijk plaats door het dubbelpunt der plooipuntslijn heen, en analytisch zijn dan ook beide typen in dezelfde formule besloten, zoodat er ook slechts *eene* uitdrukking bestaat voor $\frac{dT_x}{dx}$, die voor beide gevallen gelijkelijk geldt. En wie nog mocht twijfelen, zal wel overtuigd wezen, nu hij uit het bovenstaande de identiteit inziet van de laatst door K. O. en K. afgeleide betrekking en de algemeene van VERSCHAFFELT en van mij.

Het zal wel overbodig zijn op te merken, dat het z.g. (homogene) „dubbel*plooipunt*" in den tak der plooipuntslijn C_0C_2, waarvan K. O. en K. spreken, identiek is met het veel besproken minimum en met het dubbelpunt in de spinodale lijn; en niet verward moet worden met het door mij ontdekte „dubbel*punt*" in de (geheele) plooipuntslijn, waar de beide takken dezer lijn elkaar snijden, en dat de beide typen I en II (of III) van elkaar scheidt, van welk dubbelpunt de gegevens slechts met moeite (zie Teyler I) voor het algemeene geval zijn te berekenen.

Dierkunde. — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. BOEKE: „*Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum.*" (1ste mededeeling).

(Deze mededeeling zal in het verslag der volgende vergadering verschijnen.)

Natuurkunde. — De Heer KAMERLING ONNES biedt aan Mededeeling n°. 98 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, H. KAMERLINGH ONNES en G. H. FABIUS: *Herhaling van de proeven van* DE HEEN *en* TEICHNER *omtrent den kritischen toestand.*

(Deze mededeeling zal in het verslag der volgende vergadering verschijnen.)

Plantenkunde. De Heer WENT biedt voor de Werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „*Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten*".

Palaeontologie. — De Heer HUGO DE VRIES biedt ook namens den Heer MOLENGRAAFF voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van de Heeren CLEMENT REID en ELEANOR M. REID: *„The fossilflora of Tegelen-sur-Meuse, near Venloo, in the province of Limburg"*.

De Voorzitter benoemt de Heeren MOLENGRAAFF en MARTIN om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Bibliotheek worden aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER de dissertaties 1°. van den Heer V. E. NIERSTRASZ: *„Rauwolfine als hartgif"*. 2°. van den Heer A. VAN ROSSUM: *„Gewaarwordingen en reflexen, opgewekt van uit de halfcirkelvormige kanalen"*.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

p. 761 r. 4 v. b. lees achter: „waarop": „buiten deze plooi".
p. 762 r. 3 èn 6 v. b. lees: $T_{km} > T_{k_1}$ i. p. v. $T_{km} < T_{k_1}$.
p. 797 r. 15 v. b. staat: uteruslichaam, lees: uteruslumen.

REGISTER.

Aardkunde. Missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid waarbij bericht wordt dat er geene termen bestaan aan het verzoek der Geologische Commissie te voldoen. 48. Antwoord der Geologische Commissie. 312.

— Verzoek van den Ingenieur-Directeur der Rijksopsporing van Delfstoffen om in nadere aanraking te komen met de Geologische Commissie. 48.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer H. G. JONKER: „Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland" (1734—1906). 360. Verslag hierover. 364.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.

— Mededeeling van den Heer C. E. A. WICHMANN: „Ertsgangen in Limburg". 767.

— Mededeeling van den Heer L. RUTTEN: „Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en België". 798.

ABERDEEN (Bericht van de University te) dat de feestviering zal plaats vinden op 25 September 1906. 49.

ABSORPTIELIJNEN (Het voortbrengen van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van). 211.

ABSORPTIEMAXIMA (Golflengten van vroeger gevonden emissie- en) in het ultraroode spectrum. 811.

AETHYLEENDUBBELBINDING (Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der) voor het tot stand komen dezer verschijnselen. 721.

AKADEMIËN (Internationale Associatie der). Brief van de kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen over ingekomen stukken voor de vergadering van 30 Mei 1907. 2.

— Bericht dat de keiz. Akademie van Wetenschappen te Tokio den wensch heeft te kennen gegeven als lid toe te treden. 48.

— Bericht over de vergadering van 30 Mei en 1 Juni 1906 benevens circulaire betreffende één der op die vergadering besproken punten: „De samenwerking tusschen de Internationale Associatie en de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der zon". 312.

— (Bericht dat de eerstvolgende algemeene vergadering der) zal plaats hebben op 29 Mei 1907. 458.

— Voorstel van de Kon. Akademiën van Wetenschappen te Berlijn en te Kopenhagen over de uitgave van een Corpus medicorum antiquorum. 458.

AKADEMIËN (Internationale Associatie der) (Schrijven van den Heer L. COUTURAT berichtende het verzoek de kwestie van een internationale taal op de agenda der) te plaatsen. 566.

— Missive van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen over een ingekomen voorstel tot benoeming eener speciale commissie tot onderzoek van een door den Heer L. DE TORRES Y QUEVEDO voorgesteld systeem. 766.

— Missive over een ingekomen voorstel van de „Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale". 766.

— Bericht omtrent de verschillende landen welke zich verklaard hebben voor eene internationale uitleening van handschriften. 865.

ALDROVANDI (U.) — Circulaire van eene Commissie ter herdenking van den 300-jarigen sterfdag van —. 680.

AMBOCEPTOREN (Over de) van een Antistreptococcenserum. 285.

AMINEN (Over de inwerking van basen, Ammoniak en) op s. trinitrophenyl-methylnitramine. 730.

AMMONIAK (Over de inwerking van basen,) en Aminen op s. trinitrophenyl-methylnitramine. 730.

AMYRINE (Over α- en β-) uit bresk. 388.

Anatomie. Mededeeling van den Heer A. J. P. VAN DEN BROEK: „Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren". 335.

— Mededeeling van den Heer B. VAN TRICHT: „Over den invloed der vinnen op den vorm van het rompmyotoom". 859. 874.

— Mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen" 3de Mededeeling. 859. 879.

— Mededeeling van den Heer J. W. VAN WIJHE: „Over het voorkómen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den schedel der vogels". 902.

ANTHRACOSE der longen (Over het ontstaan van de). 623.

ANTIMONIET (Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen). 724.

ANTISTREPTOCOCCENSERUM (Over de Amboceptoren van een). 285.

ATAXIA (On congenital) in a cat. 455. Verslag hierover. 569.

BADEN (Over het verkrijgen van) van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof. 2. 109.

BAKHUIS ROOZEBOOM (H. W.). Driephasenlijnen bij chloralalcoholaat en zoutzuuraniline. 58.

— Het gedrag der halogenen tegenover elkander. 334.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt". 345.

— Bericht van overlijden. 681.

BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE).

BALLONTOCHTEN (De astronomische straalbreking volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit) afgeleid. 587.

BATAVIA (Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te). 250.

BELGIË (Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en). 798.
BEMMELEN (J. M. VAN). Verslag over eene verhandeling van den Heer H. G. JONKER. 364.
— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.
BEMMELEN (W. VAN). Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia. 250.
BERTHELOT (M.). Bericht van overlijden. 766.
BEIJERINCK (M. W.). Melkzuurgisting in melk. 883.
BINAIR MENGSEL (Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een). 732.
— (De gedaante der empirische isotherme bij de condensatie van een). 847.
— (Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een) van normale stoffen gering is. 939.
BINAIRE MENGSELS (Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij). 507.
— (Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij). 514. Vervolg. 655.
— (Isothermen van tweeatomige gassen en hunne). VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C en — 217° C. 517.
— (Eene opmerking over de theorie van het ψ-vlak voor). 540.
— (Bijdrage tot de theorie der). 686. II. 823. III. 915.
— van normale stoffen (Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij). 227.
BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Mededeeling van de bekrachtiging door H. M. de Koningin van de benoeming der Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en F. A. H. SCHREINEMAKERS tot gewone leden en van de Heeren Th. VALETON en S. H. KOORDERS tot correspondenten. 1.
— Verzoek een onderzoek in te stellen of er voor de beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum andere regels behooren gesteld te worden dan in de jaren 1887 en 1888. 48. Rapport hierover. 313.
— Verzoek om bericht over een schrijven van den Belgischen Gezant, waarbij de Regeering uitgenoodigd wordt zich te doen vertegenwoordigen op een congres voor poolonderzoek te Brussel te houden. 172.
— Verzoek om bericht of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is, dat het douane-onderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende, vermeden worde. 172. Verslag. 178.
— Verzoek om nader advies omtrent een schrijven van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam betreffende de inrichting van de localiteiten voor de instelling van hersenonderzoek. 172. Concept-antwoord. 178.
— Verzoek om advies omtrent eene doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's Rijksmuseum. 173. Verslag hierover. 865.
— Bericht dat aan den Heer PH. VAN HARREVELD JR. te Groningen een rijkstoelage verleend is om met de inkomsten uit het Buitenzorg-fonds te dienen voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg. 312.
— Bericht dat de Minister van Financiën geene aanleiding kan vinden tot het sluiten van eene internationale overeenkomst betreffende de douanebehandeling van luchtscheepvaartkundige instrumenten. 766.

BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Bericht dat de benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot Voorzitter en D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter door H. M. de Koningin is bekrachtigd. 864.

— Bericht dat een extra-subsidie van f 250 is verleend tot bestrijding der kosten voor het zenden van een afgevaardigde naar Zweden bij gelegenheid van de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van CAROL. LINNAEUS. 864.

— Verzoek om bericht en raad over eene vertegenwoordiging der Regeering op een congres voor poolonderzoek. 864.

BLANKSMA (J. J.). Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen. 276.

BLIKSEMAFLEIDERS op het Rijksmuseum (Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek een onderzoek in te stellen of er voor de beproeving der) andere regels behooren gesteld te worden dan in de jaren 1887 en 1888. 48. Verslag hierover. 313.

BLOEDLICHAAMPJES (Het ontstaan van roode) in de placenta van de vliegende maki (Galeopithecus). 793.

BLOEM (Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de) op het openspringen der helmknoppen. 278.

BOEKE (J.). Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei. 607.

— Over den bouw van de gangliëncellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum. 1ste Mededeeling. 952.

BOEKGESCHENKEN (Aanbieding van). 45. 169. 310. 360. 455. 564. 678. 860. 953.

BÖESEKEN (J.) Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus. 599.

BOLDINGH (J) — Bericht van administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds waarbij zij hunne goedkeuring hechten aan het voorstel der Afdeeling om de beschikbare *f* 600 aan te wenden ten behoeve van den Heer — te Utrecht voor de bewerking der flora van de eilanden St. Eustatius, Saba en St. Martin. 173.

BOLK (L). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. J. P. VAN DEN BROEK: „Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren". 335.

— Verslag over een schrijven van den Heer E. C. VAN LEERSUM. 465.

BOLTZMANN (LUDWIG). Bericht van overlijden. 173.

BRAAK (C.) en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer. 310. 349. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer van constant volume op de absolute schaal. 540. 668.

— Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C. 517.

BRANCHIOSTOMA LANCEOLATUM (Over den bouw van de gangliëncellen in het centraal zenuwstelsel van). 952.

BRESK (Over α- en β- amyrine uit). 388.

BREST ER jr. (A.). Aanbieding eener verhandeling: „Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables". 763. Verslag hierover. 868.

BROEK (A. J. P. VAN DEN). Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren. 335.

BROUWER (L. E. J.). Meerdimensionale vectordistributies. 14.
— Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten. 75.
— Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten. 293.
BRUIJN (H. E. DE). Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.
— Verslag in zake de ventileering der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.
BUIDELDIEREN (Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij). 335.
BUITENZORG-FONDS (Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat aan den Heer PH. VAN HARREVELD JR. te Groningen een rijkstoelage verleend is om met de inkomsten uit het) te dienen voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg. 312.
— Verslag van de onderzoekingen van den Heer A. PULLE gedurende zijn verblijf aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg verricht. 467.
BUNDELS (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie). 1e Gedeelte. 412. 2e Gedeelte. Toepassing op bundels van kegelsneden. 474.
— (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$) van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen. 633.
BURCK (W.). Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen. 278.
CARDINAAL (J.). Verslag over eene verhandeling van den Heer F. SCHUH. 871.
CASCADEPROCES (Bereiding van vloeibare lucht met het). 130.
CAT (On congenital ataxia in a). 455. Verslag hierover. 569.
CHLORALALCOHOLAAT en zoutzuuraniline (Driephasenlijnen bij). 58.
CHOLESTERINE (Over de vetzure esters van het) en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistoffasen der Cholesteryl-derivaten. 2.
CHOLESTERYL-DERIVATEN (Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistoffasen der). 2.
CLAY (J.) en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen $+16^0$ en -182^0. 151. XI Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den waterstofthermometer. 160. XII. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer. 166.
COHEN (N. H.). Over het lupeol. 383.
— Over α- en β-amyrine uit bresk. 388.
CONDENSATIE van een binair mengsel (De gedaante der empirische isotherme bij de). 847.
CONGRES (7de Internationaal Zoölogisch). Uitnoodiging tot het zenden van een afgevaardigde. 566.
CONGRES voor poolonderzoek (Verzoek van het Congrès international pour l'étude des régions polaires om een vertegenwoordiger te zenden naar het). 48.
— (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht over een schrijven van den Belgischen gezant, waarbij de Regeering uitgenoodigd wordt zich te doen vertegenwoordigen op het) te Brussel te houden. 172.

COUTURAT (L.) — Schrijven van den Heer — waarbij medegedeeld werd dat verzocht was de kwestie van een internationale taal op de agenda der Internationale Associatie der Akademiën te plaatsen. 566.

CROMMELIN (C. A.) en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. XI. Vergelijking van een thermoelement constantaan staal met den waterstofthermometer. 133. Naschrift. 348. 365.

CRYOGEEN LABORATORIUM (Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het). X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof. 2. 109. XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus. 124. XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°. 126. XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het cascadeproces. 130. XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere. 132.

CRYOSTAAT in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°. 126.

CYCLISCH PUNT (Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een) eener ruimtekromme. 342.

DALHUISEN (A. F. H.), W. E. RINGER en C. H. WIND. Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee (1ste Mededeeling). 616.

DELFSTOFFEN (Verzoek van den Ingenieur-Directeur der Rijksopsporing van) om in nadere aanraking te komen met de Geologische Commissie. 48.

Dierkunde. Mededeeling van den Heer F. MULLER: „De placentatie van Sciurus vulgaris". 236.

— Mededeeling van den Heer MAX WEBER: „De vischfauna van Nieuw-Guinea". 368.

— Mededeeling van den Heer J. BOEKE: „Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei". 607.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer HANS STRAHL: „Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L.". 763. Verslag hierover. 766.

— Mededeeling van den Heer A. A. W. HUBRECHT: „Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de placenta van de vliegende maki (Galeopithecus)". 793.

— Mededeeling van den Heer J. BOEKE: „Over den bouw van de gangliëncellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum". 1ste Mededeeling. 952.

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire), tweede orde. 410.

DIHYDROCHOLESTERINE (Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren Ester van het), en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen. 721.

DINITROBENZOËZUREN (Over de zes isomere). 264.

DISPERSIEBANDEN (Willekeurige lichtverdeeling in). 317.

DOOIEROMGROEIING bij teleostei (Gastrulatie en). 607.

DORSSEN (W. VAN) en P. VAN ROMBURGH. Over eenige derivaten van het 1-3-5 hexatriëen. 54.

DRIEPHASENLIJN vast-vloeibaar-gasvormig (Over den vorm der) bij een binair mengsel. 732.

DRIEPHASENLIJNEN bij chloralalcoholaat en zoutzuuranıline. 58.

EMISSIE- en absorptiemaxima (Golflengten van vroeger gevonden) in het ultra-roode spectrum. 811.

ERINACEUS EUROPAEUS L. (Der Uterus puerperalis von). 763. Verslag hierover. 766.
ERRATUM. 169. 361. 456. 564. 678. 764. 861. 953.
ERTSGANGEN in de provincie Limburg. 767.
ESTER (Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren) van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen. 721.
ESTERS (Over de vetzure) van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistoffasen der Cholesteryl-derivaten. 2.
ETHAAN en stikstofoxydule (Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van). 517. 659.
ETOILES ROUGES VARIABLES (Essai d'une Explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les). 763. Verslag hierover. 868.
EVENWICHT van krachten- en rotatiesystemen in R_4. 818.
EVENWICHTEN vast-fluïde (Over metastabiele en labiele). 742.
EYSBBOEK (H.). Over de Amboceptoren van een Antistreptococcenserum. 285.
FABIUS (G. H.) en H. KAMERLINGH ONNES. Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand. 952.
FASE-OVERGANGEN (Over irreversibele) bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen. 401.
FORMULES (Eenige) aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n. 423.
FOSSILFLORA (The) of Tegelen- sur-Meuse, near Venloo, in the province of Limburg. 953.
FRANCHIMONT (A. P. N.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: "Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vlocistoffasen der Cholesterylderivaten". 2.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: "Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen". 389.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: "Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen". 401.
— Bijdrage tot de kennis der werking van reëel salpeterzuur op heterocyclische verbindingen. 647.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: "Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen". 721.
FRANKLIN (BENJAMIN) — Dankzegging van de American philosophical Society te Philadelphia voor ontvangen bewijzen van waardeering bij de herdenking van den 200sten geboortedag van —. 2.
— (Toezending eener medaille ter herinnering aan den 200sten geboortedag van). 173.
GALEOPITHECUS (Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de placenta van de vliegende maki). 793.
GANGLIENCELLEN (Over den bouw van de) in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum. 1ste Mededeeling. 952.
GAS (Een), dat in eene vloeistof zinkt. 454.

GASPHASE (Over het zinken der) in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507.
— (Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de) in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655.
GASSEN (Isothermen van tweeatomige) en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C en — 217° C. 517.
— (Beperkte mengbaarheid van twee). 754. Vervolg. 851.
GASTRULATIE en dooieromgroeiing bij teleosteï. 607.
GELEIDERS (Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde). 1ste Mededeeling. 27.
GELEIDINGSVERMOGEN (Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch) van gekristalliseerde geleiders. 1ste Mededeeling. 27.
— (Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch) van den Japanschen antimoniet. 724.
GEOLOGIE van Nederland (Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de) (1734—1906). 360. Verslag hierover. 364.
GEOLOGISCHE COMMISSIE (Missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid waarbij bericht wordt dat er geene termen bestaan om aan het verzoek der) te voldoen. 48. Antwoord der Commissie. 312.
— (Verzoek van den Ingenieur-Directeur der Rijksopsporing van Delfstoffen om in nadere aanraking te komen met de). 48.
— (Missive van den Minister van Waterstaat, waarbij bericht wordt dat de subsidie ten behoeve van de) voortaan zal luiden: „bijdrage aan de K. A. v. W. in de kosten van geologische onderzoekingen. 458.
— (Jaarverslag der) over het jaar 1906. 566.
— Bericht van den Minister van Waterstaat dat op de betaling voor het subsidie orde gesteld is. 766.
Geophysica. Mededeeling van de Heeren C. H. WIND, A. F. H. DALHUISEN en W. E. RINGER: „Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee". 1ste Mededeeling. 616.
GESLACHTSGANGEN (Over de verhouding der) tot de geslachtsklier bij buideldieren. 335.
GETALLEN kleiner dan n (Eenige formules aangaande de) en ondeelbaar met n. 423.
GEVALLEN (Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche). 246.
GLYCERYLTRIFORMIAAT (Over). 51.
GOLFLENGTEN van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultra-roode spectrum. 811.
Graadmeting. Kort verslag van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN over het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering van de Internationale graadmetingscommissie. 335.
GROOTHEID II (Nog iets over de) en de Maxwell'sche snelheidsverdeeling. 498.
HAGA (H.). Over de polarisatie van Röntgenstralen. 64.
— Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is, dat het douaneonderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende, vermeden worde. 178.

HAGA (H.). Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam. 313.

HALOGENEN (Het gedrag der) tegenover elkander. 334.

HANDSCHRIFTEN (Bericht van de Keiz. Akademie van Wetenschappen te Weenen omtrent de internationale uitleening van). 865.

HARREVELD JR. (PH. VAN) — Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat aan den Heer — te Groningen een rijkstoelage verleend is voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg. 312.

HARTEL (W. RITTER VON). Bericht van overlijden. 566.

HARTSWERKING (Over de quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en). 555.
— (Bijdrage tot de kennis van zenuwinvloed op de). 1ste Mededeeling. Genese van den pulsus alternans. 905.

HEEN (DE) (Herhaling van de proeven van) en TEICHNER omtrent den kritischen toestand. 952.

HELMKNOPPEN (Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der). 278.

HERSENONDERZOEK (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om advies omtrent een schrijven van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam betreffende de inrichting van de localiteiten voor de instelling van). 172. Conceptantwoord. 178.

HEXATRIËEN (Over eenige derivaten van het 1-3-5). 54.

HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Nitratie van metagesubstitueerde phenolen". 276.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BÖESEKEN: „Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus". 599.
— en J. HUISINGA. Over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur. 270.
— en H. A. SIRKS. Over de zes isomere dinitrobenzoëzuren. 264.
— en G. L. VOERMAN. Het α- en het β-thiopheenzuur. 545.

HOOGEWERFF (S.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide". 262.

HOLMES (Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet) en over de storingen in haar elliptische beweging. IV. 372.

HORLOGEMAKERS (Circulaire van den Nederlandschen Bond van) over „Eenheid van Schroefdraad". 312.

HUBRECHT (A. A. W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. MULLER: „De placentatie van Sciurus vulgaris". 236.
— benoemd tot afgevaardigde naar het 7de Internationaal Zoölogisch Congres. 566.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BOEKE: „Gastrulatie en dooieromgroeiing bij teleostei". 607.
— Verslag over eene verhandeling van den Heer HANS STRAHL. 766.
— Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de placenta van de vliegende maki (Galeopithecus). 793.

HUISINGA (J.) en A. F. HOLLEMAN. Over de nitratie van phtaalzuur en isopthaalzuur. 270.

HUNDERTZWANZIGZELLES (Regelmässige Schnitte und Projektionen des) und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume. 360.

ISOPHTAALZUUR (Over de nitratie van phtaalzuur en). 270.

ISOTHERME (De gedaante der empirische) bij de condensatie van een binair mengsel. 847.

ISOTHERMEN van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C en — 217° C. 517.

ISOTROPE smelt (Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de). 345.

JAEGER (F. M.). Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistoffasen der Cholesteryl-derivaten. 2.

— Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders. 1ste Mededeeling. 27.

— Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt. 345.

— Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen. 389.

— Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen. 401.

— Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen. 721.

— Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet. 724.

JAVA (Botanische Untersuchungen über einige in) vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten. 952.

JENAGLAS (Uitzettingscoëfficiënt van) en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151.

JOLLES (Mej. T. C.) en H. KAMERLINGH ONNES. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659.

JONKER (H. G.). Aanbieding eener verhandeling: „Lijst van geschriften, welke handelen over of van belang zijn voor de geologie van Nederland" (1734—1906). 360. Verslag hierover. 364.

JULIUS (W. H). Het voortbrengen van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen. 211.

— Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam. 313.

— Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied. 317.

— Aanbieding cener mededeeling van den Heer W. J. H. MOLL: „Onderzoek van eenige ultra- roode metaalspectra". 469.

— Golflengten van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultraroode spectrum. 811.

— Verslag in zake de ventilatie der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer A. BREMER JR. 868.

JUPITER (Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van) in 1908. 179. 2de Afdeeling. 439. Naschrift 316. 468.

KALIUMHYPOCHLORIET (Inwerking van) op kaneelzuuramide. 262.

KAMERLINGH ONNES (H.). Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het Cryogeen Laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof. 2. 109. XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus. 124. XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°. 126. XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het cascadeproces. 130. XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere. 132.

— Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is, dat het douaneonderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende vermeden worde. 178.

— Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XI. Een gas, dat in eene vloeistof zinkt. 454.

— en C. BRAAK. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer. 310. 349. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer op de absolute schaal. 540. 668.

— Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C en — 217° C. 517.

— en J. CLAY. Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151. XI. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den waterstofthermometer. 160. XII. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer. 166.

— en C. A. CROMMELIN. Over het meten van zeer lage temperaturen. IX Vergelijking van een thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer. 133. Naschrift. 348. 365.

— en G. H. FABIUS. Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand. 952.

— en Mej. T. C. JOLLES. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659.

— en W. H. KEESOM. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 754. Vervolg. 851.

KANEELZUURAMIDE (Inwerking van kaliumhypochloriet op). 262.

KAPTEYN (J. C.). Verslag over eene verhandeling van den Heer A. BREMER jr. 868.

KAPTEYN (W.). Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde. 410.

KEERPUNTEN (Over de meetkundige plaats der) van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke krommen met zes basispunten. 570.

KEESOM (W. H.). Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655.

KEESOM (W. H.) en H. KAMERLINGH ONNES. Bijdragen tot de kennis van het ψ vlak van VAN DER WAALS. XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 754. Vervolg. 851.

KLEINHERSENVERBINDINGEN (Anatomisch onderzoek omtrent). 3de Mededeeling. 859. 879.

KLUIJVER (J. C.). Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n. 423.

KOHNSTAMM (PH.). Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een binair mengsel. 732.

— Over metastabiele en labiele evenwichten vast-fluide. 742.

KOMEET HOLMES (Onderzoekingen over de baan van de periodische) en over de storingen in haar elliptische beweging. IV. 372.

KOORDEN (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke) der krommen van drie bundels. 1e Gedeelte. 412. 2de Gedeelte. Toepassing op bundels van kegelsneden. 474.

KOORDERS (S. H.). Bekrachtiging zijner benoeming tot Correspondent. 1.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 172.

— Aanbieding eener verhandeling: „Botanische Untersuchungen ueber einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten". 952.

KORTEWEG (D. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Meerdimensionale vectordistributies". 14.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische negatief gekromde ruimten". 75.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische positief gekromde ruimten". 293.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter. 864.

KORTHALS-FONDS (P. W.) — Missive van administrateuren van het — waarbij bericht wordt dat dit jaar weder *f* 600 beschikbaar wordt gesteld tot bevordering der kruidkunde. 48.

— (Bericht van administrateuren van het) waarbij zij hunne goedkeuring hechten aan het voorstel der Afdeeling om de dit jaar beschikbare *f* 600 aan te wenden ten behoeve van den Heer J. BOLDINGH, te Utrecht, voor de bewerking der flora van de eilanden St. Eustatius, Saba en St. Martin. 173.

KRACHTEN- en rotatiesystemen in R_4 (Evenwicht van). 818.

KRACHTVELD (Het) der niet-Euclidische negatief gekromde ruimten. 75.

— (Het) der niet-Euclidische positief gekromde ruimten. 293.

Kristallografie. Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistoffasen der Cholesteryl-derivaten". 2.

KRITISCHEN TOESTAND (Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den). 952.

KROMMEN (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der) van drie bundels. 1e Gedeelte. 412. 2de Gedeelte. Toepassing op bundels van kegelsneden. 474.

— (Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke) met zes basispunten. 570.

Kruidkunde (Missive van administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds waarbij bericht wordt dat dit jaar weder een som van *f* 600 zal worden beschikbaar gesteld tot bevordering der). 48.

KUENEN's proeven (Grafische afleiding der uitkomsten van) over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659.

LAAR (J. J. VAN). Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi. 227.

— Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is. 939.

LANGELAAN (J. W.). Aanbieding eener verhandeling: „On congenital ataxia in a cat". 455. Verslag hierover. 569.

LEERSUM (E. C. VAN). Bericht betreffende een tentoonstelling van voorwerpen betrekking hebbende op de geschiedenis der natuur- en geneeskundige wetenschappen. 313. Verslag hierover. 465.

LELY (C.). Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.

— Stroomsnelheden in een open Panamakanaal. 767.

LENGTEPLOOI (DE) — Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. 227.

LICHTKRACHT (D evan sterren van verschillend spectraaltype. 94.

LICHTSTRALING (Over den invloed welke) heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet. 724.

LICHTVERDEELING (Het voortbrengen van iedere gewenschte) in de omgeving van absorptielijnen. 211.

— (Willekeurige) in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied. 317.

LIMBURG (Ertsgangen in de provincie). 767.

LINNAEUS (CAR.) — Uitnoodiging van de Universiteit te Upsala, voor vertegenwoordiging bij de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van —. 680. Concept gelukwensch. 859.

— (Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat een extra-subsidie van *f* 250.— is verleend tot bestrijding der kosten voor het zenden van een afgevaardigde naar Zweden bij gelegenheid van de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van). 864.

— (Uitnoodiging van de New-York Academy of Sciences tot het zenden van een officieel document ter waardeering van het werk van). 864.

LONDEN (Uitnoodiging van de Geologieal Soeiety te) tot het zenden van een vertegenwoordiger bij gelegenheid van het 100-jarig bestaan. 864. De Heer G. A. F. MOLENGRAAFF daartoe benoemd. 864.

LONGEN (Over het ontstaan van de anthracose der). 623.

LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Onderzoekingen over het thermiseh en elektriseh geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders". 1ste Mededeeling. 27.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi". 227.

— Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam. 313.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer O. POSTMA: „Nog iets over de grootheid H en de Maxwell'sehe snelheidsverdeeling". 498.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. H. MEERBURG: „Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijs". 638.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleeulen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is". 939.

LUCHT (Bereiding van vloeibare lueht met het easeadeproces). 130.

LUCHTSCHEEPVAART (Verzoek om bericht van den Minister van Binnenlandsehe Zaken of er wetensehappelijke inriehtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is, dat het douaneonderzoek voor voorwerpen op de) betrekking hebbende, vermeden worde. 172. Verslag hierover. 178.

— (Berieht dat de Minister van Finaneiën geene aanleiding kan vinden tot het sluiten van eene internationale overeenkomst betreffende de douanebehandeling van instrumenten voor de). 766.

LUPEOL (Over het). 383.

MAC GILLAVRY (TH.). Verslag inzake de ventilatie der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.

MAGNETISCHE STORINGEN (Over) volgens hunne opteekening te Batavia. 250.

MAKI (Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de plaeenta van de vliegende). 793.

MARTIN (K.). Verslag over eene verhandeling van den Heer H. G. JONKER. 364.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.

MAURENBRECHER (A. D.) en P. VAN ROMBURGH. Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen op s. trinitrophenyl-methylnitramine. 730.

MAXWELL'sehe snelheidsverdeeling (Nog iets over de grootheid H en de). 498.

MEERBURG (J. H.). Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijs. 638.

MELKZUURGISTING in melk. 883.

MENGSELS (Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire) van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi. 227.

— (Grafisehe afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over) van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659.

METAALDRAAD (Over de beweging van een) door een stuk ijs. 638.

METAALSPECTRA (Onderzoek van eenige ultra-roode). 469.

METEN van zeer lage temperaturen (Over het). IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer. 133. Naschrift. 318. 365. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151. XI. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den waterstof-thermometer. 160. XII. Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den goud-weerstandsthermometer. 166. XIII. Bepalingen met den waterstof-thermometer. 310. 349. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstof-thermometer op de absolute schaal. 540. 668.

Meteorologie. Mededeeling van den Heer W. VAN BEMMELEN: „Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia". 250.

— Mededeeling van den Heer J. P. VAN DER STOK: „Over de bewerking van wind-waarnemingen". 704.

METHODE der ware en valsche gevallen (Eenige opmerkingen naar aanleiding van de). 246

METHODEN en hulpmiddelen in gebruik bij het Cryogeen Laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van staudvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof. 2. 109. XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus. 124. XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°. 126. XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het cascadeproces. 130. XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere. 132.

Mikrobiologie. Mededeeling van den Heer M. W. BEIJERINCK: „Melkzuurgisting in melk". 883.

MINISTER van Binnenlandsche Zaken. Zie BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van).

— van Waterstaat, Handel en Nijverheid. Zie WATERSTAAT, HANDEL EN NIJVERHEID (Minister van).

MOGENDORFF (E. E.). Over eene nieuwe empirische spectraalformule. 429.

MOISSAN (HENRI). Bericht van overlijden. 766.

MOLENGRAAFF (G. A. F.). Bekrachtiging zijner benoeming tot gewoon lid. 1.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer H. G. JONKER. 364.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1906. 566.

— benoemd tot vertegenwoordiger der Akademie bij het 100-jarig bestaan der Geological Society te Londen. 864.

MOLL (J. W.). Aanbieding eener mededeeling van Mevr. M. NIEUWENHUIS-VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND: „De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten". 69.

— benoemd tot afgevaardigde bij de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van CARL. LINNAEUS. 864.

MOLL (W. J. H.). Onderzoek van eenige ultra-roode metaalspectra. 469.

MONACO (Circulaire van het Musée Océanographique te) om adhaesie te betuigen voor een bij een te roepen Congrès international d'Océanographie. 2. Verslag hierover. 49.

MULLER (F.). De placentatie van Sciurus vulgaris. 236.

MUSKENS (L. J. J.). Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen. 3de Mededeeling. 859. 879.

MUSKENS (L. J. J.). Bijdrage tot de kennis van zenuwinvloed op de hartswerking. 1ste Mededeeling. Genese van den pulsus alternans. 905.

MYRMECOPHIELE PLANTEN (De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige). 69.

Natuurkunde. Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het Cryogeen Laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof". 2. 109. XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus. 124. XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°. 126. XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het cascadeproces. 130. XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere". 132.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders". 1ste Mededeeling. 27.

— Mededeeling van den Heer H. HAGA: „Over de polarisatie van Röntgenstralen". 64.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer". 133. Naschrift. 348. 365.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151. XI. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den waterstofthermometer. 160. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer". 166.

— Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „Het voortbrengen van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen". 211.

— Mededeeling van den Heer J. P. VAN DER STOK over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September 1906". 211.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer. 310. 349. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer op de absolute schaal". 540. 668.

— Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam. 313.

— Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied". 317.

— Mededeeling van den Heer E. E. MOGENDORFF: „Over eene nieuwe empirische spectraalformule". 429.

— Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XI. Een gas, dat in een vloeistof zinkt". 454.

— Mededeeling van den Heer W. J. H. MOLL: „Onderzoek van eenige ultra-roode metaalspectra". 469.

— Mededeeling van den Heer O. POSTMA: „Nog iets over de grootheid H en de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling". 498.

Natuurkunde. Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507. XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 754. Vervolg. 851.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C". 517.

— Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „Eene opmerking over de theorie van het ψ-vlak voor binaire mengsels". 540.

— Mededeeling van den Heer J. H. MEERBURG: „Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijs." 638.

— Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". 686. II. 823. III. 915.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet". 724.

— Mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een binair mengsel". 732.

— Mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde". 742.

— Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „Golflengten van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultra-roode spectrum". 811.

— Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „De gedaante der empirische isotherme bij de condensatie van een binair mengsel". 847.

— Mededeeling van den Heer C. H. WIND: „Een hypothese aangaande den oorsprong der RÖNTGEN-stralen". 855.

— Verslag inzake de ventilatie der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en G. H. FABIUS: „Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand". 952.

NECTARIËN (Over den invloed der) en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen. 278.

NEPER (De regel van) in de ruimte van vier afmetingen. 492.

NIEUW-GUINEA (De vischfauna van). 368.

NIEUWENHUIS-VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND (Mevr. M.). De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten. 69.

NIEUWENHUIJSE (P.). Over het ontstaan van de anthracose der longen. 623

NITRATIE (Over de) van phtaalzuur en isophtaalzuur. 270.

— van meta-gesubstitueerde phenolen. 276.

NOORDZEE (Stroommetingen op verschillende diepten in de). 1ste Mededeeling. 616.

OCÉANOGRAPHIE (Verzoek van den Directeur van het Musée océanographique te Monaco, om adhaesie te betuigen voor een bij een te roepen Congrès international d'). 2. Verslag hierover. 49.

OMWENTELINGSCOMPLEXEN (Quadratische). 211.

ONNES (H. KAMERLINGH). Zie KAMERLINGH ONNES (H.).

OPPERVLAKKENBUNDELS (Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier). 481.

OSS (S. L. VAN). Evenwicht van krachten- en rotatiesystemen in R_4. 818.

OUDEMANS (C. A. J. A.). Bericht van overlijden. 174.

OUDEMANS (J. A. C.). Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908. 179. 2de Afdeeling. 316. 439. Naschrift. 468.

— Bericht van overlijden. 459.

Palaeontologie. Aanbieding eener verhandeling van den Heer CLEMENT REID en Mrs. ELEANOR M. REID: „The fossilflora of Tegelen-sur-Meuse, near Venloo, in the province of Limburg". 953.

PANAMAKANAAL (Stroomsnelheden in een open). 767.

PANNEKOEK (A.). De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype. 94.

— De samenhang van spectrum en kleur der sterren. 216.

Pathologie. Mededeeling van den Heer H. EYSBROEK: „Over de Amboceptoren van een Antistreptococcenserum". 285.

PÉRIODICITÉ (Essai d'une explication du mécanisme de la) dans le soleil et les étoiles rouges variables. 763. Verslag hierover. 868.

PHASEN (Over een vierkomponenten stelsel met twee vloeibare). 580.

PHENOLEN (Nitratie van meta-gesubstitueerde). 276.

PHILADELPHIA (American philosophical Society te). Dankzegging voor ontvangen bewijzen van waardeering bij de herdenking van den 200sten geboortedag van BENJAMIN FRANKLIN. 2.

— Toezending eener medaille ter herinnering aan den 200sten geboortedag van BENJAMIN FRANKLIN. 173.

PHOSPHORUS (Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode). 599.

PHTAALZUUR en isophtaalzuur (Over de nitratie van). 270.

Physiologie. Mededeeling van den Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen". 246.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „On congenital ataxia in a cat". 455. Verslag hierover. 569.

— Mededeeling van den Heer H. ZWAARDEMAKER: „Over de quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en hartswerking, naar aanleiding van onderzoekingen van den Heer P. WOLTERSON". 555.

— Mededeeling van den Heer P. NIEUWENHUYSE: „Over het ontstaan van de anthracose der longen". 623.

— Mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Bijdrage tot de kennis van zenuwinvloed op de hartswerking. 1ste Mededeeling. Genese van den pulsus alternans". 905.

PHYTOSTERINE (Over de vetzure esters van het Cholesterine en het), en over de anisotrope vloeistoffasen der Cholesteryl-derivaten. 2.

PILZE (Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende), besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten. 952.

PLACE (T.). Verslag over eene verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN. 569.

PLACENTA (Het ontstaan van roode bloedlichaampjes in de) van de vliegende maki (Galeopithecus). 793.

PLACENTATIE (De) van Sciurus vulgaris. 236.

Plantenkunde. Mededeeling van Mevr. M. NIEUWENHUIS-VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND: „De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten". 69.

— Mededeeling van den Heer W. BURCK: „Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen". 278.

— Verslag van de onderzoekingen van den Heer A. PULLE gedurende zijn verblijf aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg verricht. 467.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten". 952.

PLATINA (Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van) tusschen + 16° en — 182°. 151.

PLOOIPUNTSLIJN (Over het verloop der) en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is. 939.

PLOOIPUNTSLIJNEN (Over het verloop der spinodale en) bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi. 227.

PLÜCKERSCHE EQUIVALENTEN (Tweede mededeeling over de) van een cyclisch punt eener ruimtekromme. 342.

POLARISATIE van Röntgenstralen (Over de) 64.

POOLONDERZOEK (Verzoek van het Congrès international pour l' étude des régions polaires aan de Akademie om zich op dat congres te doen vertegenwoordigen). 48.

— De Heer VAN DER STOK verklaart zich daartoe bereid. 172.

— Mededeeling van den Heer J P. VAN DER STOK over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September 1906. 211.

— (Verzoek om bericht en raad van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende de vertegenwoordiging der Nederlandsche Regeering op een congres voor). 864.

POSTMA (O.). Nog iets over de grootheid H en de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling. 498.

PULLE (A.). Verslag van de onderzoekingen gedurende zijn verblijf aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg verricht. 467.

PULSUS ALTERNANS (Genese van den). 905.

PUNTEN in het platte vlak (Over de meetkundige plaats der), waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen. 860. Verslag hierover. 871.

PUNTENPAREN (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke) en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels. 1e Gedeelte. 412. 2de Gedeelte. Toepassing op bundels van kegelsneden. 474.

— (Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke) van vier oppervlakkenbundels. 481.

— (Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke) van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen. 633.

REACTIES (Over katalytische) naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus. 599.

REID (CLEMENT) en Mrs. ELEANOR M. REID. Aanbieding eener verhandeling: „The fossilflora of Tegelen-sur-Meuse, near Venloo, in de province of Limburg." 953.

RINGER (W. E.), C. H. WIND en A. T. H. DALHUISEN. Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee. 1ste Mededeeling. 616.

ROMBURGH (P. VAN). Over glyceryltriformiaat. 51.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. H. COHEN: „Over het lupeol". 383.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. H. COHEN: „Over α- en β-amyrine uit bresk". 388.

— en W. VAN DORSSEN. Over eenige derivaten van het 1-3-5-hexatriëen. 54.

— en A. D. MAURENBRECHER. Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen, op s. trinitrophenyl-methylnitramine. 730.

ROMPMYOTOOM (Over den invloed der vinnen op den vorm van het). 859. 874.

RÖNTGENSTRALEN (Over de polarisatie van). 64.

— (Een hypothese aangaande den oorsprong der). 855.

ROOZEBOOM (H. W. BAKHUIS). Zie BAKHUIS ROOZEBOOM (H. W.).

ROTATIESYSTEMEN in R_4 (Evenwicht van krachten- en). 818.

RUIMTE van vier afmetingen (De regel van NEPER in de). 492.

RUIMTEKROMME (Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener). 342.

RUIMTEN (Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde). 75.

— (Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde). 293.

— van drie en meer afmetingen (Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de). 860. Verslag hierover. 871.

RUTTEN (L.). Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en België. 798.

RIJKSMUSEUM (Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek een onderzoek in te stellen of er voor de beproeving der bliksemafleiders op het) andere regels behooren gesteld te worden dan in de jaren 1887 en 1888 zijn aangegeven. 48. Rapport hierover. 313.

— (Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent eene doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's). 173. Verslag hierover. 865.

SALPETERZUUR (Bijdrage tot de kennis der werking van reëel) op heterocyclische verbindingen. 647.

SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. STEIN: „Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te Tortosa (Spanje)". 37.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype". 94.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „De samenhang van spectrum en kleur der sterren". 216.

— Kort Verslag van het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering van de Internationale Graadmetingscommissie. 335.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. J. ZWIERS: „Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische beweging". IV. 372.

— De astronomische straalbreking volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit ballontochten afgeleid. 587.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter. 864.

SCHEDEL DER VOGELS (Over het voorkomen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den). 902.

Scheikunde. Mededeeling van den Heer P. VAN ROMBURGH: „Over glyceryltriformiaat". 51.

— Mededeeling van de Heeren P. VAN ROMBURGH en W. VAN DORSSEN: „Over eenige derivaten van het 1-3-5 hexatriëen". 54.

— Mededeeling van den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Driephasenlijnen bij chloralalcoholaat en zoutzuuraniline". 58.

— Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi". 227.

— Mededeeling van den Heer R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide". 262.

— Mededeeling van de Heeren A. F. HOLLEMAN en H. A. SIRKS: „Over de zes isomere dinitrobenzoëzuren". 264.

— Mededeeling van de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. HUISINGA: „Over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur". 270.

— Mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen". 276.

— Mededeeling van den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Het gedrag der halogenen tegenover elkander". 334.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt". 345.

— Mededeeling van den Heer N. H. COHEN: „Over het lupeol". 383.

— Mededeeling van den Heer N. H. COHEN: „Over α- en β-amyrine uit bresk". 388.

Scheikunde. Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen". 389.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen". 401.

— Mededeeling van de Heeren A. F. HOLLEMAN en G. L. VOERMAN: „Het α- en het β-thiopheenzuur". 545.

— Mededeeling van den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Over een vierkomponenten stelsel met twee vloeibare phasen". 580.

— Mededeeling van den Heer J. BOËSEKEN: „Over katalytische reacties naar aanleiding van de omzetting van gewone in roode phosphorus". 599.

— Mededeeling van den Heer A. P. N. FRANCHIMONT: „Bijdrage tot de kennis der werking van reëel salpeterzuur op heterocyclische verbindingen". 647.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de anisotrope vloeistoffasen van den boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen". 721.

— Mededeeling van de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. D. MAURENBRECHER: „Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen op s. trinitrophenyl-methylnitramine". 730.

— Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der plooipuntslijn en der spinodale lijnen, ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is". 939.

SCHOUTE (P. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. A. VERSLUYS: „Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme". 342.

— Aanbieding eener verhandeling: „Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume". 2te Abhandlung. 360.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels". 1e Gedeelte. 412. 2de Gedeelte. 474.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier oppervlakkenbundels". 481.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. A. WIJTHOFF: „De regel van NEPER in de ruimte van vier afmetingen". 492.

— Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke krommen met zes basispunten. 570.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen". 633.

Scheikunde. Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. L. VAN OSS: „Evenwicht van krachten- en rotatiesystemen in R_4". 818.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer F. SCHUH. 871.

SCHREINEMAKERS (F. A. H.). Bekrachtiging zijner benoeming tot gewoon lid. 1.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

— Over een vierkomponenten stelsel met twee vloeibare phasen. 580.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer A. BREMER jr. 868.

SCHROEFDRAAD (Circulaire van den Nederlandschen Bond van Horlogemakers over eenheid van). 312.

SCHUH (F.). Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels. 1e Gedeelte. 412. 2de Gedeelte. Toepassing op bundels van kegelsneden. 474.

— Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier oppervlakken bundels. 481.

— Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen. 633.

— Aanbieding eener verhandeling: „Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen". 860. Verslag hierover. 871.

SCIURUS VULGARIS (De placentatie van). 236.

SECHSHUNDERTZELLES (Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundert-zwanzig zelles und) im vierdimensionalen Raume. 360.

SEISMOLOGISCHEN ASSOCIATION (Circulaire van het Zentralbureau der Internationalen) waarin bericht wordt dat het Bureau te Straatsburg thans geheel voor het doen van onderzoekingen ingericht is. 48.

SIRKS (H. A.) en A. F. HOLLEMAN. Over de zes isomere dinitrobenzoëzuren. 264.

SNELHEIDSVERDEELING (Nog iets over de grootheid H en de Maxwell'sche). 498.

SOLEIL (Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le) et les étoiles rouges variables. 763. Verslag hierover. 868.

SPECTRAALFORMULE (Over eene nieuwe empirische). 429.

SPECTRAALTYPE (De lichtkracht van sterren van verschillend). 94.

SPECTRUM (De samenhang van) en kleur der sterren. 216.

— (Golflengten van vroeger gevonden emissie- en absorptiemaxima in het ultraroode). 811.

SPINODALE en plooipuntslijnen (Over het verloop der) bij binaire mengsels van normale stoffen. 4de Mededeeling. De lengteplooi. 227.

SPINODALE LIJNEN (Over het verloop der plooipuntslijn en der), ook voor het geval, dat de onderlinge aantrekking der moleculen van een der componenten van een binair mengsel van normale stoffen gering is. 939.

SPRONCK (C. H. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. EYSBROEK: „Over de Amboceptoren van een Antistreptococcenserum". 285.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. NIEUWENHUYSE: „Over het ontstaan van de anthracose der longen". 623.

STEIN (J.). Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te Tortosa (Spanje). 37.

STELSEL (Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair) van kubische vlakke krommen met zes basispunten. 570.

— (Over een vierkomponenten) met twee vloeibare phasen. 580.

Sterrekunde. Mededeeling van den Heer J. STEIN: „Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te Tortosa (Spanje)". 37.

— Mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype". 94.

— Mededeeling van den Heer J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908". 179. 2de Afdeeling. 316. 439. Naschrift. 468.

— Mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „De samenhang van spectrum en kleur der sterren". 216.

— Mededeeling van den Heer H. J. ZWIERS: „Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische beweging". IV. 372.

— Mededeeling van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „De astronomische straalbreking volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit ballontochten afgeleid". 587.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. BREMER JR.: „Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables". 763. Verslag hierover. 868.

STERREN (De samenhang van spectrum en kleur der). 216.

— van verschillend spectraaltype (De lichtkracht van). 94.

STIKSTOFOXYDULE (Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en). 517. 659.

STOFFEN (Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale). 4de Mededeeling. De lengteplooi. 227.

STOK (J. P. VAN DER). Verslag over eene circulaire van het Musée Océanographique te Monaco. 49.

— Benoemd tot afgevaardigde naar het Congrès international pour l'étude des régions polaires te Brussel. 172.

— Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is dat het douaneonderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende vermeden worde. 178.

— Mededeeling over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September 1906. 211.

— Over de bewerking van wind-waarnemingen. 704.

STORINGEN (Over magnetische) volgens hunne opteekening te Batavia. 250.

STRAALBREKING (De astronomische) volgens eene temperatuursverdeeling in den dampkring uit ballontochten afgeleid. 587.

STRAHL (HANS). Aanbieding eener verhandeling: „Der Uterus puerperalis von Erinaceus europaeus L." 763. Verslag hierover. 766.

STROOMMETINGEN op verschillende diepten in de Noordzee. 1ste Mededeeling. 616.

STROOMSNELHEDEN in een open Panamakanaal. 767.

SUIKERAFSCHEIDING (De schadelijke gevolgen der) bij eenige myrmecophiele planten. 69.

TEGELEN-SUR-MEUSE (The fossil flora of), near Venloo, in the province of Limburg. 953.

TEICHNER (Herhaling van de proeven van DE HEEN en) omtrent den kritischen toestand. 952.

TELEOSTEÏ (Gastrulatie en dooieromgroeiing bij). 607.

TEMPERATUREN (Over het meten van zeer lage). IX. Vergelijking van een thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer. 133. Naschrift. 348. 365. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151. XI. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den waterstofthermometer. 160. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer. 166. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer. 310. 349. XIV. Reductie van de aflezing van den waterstofthermometer op de absolute schaal. 540. 668.

— van — 252° tot — 259° (Cryostaat in het bijzonder voor). 126.

TEMPERATUUR (Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige) met vloeibare waterstof. 2. 109.

TEMPERATUURSVERDEELING in den dampkring (De astronomische straalbreking volgens eene) uit ballontochten afgeleid. 587.

THEORIE der binaire mengsels (Bijdrage tot de). 686. II. 823. III. 915.

— van het ψ-vlak (Eene opmerking over de) voor binaire mengsels. 540.

THERMO-ELEMENT constantaan-staal (Vergelijking van een) met den waterstofthermometer. 133. Naschrift. 348. 365.

THIOPHEENZUUR (Het α- en het β-). 545.

TORTOSA (Spanje) (Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te). 37.

TRICHECHIDEN uit Zeeland en België (Over fossiele). 798.

TRICHT (B. VAN). Over den invloed der vinnen op den vorm van het rompmyotoom. 859. 874.

TRINITROPHENYL-METHYLNITRAMINE (Over de inwerking van basen, ammoniak en aminen op s.) 730.

UITZETTINGSCOËFFICIËNT van Jenaglas en van platina tusschen + 16° en — 182°. 151.

UPSALA (Uitnoodiging van de Universiteit te) voor vertegenwoordiging bij de herdenking van den 200-jarigen geboortedag van Car. Linnaeus. 680. Concept gelukwensch. 859.

UTERUS PUERPERALIS (Der) von Erinaceus europaeus L. 763. Verslag hierover. 766.

VAGUSPRIKKELING (Over de quantitatieve betrekking tusschen) en hartswerking. 555.

VALETON (TH.). Bekrachtiging zijner benoeming tot correspondent. 1.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

VECTORDISTRIBUTIES (Meerdimensionale). 14.

VENTILEERING van 's Rijksmuseum (Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent eene doelmatige inrichting ter). 173. Verslag hierover. 865.

VERBINDINGEN (Bijdrage tot de kennis der werking van reëel salpeterzuur op heterocyclische). 647.

VERSLUYS (W. A.). Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme. 342.

VINNEN (Over den invloed der) op den vorm van het rompmyotoom. 859. 874.

VISCHFAUNA (De) van Nieuw-Guinea. 368.

VLAK (Over de meetkundige plaats der punten in het platte), waarvan de som der afstanden tot n gegeven reehten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen. 860. Verslag hierover. 871.

ψ-VLAK. (Bijdragen tot de kennis van het) van VAN DER WAALS. XI. Een gas, dat in eene vloeistof zinkt. 454. XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507. XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 754. Vervolg. 851.

— voor binaire mengsels (Eene opmerking over de theorie van het). 540.

VLOEISTOFFASEN (Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope) der Cholesteryl-derivaten. 2.

— (Over eene stof, welke vijf verschillende) bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt. 345.

— (Over de anisotrope) van den boterzuren Ester van het Dihydrocholesterine, en over de vraag betreffende eene noodzakelijke aanwezigheid der aethyleendubbelbinding voor het tot stand komen dezer verschijnselen. 721.

VLOEISTOFPHASE (Over het zinken der gasphase in de) bij binaire mengsels. 507.

— (Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de) bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655.

VLOEISTOFTOESTANDEN (Over stoffen, welke meerdere stabiele) bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen. 389.

— (Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere) kunnen vertoonen. 401.

VOERMAN (G. J.) en A. F. HOLLEMAN. Het α- en het β-thiopheenzuur. 545.

VOGELS (Over het voorkomen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den schedel der). 902.

VOSMAER (G. C. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer B. VAN TRICHT: „Over den invloed der vinnen op den vorm van het rompmyotoom". 859. 874.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BOEKE: „Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum". 1ste Mededeeling. 952.

VRIES (HUGO DE). Concept gelukwensch voor de Universiteit te Upsala en de Kon. Akademie van Wetenschappen te Stockholm. 859.

VRIES (JAN DE). Quadratische omwentelingscomplexen. 211.

WAALS (VAN DER) (Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van). XI. Een gas, dat in eene vloeistof zinkt. 454. XII. Over het zinken der gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 507. XIII. Over de voorwaarden voor het zinken en weer opstijgen van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels. 514. Vervolg. 655. XIV. Grafische afleiding der uitkomsten van KUENEN's proeven over mengsels van ethaan en stikstofoxydule. 517. 659. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingsloos gas is met moleculen, die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 754. Vervolg. 851.

WAALS (J. D. VAN DER). Eene opmerking over de theorie van het ψ-vlak voor binaire mengsels. 540.

— Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels. 686. II. 823. III. 915.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over den vorm der driephasenlijn vast-vloeibaar-gasvormig bij een binair mengsel". 732.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over metastabiele en labiele evenwichten vast-fluïde". 742.

— De gedaante der empirische isotherme bij de condensatie van een binair mengsel. 847.

WACHTERS van Jupiter in 1908 (Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der). 179. 2de Afdeeling. 316. 439. Naschrift. 468.

Waterstaat. Mededeeling van den Heer C. LELY: „Stroomsnelheden in een open Panamakanaal". 767.

WATERSTAAT, HANDEL EN NIJVERHEID (Minister van). Missive waarbij bericht wordt dat er geene termen bestaan om aan het verzoek der Geologische Commissie te voldoen. 48. Antwoord van de geologische Commissie. 312.

— Bericht dat de subsidie ten behoeve van de geologische Commissie voortaan zal luiden: „bijdrage aan de K. A. v. W. in de kosten van geologische onderzoekingen". 458.

— Bericht dat op de betaling van het subsidie voor de kosten van geologische onderzoekingen orde gesteld is. 766.

WATERSTOF (Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare). 2. 109.

— (Het zuiveren van) voor den cyclus. 124.

— (Bereiding van zuivere) door distillatie van minder zuivere. 132.

— (Isothermen van) tusschen — 104° C en — 217° C. 517.

WATERSTOFTHERMOMETER (Vergelijking van een thermoelement constantaan-staal met den). 134. Naschrift. 348. 365.

— (Reductie van de aflezing van den) van constant volume op de absolute schaal. 540. 668.

— (Vergelijking van den platina-weerstandsthermometer met den). 160.

— (Bepalingen met den). 310. 349.

WEBER (MAX). Verslag over eene circulaire van het Musée Océanographique te Monaco. 49.

— De vischfauna van Nieuw-Guinea. 368.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer HANS STRAHL. 766.

WEEFSELS (Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende) in de bloem op het openspringen der helmknoppen. 278.

WEERMAN (R. A.). Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide. 262.

WEERSTANDSTHERMOMETER (Vergelijking van den platina-) met den waterstofthermometer. 160.

— (Vergelijking van den platina-) met den goudweerstandsthermometer. 166.

WENT (F. A. F. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. BURCK: „Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen". 278.

WERTHEIM SALOMONSON (J. K. A.). Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen. 246.

WERVELS (Over het voorkomen van kraakbeenige) in de ontwikkeling van den schedel der vogels. 902.

WICHMANN (C. E. A.). Ertsgangen in de provincie Limburg. 767.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. RUTTEN: „Over fossiele Trichechiden uit Zeeland en België". 798.

WIND (C. H.). Verslag over eene circulaire van het Musée Océanographique te Monaco. 49

— Een hypothese aangaande den oorsprong der Röntgen-stralen. 855.

— Verslag in zake de ventilatie der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.

WIND (C. H.), A. F. H. DALHUISEN en W. E. RINGER. Stroommetingen op verschillende diepten in de Noordzee. (1ste Mededeeling). 616.

WIND-WAARNEMINGEN (Over de bewerking van). 704.

WINKLER (C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen". 246.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „On congenital ataxia in a cat". 455. Verslag hierover. 569.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Anatomisch onderzoek omtrent kleinhersenverbindingen". 3e Mededeeling. 859. 879.

Wiskunde. Mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Meerdimensionale vectordistributies". 14.

— Mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten". 75.

— Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Quadratische omwentelingscomplexen". 211.

— Mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten". 293.

— Mededeeling van den Heer W. A. VERSLUYS: „Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme". 342.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume". 2te Abhandlung. 360.

Wiskunde. Mededeeling van den Heer W. KAPTEYN: „Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde". 410.

— Mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels". 1e Gedeelte. 412. 2e Gedeelte. 474.

— Mededeeling van den Heer J. C. KLUYVER: „Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n." 423.

— Mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats der gemeenschappelijke puntenparen van vier oppervlakkenbundels." 481.

— Mededeeling van den Heer W. A. WIJTHOFF: „De regel van Neper in de ruimte van vier afmetingen". 492.

— Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over de meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van kubische vlakke krommen met zes basispunten". 570.

— Mededeeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen van $n+1$ bundels van $(n-1)$-dimensionale variëteiten in een ruimte van n afmetingen". 633.

— Mededeeling van den Heer S. L. VAN OSS: „Evenwicht van krachten- en rotatiesystemen in R_4." 818.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvan de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen". 860. Verslag hierover. 871.

WIJHE (J. W. VAN). Over het voorkomen van kraakbeenige wervels in de ontwikkeling van den schedel der vogels. 902.

WIJTHOFF (W. A.) De regel van Neper in de ruimte van vier afmetingen. 492.

IJS (Over de beweging van een metaaldraad door een stuk. 638.

ZEELAND (Over fossiele Trichechiden uit) en België. 798.

ZEEMAN (P.). Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam. 313.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. E. MOGENDORFF: „Over eene nieuwe empirische spectraalformule". 429.

— Verslag over een schrijven van den Heer E. C. VAN LEERSUM. 465.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over den invloed welke lichtstraling heeft op het elektrisch geleidingsvermogen van den Japanschen antimoniet". 724.

— Verslag in zake de ventilatie der lokalen in 's Rijksmuseum te Amsterdam. 865.

ZENUWINVLOED (Bijdrage tot de kennis van) op de hartswerking. 1ste Mededeeling. Genese van den pulsus alternans. 905.

ZENUWSTELSEL (Over den bouw van de glangliencellen in het centraal) van Branchiostoma lanceolatum. 1ste Mededeeling. 952.

ZON (Circulaire betreffende de samenwerking der Internationale Associatie der Akademiën en de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der). 312.

ZONSVERDUISTERING van 30 Augustus 1905 te Tortosa (Spanje) (Waarnemingen der totale). 37.

ZOUTZUURANILINE (Driephasenlijnen bij Chloralalcoholaat en). 58.

ZWAARDEMAKER (H.). Over de quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en hartswerking, naar aanleiding van onderzoekingen van den Heer P. WOLTERSON. 555.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Bijdrage tot de kennis van zenuwinvloed op de hartswerking. 1ste Mededeeling. Genese van den pulsus alternans". 905.

ZWIERS (H. J.). Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische beweging. IV. 372.